Franz Lemmermeyer

Zur Zahlengeometrie der Babylonier

Von den mathematischen Leistungen der Kulturen, die älter als 2500 Jahre sind, wissen wir nur wenig; im Wesentlichen die einzige Ausnahme ist die babylonische Kultur, die sich vor 5000 Jahren in Mesopotamien auf dem Gebiet des heutigen Irak entwickelt hat. Unser Wissen über diese Kultur verdanken wir dem Umstand, dass die dortigen Völker Tontafeln zum Schreiben benutzt haben: während Dokumente, die auf vergänglichen Materialien wie Papyrus, Pergament oder Baumrinden geschrieben wurden, bis auf ganz wenige Bruchstücke längst zerfallen sind, haben sich Zehntausende dieser Tontafeln erhalten. Die meisten Tontafeln befassen sich mit Buchhaltung, Religion und Literatur – nur bei einem kleinen Teil der Tafeln geht es um mathematische Probleme. Wir wollen uns hier mit einer ganz bestimmten Art eines solchen Problems befassen, nämlich mit der Teilung von Trapezen in zwei flächengleiche Teiltrapeze. Erwähnt werden sollte noch, dass das Niveau der hier vorgestellten Tontafeln nicht repräsentativ für die babylonische Mathematik ist; es gibt sehr viele Tafeln, auf denen ganz einfache Rechnungen durchgeführt werden. Für eine Einführung in die babylonische Mathematik auf elementarem Niveau verweisen wir auf Lehmann [17] und Rudman [22]; eine genauere Untersuchung der mathematischen Methoden der Babylonier findet man bei Neugebauer [19], Neugebauer & Sachs [20] und Jöran Friberg [10, 11].

Die Sumerer bewohnten um 3500 v.Chr. Mesopotamien, die Gegend zwischen Euphrat und Tigris im heutigen Irak. Sie benutzten Tontafeln zur Buchhaltung und Verwaltung; Zahlen wurden additiv aus Symbolen für 1, 10, 60, 600, 3600 usw, zusammengesetzt. Mit der Entwicklung der Keilschrift um 2700 v.Chr. wurden auch die Zahlensymbole in Keilschrift geschrieben. Die sumerische Sprache wurde nach der Machtübernahme des semitischen Volks der Akkader um 2300 v.Chr. durch das Akkadische ersetzt, die Keilschrift aber wurde beibehalten, und Sumerisch blieb auch viele Jahrhunderte lang weiterhin die Sprache der Wissenschaft, vergleichbar dem Latein während der europäischen Renaissance. Der Blüte der altbabylonischen Kultur nach 1800 v.Chr., die mit dem Herrscher Hammurabi verbunden ist, folgt ein Niedergang der Mathematik unter der Herrschaft der Kassiten. Die meisten der hier vorgestellten Keilschrifttafeln stammen aus der altbabylonischen Periode.

Die Entzifferung der akkadischen und sumerischen Keilschrifttexte verdanken wir einer Reihe von Gelehrten: nach den ersten Erfolgen des Gymnasiallehrers Grotefend im Jahre 1802 gelang Löwenstern, Hincks und Rawlinson der Durchbruch. Während des ersten Weltkriegs hat Weidner auf einer Tafel eine Anwendung des Satzes von Pythagoras erkannt, und erst danach begann man, sich ernsthaft mit der babylonischen Mathematik auseinanderzusetzen. Die Erkenntnis, dass die Mathematik der Babylonier ein ganz erstaunliches Niveau besessen hat, verdanken wir in erster Linie den Arbeiten von Neugebauer und Thureau-Dangin in den 1930er Jahren. Neben Tabellen von Vielfachen, Quadratzahlen, Reziproken gibt es vor allem reine Aufgabentexte, Aufgabentexte mit Angabe der Lösungen, und Aufgabentexte mit den durchgeführten Rechnungen.

Eine ganz bestimmte Art von Aufgaben, die auf solchen Keilschrifttafeln behandelt wurde, ist das Aufteilen von Grundstücken in solche gleicher Größe (oder solche, deren Differenz oder Verhältnis gegeben ist). Derlei Probleme stellten sich beim Vererben von Land an mehrere Söhne; wie wir aber gleich sehen werden, waren die Schulaufgaben, die auf den Keilschrifttafeln vorgerechnet wurden, nicht wirklich realitätsnah; vielmehr wurden die auftretenden Seitenlängen in der Regel so gewählt, dass sich "glatte Ergebnisse" ergaben. Um diese Wahl der Angaben erklären zu können, muss man bisweilen ziemlich tief in die mathematische Trickkiste greifen. Es war wohl unter Anderem dieses Streben nach, wie Schüler sie heute nennen würden, "schönen Zahlen", das die babylonische Mathematik auf ein Niveau gehoben hat, welches erst die Griechen mehr als ein Jahrtausend später wieder erreicht (und weit übertroffen) haben. Die "realitätsnahe Mathematik" der Ägypter hat dagegen, soweit wir wissen, nichts Vergleichbares hervorgebracht.

Auch die indische Kultur hat übrigens eine ähnliche Gewandtheit beim Komponieren rechtwinkliger Dreiecke gezeigt wie die babylonische. Allerdings taucht die Trapezhalbierung in den vorgriechischen Kulturen nur bei den Babyloniern auf.

1. Ein diophantisches Problem

Selbst wer sich nur ganz oberflächlich mit babylonischer Mathematik befasst hat, kennt die wohl bekannteste aller Keilschrifttafeln: Plimpton 322. Auf dieser Tafel haben die Babylonier demonstriert, dass sie in der Lage waren, unendlich viele ganzzahlige Lösungen der Gleichung $x^2+y^2=z^2$ anzugeben oder genauer – die Interpretationen sind nicht ganz eindeutig – rationale Lösungen der Gleichung $X^2+1=Y^2$, was mathematisch auf dasselbe hinausläuft.

Euklid und später Diophant haben gezeigt, wie man die Gleichung $x^2+y^2=z^2$ in ganzen Zahlen lösen kann; ihre Ergebnisse laufen auf die Formeln

$$x=m^2-n^2, \quad y=2mn \quad \text{und} \quad z=m^2+n^2 \tag{1}$$

hinaus, in der m und n (positive) ganze Zahlen bezeichnen.

Weniger bekannt ist, dass die Babylonier auch die Gleichung $x^2+y^2=2z^2$ (oder, um etwas genauer zu sein: geometrische Probleme, die auf diese Gleichung führen) zu lösen verstanden. Schreibt man diese Gleichung in der Form $x^2-z^2=z^2-y^2$, so sieht man, dass dieses Problem äquivalent dazu ist, drei Quadrate y^2, z^2 und x^2 in arithmetischer Progression zu finden: in dieser Form hat es später Diophant (III.7 und etwas allgemeiner in II.19; sh. [7]) gelöst. Diophant setzt die beiden ersten Quadrate an als y^2 und $(y+1)^2$; addiert man deren Differenz $2y+1$ zum zweiten Quadrat, sieht man, dass das dritte Quadrat y^2+4y+2 sein muss. Diophant muss daher $x^2=y^2+4y+2$ lösen. Dazu setzt er $x=y-m$ (mit $m=8$; wir geben hier die allgemeine Rechnung, die Diophant nicht aufschreiben konnte, weil er nur Bezeichnungen für eine Unbekannte hatte) und findet $y^2-2my+m^2=y^2+4y+2$, also $(2m+4)y=m^2-2$ und damit

$$y=\frac{m^2-2}{2m+4}, \quad x=y-m=-\frac{m^2+4m+2}{2m+4} \quad \text{und} \quad z=y+1=\frac{m^2+2m+2}{2m+4}.$$

Damit haben wir die drei Quadrate

$$(m^2-2)^2, \quad (m^2+2m+2)^2 \quad \text{und} \quad (m^2+4m+2)^2$$

in arithmetischer Progression, was für $m=8$ nach Kürzen des gemeinsamen Faktors 2 auf die Quadrate 31^2, 41^2 und 49^2 und auf das „babylonische Tripel“ $(31,49,41)$ führt. Hier und im Folgenden ist ein babylonisches Tripel ein Tripel (a,b,c) natürlicher Zahlen mit $a^2+c^2=2b^2$.

Bei Diophant steht für $m=8$ das Tripel rationaler Zahlen

$$x=\frac{49}{10}, \quad y=\frac{31}{10} \quad \text{und} \quad z=\frac{41}{10},$$

und dem aufmerksamen Leser wird nicht entgangen sein, dass $y-8$ hier nicht gleich x, sondern gleich $-x$ ist. Diophant kannte keine negativen Zahlen, und meiner Meinung nach ist dieses Problem gar keines. Vielmehr glaube ich, dass Diophants Notation $y-8$ nicht unserer Differenz entspricht (die für die Alten gar keinen Sinn gehabt hätte), sondern dem, was wir heute $|y-8|$ schreiben würden, also den (selbstverständlich positiv genommenen) „Unterschied“ zwischen y und 8.

