
Dr. Karlhorst Meyer

Über das Miteinander von Abbildungs- und Figurengeometrie ¹⁾

Die Schule hat offenbar die Axiomatisierungswelle überstanden. Der Drang zur Axiomatik war auch im Fach Geometrie zu beobachten, wengleich hier die reine Form der Axiomatik, wie man sie etwa in früheren Darstellungen von A.KIRSCH [3] u.a. analog zu HILBERT [2] findet, sich nur selten hat durchsetzen können. Viel stärker fällt ein anderer grundlagentypischer Extremfall in den Lehrbüchern der jüngsten Vergangenheit auf, der auf eine Forderung von F.KLEIN zurückgeht: Im Hinblick auf die unterschiedlichen Transformationsgruppen solle man in der Geometrie vor allem Invariante studieren, was vor allem unter dem Namen "Erlanger Programm" bekannt wurde.

I. Zur derzeitigen Situation der Schulgeometrie:

Auf der Dortmunder Bundestagung 1980 hat der Autor [4] bereits versucht, historische Hintergründe aufzuzeigen, die zur Abbildungsgeometrie der Schule führten: Die Abbildungsgeometrie, vor allem im Bereich der zentrischen Streckungen, entstand aus Grundlagenerkenntnissen, deren Bedeutung für den Schulunterricht wohl nicht den Stellenwert annahm, den man ihr ursprünglich zuschrieb.

Feststeht, daß heute an den Gymnasien eine sehr starke Bewegung zu beobachten ist, die wieder "zur guten alten Figurengeometrie" zurückkehren will, weil sie wohl mit Recht bemängelt, daß die Abbildungsgeometrie, trotz all ihrer Systematik, unsere Schule hat nicht besser werden lassen.

Zwei in Bayern praktizierende Didaktiker seien mit noch unveröffentlichten Arbeitspapieren zitiert:

F.BARTH schreibt in seinem Artikel "Abbildungsgeometrie oder Figurenlehre": "Die Geometrie ist ins Zwielficht geraten. 2000 Jahre lang gehörte sie zu den unverzichtbaren und bei vielen Lernenden recht beliebten Gegenständen der Mathematik. Heute ist sie an den Universitäten auf dem Rückzug begriffen, und auch an der Schule wird sie mehr und mehr ins Abseits gedrängt. Die Algebra überwuchert die Geometrie mehr oder weniger auffällig. In der Oberstufe ist es die Lineare Algebra, die den Platz einnimmt, und in der Mittelstufe haben die weitgehend algebraischen Überlegungen der Abbildungsgeometrie vieles verdrängt, was früher selbstverständlicher Bestandteil des geometrischen Wissens war. Die Inhalte der Abbildungsgeometrie mußten bei gleichbleibender (eher verringerter) Stundenzahl in den Geometrie-stoff mit aufgenommen werden. Das geht natürlich nur, wenn entweder anderer Stoff gekürzt oder die Einübungsphasen verringert werden. Beides (vor allem das zweite) ist geschehen. Der Effekt ist nicht sehr erfreulich:

Das verfügbare geometrische Wissen ist deutlich geringer geworden. Die geometrischen Fertigkeiten sind auf primitive Reste reduziert. Die durch die Abbildungen erhoffte systematische Zusammenschau bleibt aus; Geometrie stellt sich für den Durchschnittsschüler als unübersichtliche Landschaft von mathematischen Fakten dar"

¹⁾ Manuskript des gleichnamigen Vortrags, der am 4.3.82 auf der Bundestagung für Mathematikdidaktik an der Universität Klagenfurt gehalten wurde.