Mit einem Trick, den Euler oft erfolgreich angewandt hat, können wir die Lösung der Gleichung

$$a^2+c^2=2b^2 \tag{2}$$

auf diejenige von $x^2+y^2=z^2$ zurückführen. Ist das Tripel (a,b,c) nämlich primitiv, haben also a, b und c keinen gemeinsamen Teiler, dann müssen a und c ungerade sein. Wir teilen (2) durch 2 und schreiben das Ergebnis so:

$$\left(\frac{a-c}{2}\right)^2+\left(\frac{a+c}{2}\right)^2=b^2.$$

Dies ist die bekannte pythagoreische Gleichung, und wir können

$$\frac{a-c}{2} = m^2 - n^2 \quad \text{und} \quad \frac{a+c}{2} = 2mn$$

für ganze Zahlen m und n setzen. Damit finden wir die Lösungen

$$a = m^2 + 2mn - n^2 = (m+n)^2 - 2n^2, \quad c = n^2 + 2mn - m^2 = (m+n)^2 - 2m^2, \quad b = m^2 + n^2 \tag{3}$$

der Gleichung (2). Eine geometrische Veranschaulichung des Zusammenhangs zwischen pythagoreischen und babylonischen Tripeln findet man bei Anna Fraedrich [8, S. 315] (der die babylonische Herkunft des Problems aber nicht bekannt war).

Aufgabe 1. *Euler hat den oben vorgeführten Trick benutzt, um zu zeigen, dass die natürliche Zahl n eine Summe zweier Quadratzahlen ist, wenn $2n$ eine Summe zweier Quadratzahlen ist. Man beweise diese Aussage.*

Wählt man $n = m - 1$, so spezialisieren sich die Formeln zu

$$a = 2m^2 - 1, \quad c = 2m^2 - 4m + 1 = 2(m-1)^2 - 1, \quad \text{und} \quad b = 2m^2 - 2m + 1. \tag{4}$$

Mit Hilfe von Quadrattafeln lassen sich sofort beliebig viele solcher Tripel konstruieren: Man nimmt zwei aufeinanderfolgende Quadratzahlen $(m-1)^2$ und m^2; Verdopplung dieser Zahlen nebst und Subtraktion von 1 liefert c und a, Addition der beiden Quadratzahlen ergibt b.

Setzt man dagegen $m = 2k+1$ und $n = 2k-1$ und teilt die (geraden) Werte von a, c und b durch 2, so erhält man folgende Formeln:

$$a = (2k+1)^2 - 2, \quad c = (2k-1)^2 - 2, \quad b = (2k)^2 + 1. \tag{5}$$

Aufgabe 2. *Zeige, dass es unendlich viele babylonische Tripel (a,b,c) gibt, in denen eine der Zahlen a, b oder c eine Quadratzahl ist.*

Die Lösungen der Aufgaben werden wir im nächsten Heft nachreichen.

Einige kleine ganzzahlige Lösungen der Gleichung (2) findet man in Tab. 1. Darunter stehen die dazugehörigen pythagoreischen Tripel (x,y,z), die man mit $x = \frac{a-c}{2}$, $y = \frac{a+c}{2}$ und $z = b$ aus den babylonischen Tripel erhält. Umgekehrt ist $x + y = a$, sowie $|x - y| = c$.

m	1	2	3	4	5	6
a	1	7	17	31	49	71
c	1	1	7	17	31	49
b	1	5	13	25	41	61
x	0	3	5	7	9	11
y	1	4	12	24	40	60
z	1	5	13	25	41	61

m	1	2	3	4	5
a	7	23	47	79	119
c	1	7	23	47	79
b	5	17	37	65	101
x	3	8	12	16	20
y	4	15	35	63	99
z	5	17	37	65	101

Tabelle 1: Folgen von Lösungen der diophantischen Gleichung $a^2 + c^2 = 2b^2$ und dazugehörige pythagoreische Tripel

Die Babylonier hätten solche Tafeln also sicher konstruieren können – aber haben sie es auch getan?

Im Gegensatz zur Keilschrifttafel Plimpton 322, die zeigt, dass die Babylonier die pythagoreische Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ in ganzen Zahlen lösen konnten, gibt es im Falle von $a^2 + c^2 = 2b^2$ allerdings nichts Vergleichbares. Um nachzuweisen, dass die Babylonier auch diese Gleichung zu lösen verstanden, müssen wir uns in einige Aufgaben vertiefen, die sich mit Flächenteilungen beschäftigen.

2. Die Keilschrifttafel IM 58045

Teilungsprobleme von Trapezen finden sich auf vielen der bereits von Neugebauer und Sachs veröffentlichten Tafeln (z.B. YBC 4675) [20, S. 44ff]. Mathematisch sehr interessant ist die von Friberg [10, 11] untersuchte Tafel IM 58045, auf welcher allerdings nur die zu folgendem Problem gehörige Zeichnung (und nicht die Aufgabe selbst) zu finden ist. Dort ist ein Trapez der Höhe $h = 12$ zu sehen, dessen parallele Seiten die Längen $a = 17$ und $c = 7$ besitzen (vgl. Abb. 1). Die Aufgabe bestand vermutlich darin, das Trapez durch eine zu a und c parallele Seite in zwei flächengleiche Trapeze zu teilen und deren Länge b zu berechnen.

Der Flächeninhalt des Trapezes ist $\frac{a+c}{2} \cdot h = 144$ (die Summe aus einem Rechteck und zwei kongruenten rechtwinkligen Dreiecken), also müssen beide Teile Flächeninhalt 72 besitzen. Bezeichnet man die Länge der gesuchten Transversale mit b und die dazugehörigen Teilhöhen mit u bzw. v, dann müssen folgende Gleichungen gelten:

$$\frac{17+b}{2} \cdot u = 72, \quad \frac{b+7}{2} \cdot v = 72, \quad u+v = h = 12.$$

Wir können nur darüber spekulieren, mit welchen Methoden die alten Babylonier (im vorliegenden Fall stammt die Tafel aus Nippur) solche Probleme gelöst haben. Für uns besteht das Problem im Lösen eines nichtlinearen Gleichungssystems. Ersetzen wir v durch $h-u$ und eliminieren u dadurch, dass wir die erste Gleichung nach u auflösen und in die zweite einsetzen, dann erhalten wir

$$\frac{b+7}{2} \cdot \left(12 - \frac{144}{17+b}\right) = 72.$$

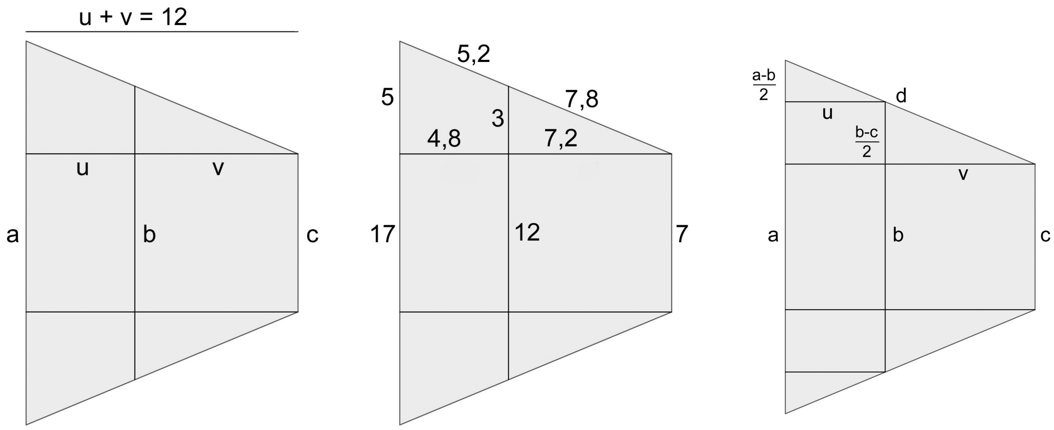


Abbildung 1: Trapezhalbierung

Wir können diese Gleichung auf eine quadratische Gleichung zurückführen, indem wir durch 6 teilen und mit $b+17$ durchmultiplizieren, und erhalten dann $12b^2 = 2028$, also $b^2 = 169$ und $b = 13$.

Dass die Babylonier ebenso vorgegangen sind, ist nur schwer vorstellbar – die für eine solche Lösung notwendige Algebra ist schon recht weit entwickelt. Es ist auch nicht ganz leicht, diese Aufgabe durch einfaches Herumprobieren zu finden; wer sich selbst davon überzeugen möchte, wie schwer es ist, glatte Werte zu produzieren, kann das von Joan Jareño erstellte geogebra-file [16] benutzen. Zahlentheoretisch versierte Leser können an den Formeln für a, b und c ablesen, dass jeder ungerade Teiler von a und c die Form $8n \pm 1$ hat, während die ungeraden Teiler von b alle die Form $4n+1$ besitzen. Bewaffnet mit diesem Wissen ließen sich geeignete Werte für a und c durch Probieren finden, allerdings waren derartige Kenntnisse vor Fermat und Euler nicht bekannt.

Es ist nun nicht etwa so, dass hier nur das Ergebnis $b = 13$ glatt ist; vielmehr lassen sich alle im geteilten Trapez auftretenden Seitenlängen entweder durch natürliche Zahlen oder (im babylonischen Sexagesimalsystem) einfache Brüche darstellen (vgl. Abb. 1 Mitte). So erhalten wir aus $b = 13$ auch die Werte $u = \frac{144}{17+b} = \frac{24}{5}$ und $v = \frac{36}{5}$; die nichtparallelen Seiten des Trapezes haben Länge 13 (das hier auftretende rechtwinklige Dreieck gehört zum bekannten pythagoreischen Tripel $(5, 12, 13)$), und sogar die beiden Teilstücke der Kante der Länge 13 haben rationale Längen, nämlich $\frac{26}{5}$ und $\frac{39}{5}$.

Selbst wenn die Babylonier die Startwerte $a = 17$ und $c = 7$ mit Hilfe von Probieren gefunden hätten, wäre das eine respektable Leistung. Wir werden uns aber unten davon überzeugen können, dass von einer "Konstruktion durch Probieren" keine Rede sein kann.

3. Trapezhalbierung

Wir gehen nun aus von einem Trapez, in welchem die Längen a und c der parallelen Seiten sowie die Höhe h gegeben ist. Wir beginnen mit der Untersuchung der Frage, für welche ganzzahlige Wahl von a und c (nach dem Strahlensatz wird b nur von a und c abhängen, nicht aber von h) die Länge b der gesuchten Transversale ebenfalls ganzzahlig wird.

Wir gehen vor wie oben; die Gesamtfläche des Trapezes ist $\frac{a+c}{2} \cdot h$, also haben wir die drei Gleichungen

$$\frac{a+b}{2} \cdot u = \frac{a+c}{4} \cdot h, \quad \frac{b+c}{2} \cdot v = \frac{a+c}{4} \cdot h, \quad h = u + v.$$

Elimination von u und v liefert dieses Mal die Gleichung $a^2 + c^2 = 2b^2$. Ganzzahlige Lösungen dieser Gleichung haben wir bereits in Tabelle (1) angegeben. Wir wollen im folgenden die dazugehörigen Trapeze solche erster und zweiter Art nennen, je nachdem, ob das Tripel (a, b, c) der Gleichung (4) oder (5) genügt.

Weil die Eindeutigkeit der flächenhalbierenden Transversalen anschaulich klar ist, haben wir bewiesen:

Satz 1 (Hauptsatz der Trapezteilung)**.** *Die Länge b der zu den parallelen Seiten a und c eines Trapezes parallelen Transversalen, welche das Trapez in zwei flächengleiche Trapeze teilt, genügt der Gleichung* $a^2 + c^2 = 2b^2$.

Etwas einfacher verläuft die Herleitung der Gleichung $a^2 + c^2 = 2b^2$ durch Benutzen des Strahlensatzes. In Abb. 1 (rechts) finden wir mit Strahlensatz bzw. Flächengleichheit

$$\frac{a-b}{2} : u = \frac{b-c}{2} : v \quad \text{und} \quad \frac{a+b}{2} \cdot u = \frac{b+c}{2} \cdot v.$$

Multiplikation der beiden Gleichungen liefert direkt die Gleichung $a^2 - b^2 = b^2 - c^2$.

3.1 Abzählen von Ziegeln

Ziegel sind ein ganz wesentlicher Bestandteil der mesopotamischen Kultur: da zwischen Euphrat und Tigris Steinblöcke und Holz zu den Mangelwaren gehörten und importiert werden mussten, haben die Babylonier beim Bauen ihrer Mauern, Brücken und Tempel Ziegelsteine benutzt. Betrachten wir einen Ausschnitt einer Wand

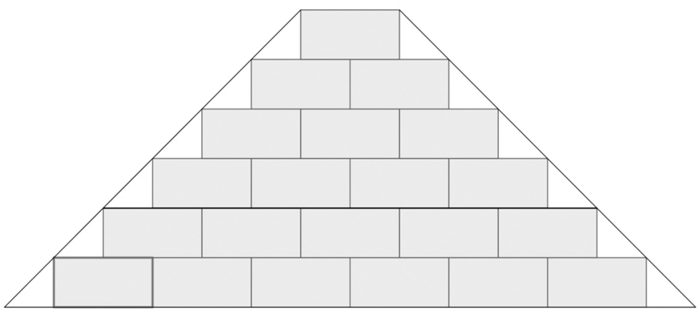


Abbildung 2: Flächenteilung des Trapezes mit $a = 1$ und $c = 7$

aus Ziegelsteinen; in der obersten Reihe nehmen wir einen Ziegelstein, in der darunterliegenden zwei, bis in der sechsten Reihe sechs Ziegelsteine liegen. Ergänzt man diese Mauer zu einem Trapez, hat die Unterkante die Länge von 7 Ziegelsteinen. Die beiden unteren Reihen zusammen haben also eine Fläche von $6+5=11$ ganzen Ziegelsteinen und 4 Vierteln, also insgesamt von 12. Die anderen Ziegelsteine haben eine Fläche von $1+2+3+4=10$ ganzen Ziegelsteinen und 8 Vierteln, also insgesamt ebenfalls 12. Also wird das Trapez mit Oberkante 1 und Unterkante 7 an einer Stelle halbiert, die Länge 5 hat.

Allerdings erklärt dies nicht, dass hier $1^2+7^2=2\cdot 5^2$ ist, oder wie man durch ein solches Vorgehen Beispiele mit größeren ganzen Zahlen finden kann.

3.2 Beweis mit dem Gnomonsatz

Der Strahlensatz ist ein für die griechische Mathematik typisches Resultat: Es baut auf der Theorie der Proportionen auf, den die Griechen sowohl ihrer Geometrie als auch ihrer Zahlentheorie zugrunde legten.

Andere Kulturen, die babylonische ebenso wie in noch größerem Ausmaß die chinesische (vgl. Swetz [24]), bevorzugten dagegen den Gnomonsatz für rechtwinklige Dreiecke, der gerade für den heutigen Schulunterricht diverse Vorteile gegenüber dem Strahlensatz hat:

- Der Gnomonsatz ist einfacher zu beweisen als der Strahlensatz.
- Er reicht für die meisten Anwendungen aus.
- Der Gnomonsatz lässt sich oft leichter anwenden.

Ein Gnomon war ursprünglich derjenige Teil einer Sonnenuhr, der den Schatten warf. In der griechischen Mathematik bezeichnete er später die „Differenz“ zweier ähnlicher geometrischer Figuren.

Wir betrachten nun zwei ähnliche Rechtecke ABCD und AEGI; der dazugehörige Gnomon BEGIDC hat hier die Form eines L. Das Teildreieck AEG des großen Rechtecks besteht aus zwei rechtwinkligen Dreiecken ABC und CFG, sowie einem Rechteck BEFC.

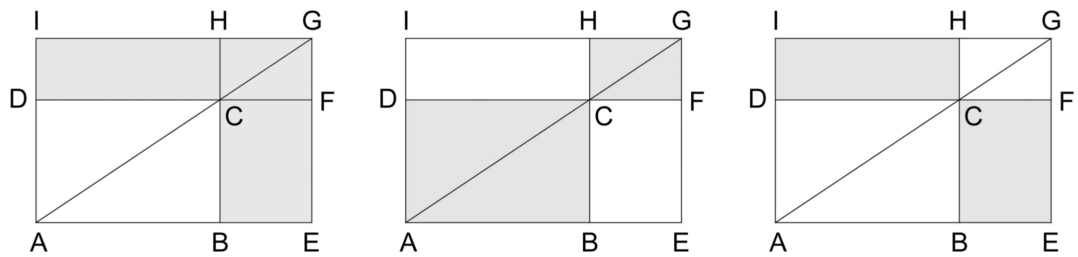


Abbildung 3: Der Gnomonsatz bei Rechtecken

Offenbar ist die Fläche F_{AEG} des unteren Dreiecks gleich der Fläche F_{AGI} des oberen Dreiecks. Aus den gleichen Symmetriegründen sind auch die Flächen der Dreiecke ABC und ACI, sowie von CFG und CGH gleich. Also müssen auch die beiden Rechtecke BEFC und CHID den gleichen Flächeninhalt haben; beachte, dass diese beiden Rechtecke die einzigen *nicht ähnlichen* Teile dieser Figur sind.