Auf der Seite der Abbildungsgeometer wäre vor allem KRATZ zu nennen, der sich bis auf jüngste Äußerungen stets als Verfechter dieser Richtung zeigte. ANDRASCHKO aus dem Abbildungslager schreibt in einem ebenfalls noch unveröffentlichten Papier:

"Woran liegt es wohl, daß der Abbildungsgedanke heutzutage so stark betont wird? Wir müssen zunächst sehen, daß diese Veränderung in der Betrachtungsweise nicht auf die Geometrie beschränkt ist. In vielen Wissenschaften versucht man durch Herausarbeiten allgemeiner Prinzipien Methoden zu entwickeln, mit denen die ungeheure Ansammlung von Wissen und Erkenntnis faßbar wird. Eines dieser allgemeinen Prinzipien ist die Abbildung."

Gerade beim letzten Zitat zeigt sich sehr deutlich das ordnende Prinzip der Abbildungsgeometer, was eben leider, wie BARTH feststellt, an der Schule nicht so weit vorangetrieben werden konnte, um dort damit interessante Probleme zu lösen. Übrigens habe ich auf Grund meiner 17-jährigen Universitätstätigkeit im Grundlagenbereich den Eindruck gewonnen, daß auch an der Universität dieses Ziel nicht erreicht wurde: Der BOURBAKismus hat zwar die Mathematik sauberer, logisch einwandfrei gemacht, sie aber dabei weder durchsichtiger noch übersichtlicher werden lassen. Der Anwendungsbereich konnte durch den BOURBAKismus nicht erweitert werden.

Die Schulmathematik erscheint selbst dem nur durchschnittlich begabten Schüler so lange als nicht übermäßig schwer, als er nicht selbst Probleme lösen muß. Dies trifft in verstärktem Maße für die Geometrie zu: Ganz gleich, ob es sich um den Beweis eines einfachen Satzes oder um das Auffinden eines Konstruktionsweges geht, der Schüler scheitert meist daran, daß er den zweiten oder dritten Schritt nicht sieht oder daß er zu wenige Einfälle hat.

Schließlich waren es ja gerade solche Beobachtungen, die Schulmeister veranlaßten, dankbar ein neues, in sich geschlossenes, logisch geordnetes Gebäude, eben die Abbildungsgeometrie, aufzunehmen.

Nur leider waren die Abbildungsgeometer so sehr von den Erfolgen der Grundlagenforschung beeindruckt, daß sie nur diese an der Schule mit geringem Erfolg kopierten, weil auch dieses Verfahren nicht ausreichte, die für unsere Schüler interessanten und adäquaten Probleme leichter zu lösen.

So sollten wir zwar an den Ausgangspunkt der abbildungsgeometrischen Entwicklung zurückkehren, eben zur alten Figurengeometrie, aber nicht dem Fehler verfallen, dafür die für die Schule präparierte Abbildungsgeometrie als Ganzes über Bord zu werfen. Es reicht auch in der Geometrie völlig, wenn wir wieder an der Schule die unnötigen Formalismen beseitigen, die durch das Mißverständnis, das ich neuerdings den *didaktischen Bourbakismus* nenne, hineingekommen sind.

Wenn im folgenden gezeigt wird, wie man abbildungsgeometrische Inhalte mit Problemen der sogenannten Figurengeometrie verknüpfen kann, ja unzertrennbar verknüpft sind, so muß bereits jetzt schon betont werden, daß all diese Vorschläge am Gymnasium ohne Lehrplanänderung realisiert werden können.

II. Die Schulung des inneren Auges:

Vom Basteln her haben 10-jährige im Anwenden von Bewegungen eine große Erfahrung. Sie wissen: Probieren ist besser als Studieren. Oder exakter: Einem 10-jährigen ist oft klar, daß durch Drehen, Wenden oder Spiegeln gefunden werden kann, ob z.B. Teile zu einem Ganzen zusammengefügt werden können.

So ist es alten Universitätsgeometern stets klar gewesen, daß sich bei geometrischen Zusammenhängen manch eine Gedankenlücke schließen läßt, wenn man sich nur kurz mit seinem Zirkel, Zeichendreieck, Bleistift usw. die Dinge dreidimensional vor Augen hält. Ich frage nur, warum wir nicht längst dieses *Spiele*n mit dem Zeichengerät systematisch lehren?