Satz 2 (Gnomonsatz)**.** *In der Figur von Abb. 3 sind die Flächen der Rechtecke BEFC und CHID gleich groß.*

In vielen (aber nicht allen) führt eine Folgerung aus dem Gnomonsatz schneller zum gewünschten Ergebnis. Ausgangspunkt unserer Überlegungen ist die Strahlensatzfigur (Abb. 4 links).

Ergänzen wir diese Figur so, dass wir den Gnomonsatz anwenden können (Abb. 4 rechts), dann sehen wir

$$bc = a(d-c).$$

Auflösen der Klammern und Addition von ac ergibt $(a+b)c = ac+bc = ad$, und diese Gleichung können wir in der Form

$$\frac{a+b}{d} = \frac{a}{c} \tag{6}$$

schreiben. In dieser Gleichung bezeichnen a und c die Katheten des kleinen Dreiecks und $a+b$ und d diejenigen des großen Dreiecks in Abb. 4.

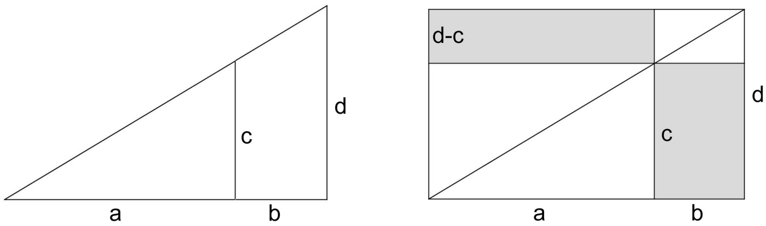


Abbildung 4: Strahlensatz für rechtwinklige Dreiecke

Wir haben also den folgenden

Satz 3 (Strahlensatz für rechtwinklige Dreiecke)**.** *Sind zwei ähnliche rechtwinklige Dreiecke mit den Katheten a und c bzw. $a+b$ und d gegeben, dann gilt (6).*

Anwendung auf die Trapezhalbierung

Wenden wir den Gnomon-Satz auf die Trapezhalbierung an (Abb. 5 links), so erhalten wir die Gleichungen

$$\frac{b-c}{2} \cdot u = \frac{a-b}{2} \cdot v \quad \text{und} \quad \frac{b+a}{2} \cdot u = \frac{c+b}{2} \cdot v,$$

wobei die zweite Gleichung aus der Flächengleichheit folgt. Dividiert man beide Gleichungen durcheinander, fallen u und v weg und wir finden

$$\frac{b-c}{a+b} = \frac{a-b}{b+c}, \quad \text{also} \quad b^2 - c^2 = (b+c)(b-c) = (a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

Damit haben wir den Hauptsatz der Trapezhalbierung ebenso bewiesen wie die Unabhängigkeit der Längen der Transversalen von der Höhe des Trapezes.

3.3 Euklids Beweis

Der babylonische Satz der Trapezhalbierung ist zwar nicht in den *Elementen* Euklids zu finden, taucht aber als Proposition 4 in dem nur teilweise in arabischer Bearbeitung erhaltenen Buch Euklids über die Teilung der Figuren [1] auf. Leonardo von Pisa, besser bekannt unter dem Namen Fibonacci, erwähnt den Satz, den er wohl aus arabischen Quellen kannte, auf S. 135 seiner *Practica Geometrica*, gibt aber dann ein Beispiel mit $a = 12$ und $c = 3$, in welchem die Länge b nicht rational ist.

Aufgabe 3. *Man zeige, dass dieser Satz auch gilt, wenn das Trapez nicht gleichseitig ist, und dass die Aussage von den Längen der beiden nicht parallelen Seiten des Trapezes unabhängig ist.*

Die am Beginn des dritten Abschnitts vorgestellte Methode führt auch hier im allgemeinen Fall etwas schneller und mit weniger Aufwand zum Ziel. Ein noch einfacherer Zugang ist der euklidische Beweis aus [1, S. 35], den man auch in [4] findet.

Die wesentliche Idee hinter diesem Beweis ist die Beobachtung, dass die Flächen ähnlicher Dreiecke mit den Grundseiten x und y sich verhalten wie $x^2 : y^2$. Dies ist ein Spezialfall der Proposition 23 im vierten Buch der *Elemente* Euklids.

Ist ABCD ein Trapez mit parallelen Seiten AB und CD, und wird es von der dazu parallelen Transversalen MN halbiert, dann ergänze man das Trapez zu einem Dreieck ABS (Abb. 5 Mitte). Bezeichnet man die Flächen der

Teildreiecke SCD, SMN und SAB mit T_a, T_b und T_c, und ist T die Fläche des halbierten Trapezes, dann gelten die Beziehungen

$$T_a + T = T_b, \quad T_c - T = T_b, \quad \text{folglich} \quad T_a + T_c = 2T_b.$$

Da die Flächen T_a, T_b und T_c sich zueinander verhalten wie a^2, b^2 und c^2, folgt daraus (2), und zwar fast ohne Rechnung.

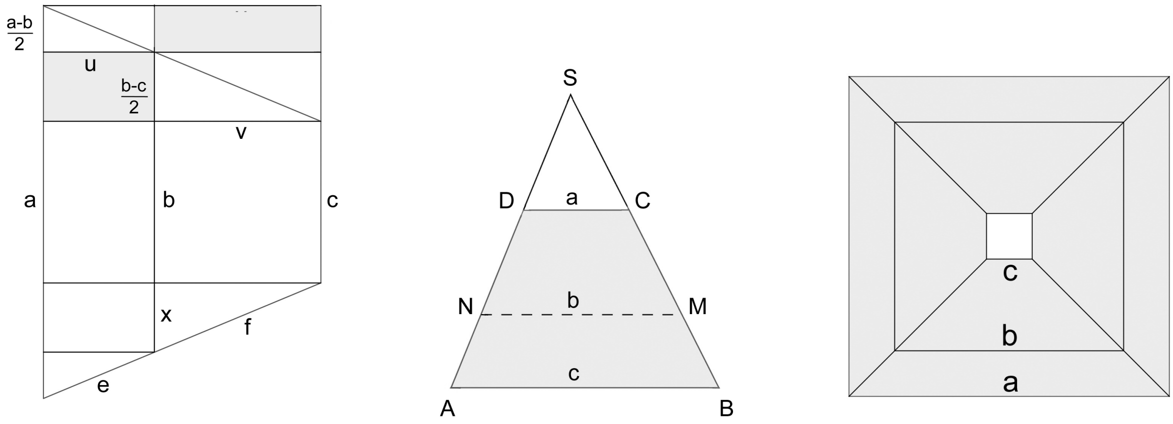


Abbildung 5: Trapezhalbierung mit dem Gnomon-Satz, bei Euklid, und am Quadrat

4. Beweis am Quadrat

Vielleicht noch einfacher ist die Lösung, die Høyrup in [14, S. 237] (sh. auch [22, S. 82]) anbietet: Durch Streckung eines Trapezes mit parallelen Seiten a und c und einer Transversalen der Länge b in Richtung der Höhe kann man erreichen, dass der Basiswinkel zu einem halben rechten Winkel wird, also zu $45°$; das Verhältnis der beiden Teilflächen bleibt dabei ebenso unverändert wie die Längen a, b und c.

Legt man vier solcher Trapeze zu einem Quadrat zusammen (Abb. 5 rechts), so erkennt man, dass die Fläche eines Trapezes gleich $\frac{1}{4}(a^2 - c^2)$ ist. Die Fläche des oberen Teiltrapezes ist aus dem gleichen Grund $\frac{1}{4}(b^2 - c^2)$. Soll diese Fläche halb so groß sein wie diejenige des Ausgangstrapezes, muss also $\frac{1}{4}(b^2 - c^2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}(a^2 - c^2)$ gelten, und nach einer kleinen Vereinfachung ergibt dies $a^2 + c^2 = 2b^2$.

Egal wie der babylonische Mathematiker, der dieses Problem entworfen hat, auch vorgegangen ist: die Beziehung $a^2 + c^2 = 2b^2$ wird sich ohne irgendeine Form der Begründung kaum erraten lassen. Die Vorstellung, dass das Konzept eines Beweises urplötzlich im sechsten vorchristlichen Jahrhundert in Griechenland entstanden ist, lässt sich mit den Leistungen der Babylonier nur schwer in Einklang bringen.

Aufgabe 4. *Zeige, dass das rechtwinklige Teildreieck mit den Katheten $\frac{a-c}{2}$ und h in Abb. 1 rechts ganzzahlige Seitenlängen besitzt, wenn man $h = 2mn$ setzt.*

Zeige weiter, dass man in diesem Fall

$$u = \frac{a-b}{a-c} \cdot h = \frac{2mn^2}{m+n}, \quad v = \frac{b-c}{a-c} \cdot h = \frac{2m^2n}{m+n}, \quad \textit{und} \quad d = m^2 + n^2 = b$$

findet, und dass $u : v = n : m$ gilt.

Außerdem rechne man nach, dass sogar das rechtwinklige Dreieck mit den Katheten v und $x = \frac{b-c}{2}$ und der Hypotenuse f rational ist (vgl. Abb. 5).

Aufgabe 5. *Man untersuche, ob sich ähnlich interessante Aufgaben ergeben, wenn man Trapeze in drei flächengleiche Trapeze teilt, oder in Trapeze, deren Flächen gleich einem vorgegebenen Verhältnis ist.*

5. Die Komposition Babylonischer Trapeze

Wir wollen ein gleichschenkliges Trapez, dessen parallele Seiten die Längen $a = 2m^2 - 1$ und $c = 2(m-1)^2 - 1$ haben und dessen Höhe $h = 2m(m-1)$ ist, ein *Babylonisches Trapez* nennen. Solche Babylonischen Trapeze haben eine Reihe überraschender Eigenschaften.

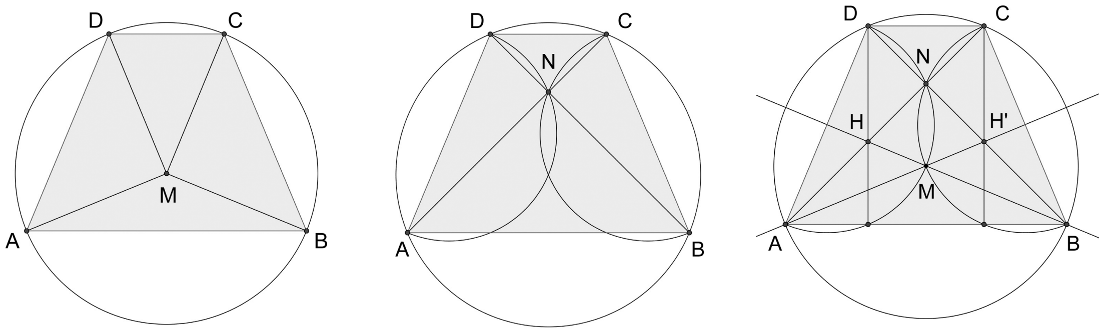


Abbildung 6: Geometrische Eigenschaften Babylonischer Trapeze

Aufgabe 6. *Zeige, dass ein gleichschenkliges Babylonisches Trapez einen Umkreis besitzt. Bezeichnet M dessen Mittelpunkt, dann sind die Dreiecke AMD und BMC rechtwinklig in M. Insbesondere liegt M auf den Thaleskreisen über AD und BC.*

Sei N der zweite Schnittpunkt der Thaleskreise innerhalb des Trapezes. Zeige, dass N mit dem Diagonalenschnittpunkt zusammenfällt, und dass auch die Dreiecke AND und BNC rechtwinklig in N sind. Insbesondere ist $\angle BAC = 45°$.

Lies an der dritten Figur in Abb. 6 weitere Eigenschaften Babylonischer Trapeze ab und beweise sie.

Gibt es analoge Aussagen für Trapeze der zweiten Art?

Die Tatsache, dass zwei (in den Tabellen 1) aufeinanderfolgende babylonische Tripel eine Zahl gemeinsam haben, bedeutet geometrisch, dass man derartige Trapeze aufeinandersetzen kann. Allerdings entsteht dabei kein Trapez mehr, außer man streckt eines oder mehrere der Teiltrapeze durch Streckungen in Richtung der Höhe.

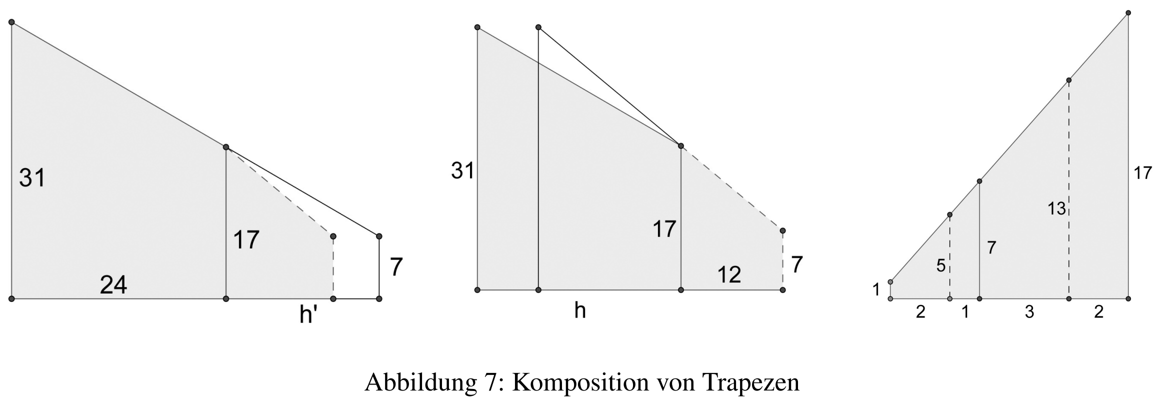


Abbildung 7: Komposition von Trapezen

Eine ganz einfache Methode, Trapeze der ersten Art zusammenzusetzen, ist die in der folgenden Aufgabe beschriebe:

Aufgabe 7. *Setzt man im Trapez mit den Parametern m und* $n = m - 1$ *die Höhenabschnitte* $u = m - 1$ *und* $v = m$*, dann bildet die Komposition zweier (und damit beliebig vieler) aufeinanderfolgender Trapeze wieder ein Trapez.*

Aufgabe 8. *Finde eine analoge Komposition für Trapeze der zweiten Art.*

6. Ein Erbschaftsproblem aus AO 17 264

Die folgende Aufgabe wurde bereits von Neugebauer [19, S. 126ff] besprochen und findet sich auch bei Gandz [13]. Ein trapezförmiges Feld, dessen parallele Seiten die Längen $a = 51$ und $c = 213$ haben, und deren andere Seitenlängen $b = 135$ und $d = 81$ sind, ist durch parallele Streifen unter sechs Brüdern so aufzuteilen, dass die ersten beiden den gleichen Anteil bekommen, ebenso der dritte und vierte, sowie der fünfte und sechste.

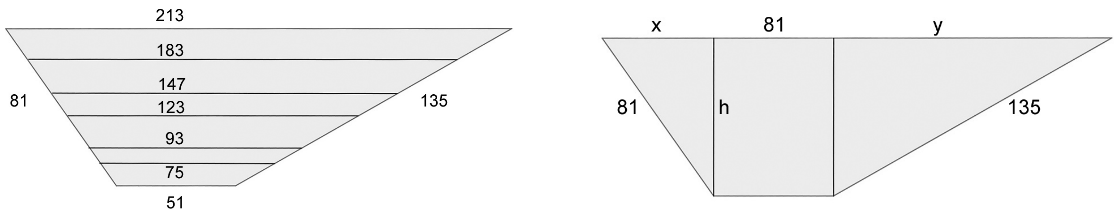


Abbildung 8: Erbschaftsproblem aus AO 17 264

Bevor wir uns der genauen Untersuchung der Aufgabe zuwenden, wollen wir uns davon überzeugen, dass das vorgelegte Viereck tatsächlich ein Trapez ist. Teilen wir das Viereck wie angegeben in ein Rechteck der Höhe h und zwei rechtwinklige Dreiecke mit Hypotenusen 81 bzw. 135, so muss gelten:

$$h^2 + x^2 = 81^2, \quad h^2 + y^2 = 135^2 \quad \text{und} \quad x + y + 51 = 213.$$

Subtrahiert man die beiden ersten Gleichungen, ergibt sich $y^2 - x^2 = 135^2 - 81^2 = 108^2$. Das dazugehörige primitive pythagoreische Tripel ist $(3,4,5)$, hier mit dem Faktor 27 gestreckt. Aus $(y+x)(y-x) = 108^2$ und $y + x = 162$ erhält man $y - x = 72$ und daraus $x = 45$ und $y = 117$.