Schüler haben z.B. immer wieder mit der Vorstellung Schwierigkeiten, wenn beim Spiegeln sich der Drehsinn umkehrt. Dabei ist alles so einfach: Das Schülerpult erhält in der Mitte einen Kreidestrich, über dem sich die Schüler die Spiegelebene vorstellen; dann hält der linke Schüler einen Gegenstand auf seiner Seite und der rechte Schüler muß einen zweiten Gegenstand genau spiegelgeometrisch hierzu halten. Wir beginnen mit dem Spiegeln eines Punktes bis zum Spiegeln eines 60° -Zeichendreieckes. Übrigens wird so deutlich, daß die vielverbreiteten Geodreiecke auch Nachteile haben: Das Umdrehen des Drehsinnes beim Spiegeln kann man mit ihnen nicht demonstrieren.

Übungen dieser Art fließen in meinen Unterricht immer wieder ein. Ich habe so natürlich auch den Vorteil, daß ich laufend dreidimensionale Geometriebeispiele durchführen kann.

So werden durch Bewegungsgeometrie die Symmetrien von ebenen und räumlichen Konfigurationen festgestellt und der Einklang zwischen den scheinbar so sehr anfeindenden Methoden aufgezeigt.

Man überfordert jedoch 10 - 14-jährige, wenn man jetzt schon mit Systematik kommt und alles auf den in den Grundlagen so wichtigen Spiegelungsbegriff deduziert.

Es ist zwar sehr interessant, daß jede Drehung aus zwei Spiegelungen zusammengesetzt ist, und jede Spiegelungskette einer Länge größer drei verkürzt werden kann, aber beim Lösen der meisten praktischen Probleme nützt einem dies nichts. Ich komme hierauf gleich zurück. Auch wenn mir bekannt ist, daß jede Verkettung einer Drehung mit einer Translation eine Drehung ist, halte ich es trotzdem didaktisch vertretbar, unter Umständen von einer "Drehtranslation" zu sprechen.

Die eben erwähnten Freihandexperimente werden natürlich nicht nur mit den Händen ausgeführt. Ein wichtiges Lernziel hierbei ist, beim Schüler das innere, d.h. sein geistiges Auge, seine Vorstellungskraft so zu schulen, daß es in die Lage kommt, gewissermaßen vorauszusehen, wie man eventuell ein solches Experiment ausführen kann, zumindest aber die Möglichkeit eines solchen Experimentes im konkreten Fall ohne Fremdhilfe selbst erkennt. Das Endziel ist, das innere Auge des Schülers so zu schulen, daß es die Fähigkeit bekommt, Bewegungsabläufe und andere abbildungsgeometrische Vorgänge rein geistig ohne Konkretisierung am Objekt durchzuführen, um das Objekt figurengeometrisch zu bearbeiten. Dieses Lernziel wird nur von wenigen Menschen voll erreicht; es handelt sich bei ihnen oft um Konstrukteure, die am Reißbrett oder in der EDV-Anlage von ihnen selbst nie gesehene Abbildungsabläufe konstruieren, d.h. so vollkommen entwerfen, daß dann Handwerker Maschinen bauen können, die sich auch so bewegen, wie dies von ihren Konstrukteuren erdacht worden ist.

An der Schule wird hiervon nur wenig erreichbar sein, das dann aber durch feste Regeln für den Schüler abzusichern ist und vor allem für ihn anwendbar sein muß.