Sieht man sich die Längen der Seiten genauer an, stellt man fest, dass sie allesamt durch 3 teilbar sind. Teilt man alle Seitenlängen durch 3, ergeben sich die Zahlen $17, 25, 31, 41, 49, 61, 71$. Alle diese Zahlen finden sich in der Tabelle 1 der Lösungen der Gleichung $a^2 + b^2 = 2c^2$. Entsprechende Zahlen für Trapeze der zweiten Art tauchen übrigens in einem ähnlichen Zusammenhang auf der Keilschrifttafel TMS 23 (sh. [9]) auf.

Der Aufgabensteller hat also seine Komposition dreier Babylonischer Trapeze der ersten Art so modifiziert, dass sich das Trapez derart in zwei rechtwinklige Dreiecke und ein Rechteck zerlegen lässt, dass die Hypotenusen der rechtwinkligen Dreiecke (also die nicht parallelen Seiten des Trapezes) ebenfalls ganzzahlig werden.

Die bisherigen Kommentatoren der Aufgabe waren sich im Wesentlichen einig darüber, dass der Aufgabentext korrumpiert und unvollständig sein muss, da Angaben über das Verhältnis der Flächen fehlen. Vielleicht ging es aber nur darum, die Babylonischen Trapeze wiederzuerkennen, die in der Aufgabe versteckt waren. Die mitgelieferte “Lösung” der Aufgabe aus kassitischer Zeit ist jedenfalls unsinnig: mit Formeln, die schon aus Dimensionsgründen falsch sein müssen, werden die Lösungen berechnet, die wohl in der ursprünglichen Aufgabe mitgeliefert worden waren.

7. Die Keilschrifttafel VAT 8512

Das folgende Problem, bei dem es um die Teilung eines rechtwinkligen dreieckigen Grundstücks geht, wird in [19, S. 340ff], [13], [15], [4] und [22, S. 80ff] besprochen. Tafeln der Reihe VAT werden im Vorderasiatischen Museum in Berlin aufbewahrt (Exzellente Photographien sehr vieler Keilschrifttafeln findet man im digitalen Archiv [6]; VAT 8512 etwa ist auf der Webseite `https://cdli.ucla.edu/dl/photo/P254947_d.jpg` abgebildet.

Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck mit Grundseite $e = 30$; weiter ist bekannt, dass sich die Höhen von Dreieck und Trapez um $d = u - v = 20$ unterscheiden, und dass die Differenz ihrer Flächen gleich $D = A_1 - A_2 =$

420 ist. Gesucht ist die Länge x der Transversalen, die beiden Höhen u und v, und die dazugehörigen Flächen. Die vorgerechnete Lösung besteht darin, die Unbekannte x gemäß der Formel

$$x = \sqrt{\frac{1}{2}\Big[\Big(\frac{D}{d}+e\Big)^2 + \Big(\frac{D}{d}\Big)^2\Big]} - \frac{D}{d}$$

zu bestimmen.

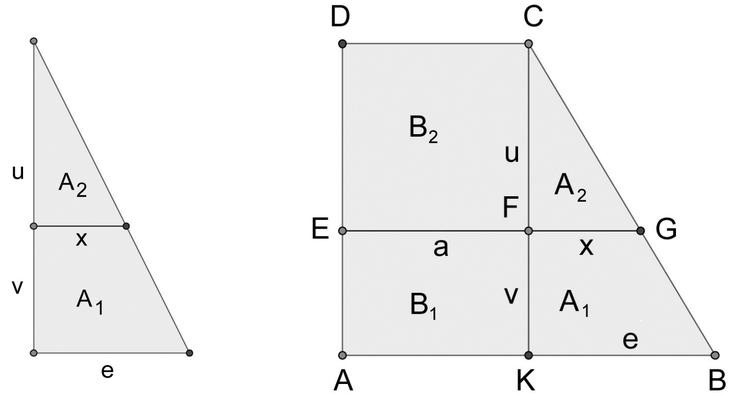


Abbildung 9: Teilung eines rechtwinkligen Dreiecks auf VAT 8512

Um die angegebene Lösung des Problems zu überprüfen sind die unbekannten Größen aus dem Gleichungssystem

$$\frac{x+e}{2}\cdot v - \frac{xu}{2} = D, \quad u - v = d, \quad \text{und} \quad u : x = v : (e-x)$$

zu bestimmen. Setzen wir $u = d + v$ in die beiden andern Gleichungen ein, so erhalten wir

$$\frac{x+e}{2}\cdot v - \frac{x(d+v)}{2} = D, \quad \text{und} \quad \frac{d+v}{x} = \frac{v}{e-x}.$$

Damit erhalten wir die beiden Gleichungen

$$ev = dx + 2D \quad \text{und} \quad e(v+d) = x(d+2v),$$

und Elimination von v führt auf die quadratische Gleichung in x:

$$2dx^2 + 4Dx - e(2D+ed) = 0.$$

Division durch $2d$ ergibt

$$x^2 + 2\cdot\frac{D}{d}x - \frac{2eD+e^2d}{2d} = 0.$$

Quadratische Ergänzung liefert nun

$$\Big(x+\frac{D}{d}\Big)^2 = \frac{2eD+e^2d}{2d} + \frac{D^2}{d^2} = \frac{e^2d^2+2edD+2D^2}{2d^2} = \frac{(ed+D)^2+D^2}{2d^2} = \frac{1}{2}\Big[\Big(\frac{D}{d}+e\Big)^2 + \Big(\frac{D}{d}\Big)^2\Big].$$

Nach Wurzelziehen erhalten wir genau den Ausdruck, der die babylonischen Rechnungen erklärt. Mit $d = 20$, $e = 30$ und $D = 420$ folgt daraus die Lösung $x = 18$, und dies liefert dann $u = 60$ und $v = 40$, sowie die Flächen $A_1 = 960$ und $A_2 = 540$.

Es ist nicht vorstellbar, dass die Babylonier so oder so ähnlich vorgegangen sind, auch wenn Neugebauer dies nahegelegt hat; es bleibt also noch zu klären, wie die Babylonier auf ihren Ansatz gekommen sind.

Die Grundidee ist ebenso einfach wie verblüffend: Man legt ein Rechteck neben das Dreieck, sodass die Verlängerung der Transversalen das Rechteck in Teilrechtecke der Flächen B_1 und B_2 teilt, und zwar so, dass die Differenz der Teilflächen $B_1 - B_2 = A_2 - A_1$ ist. Dann ist aber $A_1 + B_1 = A_2 + B_2$, die Transversale halbiert die entstehenden Trapeze, und man kann den Hauptsatz der Trapezhalbierung auf das Problem anwenden.

Wegen $B_2 = au$ und $B_1 = av$ ist $B_2 - B_1 = a(u - v) = ad$; aus $B_2 - B_1 = A_1 - A_2 = D$ folgt also $a = \frac{D}{d}$. Aus dem Hauptsatz der Trapezhalbierung folgt jetzt mit $b = a + x$ und $c = a + e$ die Gleichung $2b^2 = a^2 + c^2$, also

$$x = \sqrt{\frac{c^2 + a^2}{2}} - a = \sqrt{\frac{1}{2}\Big[\Big(\frac{D}{d} + e\Big)^2 + \Big(\frac{D}{d}\Big)^2\Big]} - \frac{D}{d},$$

und zwar dieses Mal mit minimalem algebraischen Aufwand.

Der Schlüssel zum Verständnis dieser Keilschrifttafel war die Beobachtung, dass bei der Lösung die Wurzel aus dem Mittelwert zweier Quadrate gezogen wurde, was einen Hinweis auf die Verwendung der Trapezhalbierung gab. Gelöst wurde dieses Rätsel um die auf VAT 8521 benutzte Technik von Peter Huber [15].

8. Eins geht noch ...

Eine weitere Klasse von Erbschaftsproblemen im Zusammenhang mit Trapezen kennen wir von der altbabylonischen Tafel VAT 7531. Im ersten Problem dieser Aufgabensammlung (siehe Friberg [11, S. 48ff]) geht es um ein trapezförmiges Grundstück, das unter drei Brüdern so aufgeteilt werden soll, dass die Trennlinien senkrecht auf die beiden parallelen Seiten stehen und jeder Bruder gleich viel bekommt.

Die beiden parallelen Seiten des Trapezes haben die Längen $a = 155\frac{5}{6}$ und $c = 114\frac{1}{6}$, die beiden schrägen Seiten haben Länge $b = 41\frac{2}{3}$ bzw. $d = 50$.