Die Figurenkongruenz ist ein Bewegungsbegriff; man wird ihn also nur

unter Zuhilfenahme von Bewegungen anwenden können; z.B.:

Der Geometrieunterricht wird für den Schüler schwierig, wenn er die ersten Kongruenzbeweise ohne Fremdhilfe fertigen soll. Jeder Lehrer weiß, daß bereits geringfügige Hilfestellungen meist ausreichen, um dem Schüler einen Beweisgedanken erkennen zu lassen, d.h. oft reicht aus, nur mit dem Finger auf einen Punkt zu zeigen, und dem Schüler "geht ein Licht auf". Das geht aber auch anders, wenn der Schüler abbildungsgeometrisch hinreichend geschult ist. Ich will dies an einem Beispiel erläutern:

Satz: Die Diagonalen eines Parallelogramms halbieren sich.

Der Schüler weiß, solche Beweise werden in ersten Linie mit dem Kongruenzbegriff geführt, dessen wichtigste Hilfssätze die über kongruente Dreiecke sind. Also beginnt er, an der Figur Dreiecke zu suchen, die sich durch Bewegungen ineinander überführen lassen. Ist das innere Auge des Schülers hinreichend vorgeschult, so erkennt es die 180° -Drehung um den Diagonalenschnittpunkt; der Schüler kann einen Beweis führen.

Das ist Bewegungsgeometrie! Wie man erkennt, spielt die Zerlegungsmöglichkeit der 180° -Drehung in zwei Spiegelungen mit aufeinander senkrechten Achsen wahrlich keine Rolle; das ist zwar grundlagentheoretisch bedeutsam, für die Anwendung aber meist belanglos.

Manchem von uns ist sicher das eben genannte Beispiel zu einfach, weil wir alle in solchen Dingen schon eine lange Schulung hinter uns haben. Wir können uns gar nicht mehr vorstellen, daß damit ein Anfänger Schwierigkeiten haben kann.

Die Schwierigkeiten des Anfängers werden zum Teil durch unseren Sehvorgang verursacht: Wir sehen nur im Bereich des sog. gelben Fleckes scharf. So sind wir laufend gezwungen, Figuren mit dem gelben Fleck abzutasten. Ein ungeschultes Gedächtnis vergißt sehr schnell und stellt so nötige Zusammenhänge zunächst nicht her. So werden auch viele optische Täuschungen verursacht (siehe [5] Seite 127 und folgende) denen wir uns bewußt nur dann entgegen stellen können, wenn unser Gehirn gesehene Teile in Gedanken mitnimmt, also abspeichert, und mit anderen Teilen der Figur vergleicht.

Ganz am Rande sei hier vermerkt, daß nur dann der Unterricht der genannten Art erfolgreich sein kann, wenn man sich die Mühe macht, möglichst *sorgfältig gezeichnete Überlegungsfiguren* zu verwenden. Figuren, die bestenfalls nur noch topologisch zur Wirklichkeit äquivalent sind, können keine Erkenntnis suggerieren. Beweisgedanken erkennen kann man nur, wenn man passende Einfälle hat, die einem nur eine halbwegs passende Figur eingeben kann (*Figurensuggestion*).

Welche didaktische Hilfen kann ich zur Schulung des inneren Auges anbieten:

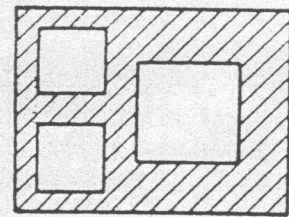
- a) die oben erwähnte, altbewährte Methode des *Spielens mit dem Zeichengerät*, wobei es zu begrüßen wäre, wenn die Schüler neben dem Geodreieck ein 60° -Zeichendreieck besäßen.
- b) Vor allem bei Rollvorgängen, auf die ich weiter unten noch ausführlicher zu sprechen kommen werde, hat sich der *Overheadprojektor* als Erzeuger von Schattenbildern bewährt. Es ist dabei durchaus nicht erforderlich, teures Lehrgerät zur Erzeugung von Rollabläufen zu kaufen; ganz im Gegenteil: Freihandversuche mit Geldstücken, einem Lineal usw. sichern einen größeren, bleibenden Lehrerfolg. Aber auch das Kinderspielzeug *Spirograph* kann im Overheadprojektor eine gute Demonstrationshilfe sein, wie man in [5] an vielen Stellen vorgeführt bekommt.