Entfernt man das mittlere Rechteck aus der linken Figur in Abb. 10, so bleibt ein Dreieck übrig, das wegen $a - c = b = 41\frac{2}{3}$ gleichschenklig ist. Die Höhe auf d zerteilt das Dreieck in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke mit der Katheten $\frac{d}{2} = 25$ und $b = 41\frac{2}{3}$; daraus erhält man die Höhe auf d zu $h_d = \sqrt{b^2 - \frac{d^2}{4}} = \frac{100}{3}$. Die beiden kongruenten Dreiecke sind also das mit dem Faktor $\frac{25}{3}$ gestreckte rechtwinklige Dreieck mit den Seiten $(3, 4, 5)$.

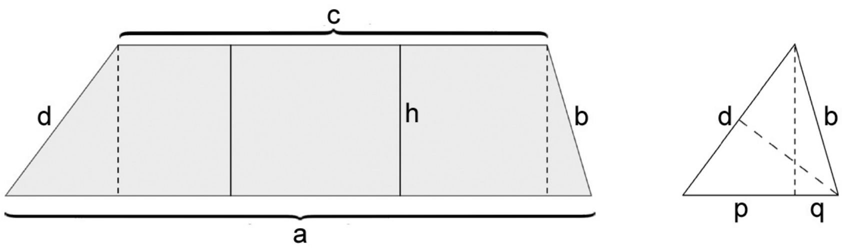


Abbildung 10: Trapezteilung auf VAT 7531

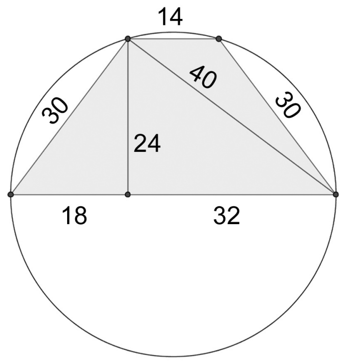
Über die Flächengleichheit $\frac{1}{2} \cdot d \cdot h_d = \frac{1}{2} \cdot (p + q) \cdot h$ erhält man also $h = 40$. Daraus folgen dann mit dem Satz des Pythagoras die Abschnitte p und q, und die Aufteilung des Trapezes ist kein Problem mehr.

Aufgabe 9. *Führe die Rechnungen der Trapezteilung auf VAT 7531 #1 zu Ende.*

Dreiecke, die aus zwei rechtwinkligen Dreiecken mit rationalen Seiten zusammengeklebt sind, haben rationale Seiten und rationale Höhen; man nennt sie nach dem alexandinischen Mathematiker und Ingenieur Heron 1. Jahdt. n.Chr.) *Heronische Dreiecke*.

Eine ähnliche Komposition rechtwinkliger Dreiecke findet man auf der Tafel VAT 7848 ([11, S. 343ff]), das aus der seleukidischen Ära stammt, also aus einer Zeit kommt, in welcher die Griechen bereits den Großteil ihrer mathematischen Glanzleistungen erbracht hatten. Auf dieser Tafel geht es um ein gleichseitiges Trapez mit parallelen Seiten $a = 50$ und $c = 14$, sowie den beiden andern Seiten $b = d = 30$.

Aufgabe 10. *Bestimme mit der üblichen babylonischen Methode die Höhe des Rechtecks und die Katheten der beiden rechtwinkligen Dreiecke, aus denen das Trapez besteht.*



Man findet $p = q = 18$, sowie $h = 24$. Man hat also das Teildreieck des Trapezes durch Strecken des rechtwinkligen Dreiecks $(3,4,5)$ konstruiert. Berechnet man die Diagonale des Trapezes, so stellt man fest, dass mehr hinter dieser unscheinbaren Aufgabe steckt als auf den ersten Blick sichtbar ist: auch die Diagonale ist ganzzahlig! Der altbabylonische Lehrmeister hat also das rechtwinklige Dreieck $(3,4,5)$ einmal mit dem Faktor 6, dann mit dem Faktor 8 gestreckt, entlang der Seite $h = 24$ verklebt, und das entstehende Dreieck zu einem Trapez ergänzt.

Aufgabe 11. *Zeige, dass der Umkreisradius des Trapezes ebenfalls ganzzahlig ist und mit dem pythagoreischen Tripel* $(7,24,25)$ *zu tun hat. Gibt es eine unendliche Familie derartiger Trapeze?*

Der Umkreisradius 25 (und die zum entsprechenden rechtwinkligen Dreieck gehörige Kathete der Länge 7) sind die beiden einzigen Strecken, deren Länge keine gerade Zahl ist. Hätte deren Berechnung nicht zum ursprünglichen Problem gehört, hätte man alle Seitenlängen problemlos halbieren können.

Dass die Babylonier den Begriff des Umkreises eines Dreiecks gekannt haben, beweist die Tafel TMS 1 (vgl. [11, S. 42]), auf welcher der Umkreisradius des gleichseitigen Dreiecks mit den Seiten 50, 50 und 60 berechnet wird.

Aufgabe 12. *Löse dieses babylonische Problem durch Einzeichnen des Umkreisradius und die dazugehörige Zerlegung des Dreiecks in rechtwinklige Teildreiecke. Wie haben die Babylonier dieses Problem konstruiert?*

Sollten die babylonischen Mathematiker den Umkreisradius des rechtwinkligen Dreiecks mit den Seiten 30, 40 und 50 tatsächlich ausgerechnet haben, dann kann ihnen kaum entgangen sein, dass der Mittelpunkt des Umkreises hier in der Mitte der Hypotenuse liegt. Dies wird erklärt durch den Satz des Thales.

9. Warum Trapeze?

Wenn man sich näher mit der Mathematik aus vergangenen Jahrtausenden beschäftigt, dann kommt es regelmäßig vor, dass man aus dem Staunen über die intellektuellen Leistungen der antiken Autoren nicht mehr herauskommt. Es ist fast unmöglich, Euklid (über dessen Mathematik gibt es viele Bücher, ein empfehlenswertes ist das von Benno Artmann [2], weil es über die Geometrie der Elemente hinausgeht), Archimedes (dessen Werk ich über das schöne Büchlein [23] kennengelernt habe) oder Diophant (einen ersten Einblick kann man sich in [3] verschaffen, wenn auch manche von Bashmakovas historischen Bemerkungen zweifelhafter Natur sind) zu studieren, ohne dem Charme dieser Art von Mathematik zu verfallen. Vielleicht ist es mir gelungen, einigen Lesern auch die Hochachtung vor den babylonischen Errungenschaften auf dem Gebiet der diophantischen Analysis nahezubringen, die normalerweise für die alten Griechen reserviert ist. Wie groß der Einfluss der babylonischen Lehrmeister auf die Entwicklung der griechischen Mathematik gewesen ist, wird sich wohl nie mit Bestimmtheit sagen lassen. Sicherlich haben die Griechen keine babylonischen Keilschrifttafeln studiert – vielmehr haben sie wiederholt behauptet, sie hätten ihre Geometrie von den Ägyptern (und, weniger oft, aber doch mehrfach, auch von den Babyloniern) gelernt. Dass ägyptische Schreiber in den zwei Jahrtausenden vor Christus Zugang zu babylonischem Material gehabt haben, ist nicht auszuschließen; wie erhaltene Briefwechsel zwischen Herrschern in Mesopotamien und Ägypten zeigen, gab es zumindest zeitweise Dolmetscher in Ägypten, welche die Keilschrift lesen und schreiben konnten. Die Möglichkeit, dass ein Transfer einer gewissen "Problemtradition" aus dem mesopotamischen Raum in die griechische (und vielleicht auch indische) Welt stattgefunden hat, lässt sich wohl kaum mehr ausschließen. In diesem letzten Abschnitt will ich einige Bemerkungen anfügen, die ebenfalls in diese Richtung weisen.

Es stellt sich nämlich die Frage, warum flächengleiche Teilungen auf den Keilschrifttafeln zwar für Trapeze, nicht aber für die einfacheren rechtwinkligen Dreiecke gemacht wurden. Nun ist ein Dreieck der Grenzfall eines Trapezes, bei man man eine Seite $a \to 0$ gehen lässt. Die Länge b der flächenhalbierenden Transversale eines Dreiecks mit Grundseite c genügt daher der Gleichung $c^2 = 2b^2$, die bekanntlich in natürlichen (oder positiven rationalen) Zahlen wegen der Irrationalität von $\sqrt{2}$ nicht lösbar ist.

Es wäre verwunderlich, wenn sich kein babylonischer Schreiber jemals mit der Frage nach der Halbierung eines rechtwinkligen Dreiecks beschäftigt hätte. Diese Aufgabe führt, wie wir gesehen haben, sofort auf die folgende: ist ein Quadrat der Fläche 2 gegeben, kann man dann die Länge s seiner Kante im Sexagesimalsystem darstellen? Es ist nicht bekannt, ob sich die Babylonier diese Frage in diesem Zusammenhang je gestellt haben; wir wissen allerdings, dass die Babylonier nicht nur in der Lage waren, Approximationen von $\sqrt{2}$ zu berechnen, sondern dass sie das auch getan haben: auf der Keilschrifttafel YBC 7289 ([22, S. 99ff], [11, S.397]) finden wir die Näherung

$$1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3}$$

für $\sqrt{2}$; umgerechnet in unser Dezimalsystem ergibt sich

$$\sqrt{2} \approx 1,414213.$$

In praktisch allen Aufgaben, in welchen Approximationen auftauchen, waren die Babylonier mit weitaus weniger genauen Näherungen zufrieden. So benutzten sie fast durchgehend den Wert $\pi = 3$ bei Kreisberechnungen oder die Näherung $\sqrt{3} \approx \frac{7}{4}$ im Zusammenhang mit regelmäßigen Drei- und Sechsecken. Warum also das Interesse an einer extrem genauen Approximation von $\sqrt{2}$? Der einzige plausible Grund, der mir hier einfällt, ist das Interesse an der Frage, ob $\sqrt{2}$ eine Darstellung als endlicher Sexagesimalbruch besitzt.

Nach allem, was wir wissen, wurde die Frage der Rationalität von $\sqrt{2}$ erst von den Griechen beantwortet, und zwar negativ: es gibt keine “rationale” Zahl s mit $s^2 = 2$. Allerdings war auch die Verdopplung des Quadrats, das Thema des Dialogs zwischen Sokrates und einem Sklaven Menons (vgl. [18]), bereits den Babyloniern bekannt, wie die Keilschrifttafel BM 15285 (vgl. [19, S.137ff] und [11, S. 127]) beweist.

Ob und in welchem Umfang die babylonische Mathematik die griechische beeinflusst hat, ist sehr schwer zu beantworten. Wer sich dafür interessiert, wird in den Büchern von Friberg [11, 12] viele Hinweise finden, die auf einen deutlichen Einfluss hinweisen. Auf kulturellem Gebiet finden sich ähnliche Andeutungen bei Burkert [5].

10. Anwendungen in der Astronomie

Das hier vorgestellte Material war Grundlage meines Vortrags über babylonische Mathematik auf dem 19. Forum für Begabungsförderung in Mathematik im März 2016 in Soest. Im Januar davor war eine Meldung durch die überregionale Presse gegangen, wonach Mathieu Ossendrijver von der HU Berlin entdeckt hatte, dass den Babyloniern die Position Jupiters mit Hilfe der Bestimmung der Fläche unter einem Zeit-Geschwindigkeits-Graph berechnet hätten. Schlüssel zu dieser Erkenntnis war die Beobachtung, dass die Rechnungen auf einer Keilschrifttafel nahelegten, dass es hierbei um eine Trapezhalbierung ging. Im Netz existieren Dutzende von Artikeln (siehe etwa Ossendrijvers Homepage [21]), aus denen man mehr über die Hintergründe dieser Berechnung finden kann.

Ton, Steine, und Scherben der heutigen Bildungspolitik

Die Ausbilder der babylonischen Schreiber haben eine ganze Reihe von erstaunlichen Aufgaben entwickelt, die nur auf den ersten Blick “realitätsnah” sind. Obwohl diese Rechenaufgaben der Ausbildung von Verwaltern und Schreibern dienten, gehören diese vielmehr der abstrakten Mathematik an und sind Vorboten von Problemen, wie sie etwa zwei Jahrtausende später Diophant in seinen Büchern der Arithmetik behandelt.

Etwas verkürzt und pointiert könnte man durchaus sagen, dass die Zahlentheorie, genauer die diophantische

Analysis, ihren Ursprung fachdidaktischen Überlegungen verdankt. Inzwischen hat die Didaktik andere Methoden gefunden, Schüler vom Nutzen der Mathematik zu überzeugen. Um dem Leser zu ermöglichen, sich ein Bild vom Fortschritt auf diesem Gebiet zu machen, sei hier eine Aufgabe angehängt, wie sie die Jünger des Modellierens heute für zeitgemäß halten:

> *Forscher untersuchten in einem Experiment die Temperatur, bei der sich Menschen wohl fühlen. Der Prozentsatz y von Probanden, die sich bei der Temperatur x (in Grad Fahrenheit) wohl fühlten, kann durch die quadratische Funktion* $y = -3.678x^2 + 527.3x - 18807$ *modelliert werden.*
>
> *a) Skizziere einen Graph der Funktion.*
>
> *b) Bei welcher Temperatur fühlten sich die größte Prozentzahl der Probanden wohl?*

Hier ist zu erwähnen, dass die Lösung dieser "Mathematik"-Aufgabe darin besteht, die Gleichung in einen graphikfähigen Taschenrechner einzutippen, das Schaubild abzumalen, und die Maximumstaste zu drücken. Man erhält dann als Antwort die Temperatur, die der Wissenschaftler im Experiment bestimmt und der Mathematiker in der quadratischen Funktion versteckt hat.

Leider scheint es sehr schwer zu sein, die durch empirische Didaktik und Bildungsforschung verdrängte Fachdidaktik wieder auf das Niveau anzuheben, das sie vor 4000 Jahren besessen hat.

Literatur

[1] R.C. Archibald (Hrsg.), *Euclid's book on division of figures*, Cambridge 1915

[2] B. Artmann, *Euclid. The Creation of Mathematics*, Springer-Verlag 1999

[3] I.G. Bashmakova, *Diophant und diophantische Gleichungen*, Birkhäuser 1974

[4] L. Brack-Bernsen, O. Schmidt, *Bisectable trapezia in Babylonian mathematics*, Centaurus **33** (1990), 1–38

[5] W. Burkert, *Die Griechen und der Orient*, C.H. Beck, 2004; s. S.

[6] Cuneiform Digital Library Initiative, `https://cdli.ucla.edu/`

[7] A. Czwalina (Hrsg.), *Arithmetik des Diophantos aus Alexandria*, Göttingen 1952

[8] A. M. Fraedrich, *Der Satz des Pythagoras*, B.I. Mannheim 1994

[9] J. Friberg, *Geometric division problems, quadratic equations, and recursive geometric algorithms in Mesopotamian mathematics*, Arch. Hist. Ex. Sci. **68** (2014), 1–34

[10] J. Friberg, *A remarkable collection of Babylonian mathematical texts*, Springer-Verlag 2007

[11] J. Friberg, *Amazing Traces of a Babylonian Origin in Greek Mathematics*, World Scientific 2007

[12] J. Friberg, *Unexpected Links between Egyptian and Babylonian Mathematics*, World Scientific 2005

[13] S. Gandz, *Studies in Babylonian Mathematics I: Indeterminate Analysis in Babylonian Mathematics*, Osiris **8** (1948), 12–40

[14] J. Høyrup, *Lengths, widths, surfaces. A portrait of Old Babylonian algebra and its kin*, Springer-Verlag 2002

[15] P. Huber, *Zu einem mathematischen Keilschrifttext*, Isis **46** (1955), 104–106

[16] J. Jareño, *Trapezi Mesopotámia*, `https://www.geogebra.org/m/1161163`

[17] J. Lehmann, *So rechneten Ägypter und Babylonier*, Urania Verlag 1994

[18] F. Lemmermeyer, *Mathematik à la Carte. Elementargeometrie an Quadratwurzeln mit einigen geschichtlichen Bemerkungen*, Springer Spektrum 2015

[19] O. Neugebauer, *Mathematische Keilschrift-Texte*, Springer-Verlag 1935; Reprint Springer-Verlag 1973

[20] O. Neugebauer, A. Sachs, *Mathematical Cuneiform Texts*, Amer. Oriental Soc. 1945

[21] M. Ossendrijver, `http://amor.cms.hu-berlin.de/~ossendrm/cuneiform.html`

[22] P.S. Rudman, *The Babylonian Theorem. The mathematical journey to Pythagoras and Euclid*, New York 2010

[23] S. Stein, *Archimedes. What did he do besides cry Eureka?*, MAA 1999

[24] F. Swetz, *Similarity vs. the "In-and-out-complementary principle": A cultural faux pas*, Mathematics Magazine **85** (2012), 3–11

Anschrift des Autors

Franz Lemmermeyer
Mörikeweg 1
73489 Jagstzell
hb3@ix.urz.uni-heidelberg.de

Die Lösungen der Aufgaben erscheinen in der nächsten Ausgabe der Mathematikinformation.

Eingereicht am 19.11.2017