- c) Manches Beispiel kann man lösen, wenn man das Problem auf leichtere, d.h. bereits lösbare Grenz- oder Spezialfälle zurückführt. Siehe auch III.
- d) Wesentlicher Übungsbestandteil aber sind vor allem geeignete Aufgaben, die der Lehrer immer wieder in seinen Unterricht einfließen läßt, ohne die damit verbundene Lehrsituation all zu deutlich auszusprechen. Gerade aber die Aufgaben zur Schulung des inneren Auges zeigen hervorragend, daß die Abbildungsgeometrie nicht ohne Figurengeometrie und umgekehrt auskommt.

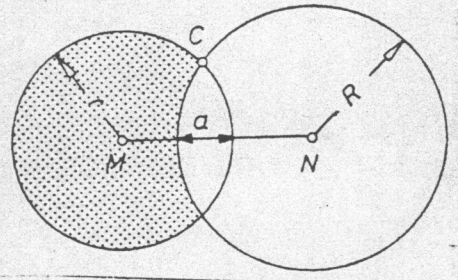
III. Aufgaben:

- 1.1 Eine ganze Aufgabengruppe hat BESUDEN [1] mit seiner Plättchengeometrie im Bereich von Pflasterungen so hervorragend erfaßt, daß nichts zu ergänzen ist. Hierbei geht es natürlich auch um das Zerschneiden und Zusammensetzen von Flächen und Volumina u.ä.
- 1.2 Aufgaben wie das "Eckenabschneiden", also z.B. die Zurückführung des Flächeninhaltes eines Fünfeckes auf den eines Viereckes mittels der Abbildung Scherung sollten reichlicher geübt werden. Vielleicht könnten so unsere Kollegiaten besser auf das Integrale berechnen vorbereitet werden.

- 1.3 Das Volumen eines Kaminteiles wird berechnet (siehe [5] Seite 198). Der Schüler muß erkennen, daß durch Bewegung drei Quader ergänzt werden können und sich dann ein bekanntes Volumen ergibt.

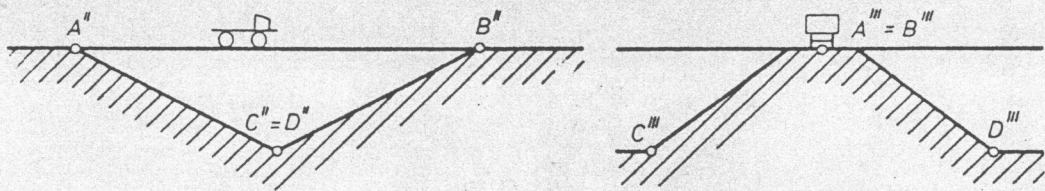


- 1.4 Ein Schieber ist zum Teil in einer Rohrleitung eingefahren; man berechne den Querschnitt, der vom Rohr noch freigegeben ist. (siehe [5] Seite 176).



Nur durch geeignetes Zerschneiden und wieder Zusammensetzen, also durch Anwenden von Bewegungen, die Teile hin- und herbewegen, kann man mit Hilfe der Kenntnisse einer 10. Jahrgangsstufe die schraffierte Fläche berechnen.

- 1.5 Die Abbildungsproblematik obiger Aufgaben auf höherem Niveau: Ein Damm wird über ein Tal gebaut; wie viele m^3 Schotter sind anzufahren (siehe [5] Seite 211).



Abgesehen von der Symmetrie der Aufgabenstellung, die die Berechnung etwas erleichtert, muß der Schüler sich genau überlegen, wie er jeweils Teile abschneidet, also in Gedanken wegtransportiert oder zu anderen Teilen ergänzt, damit er mit wenigen Rechenschritten, also mit hoher Genauigkeit das Volumen berechnen kann.

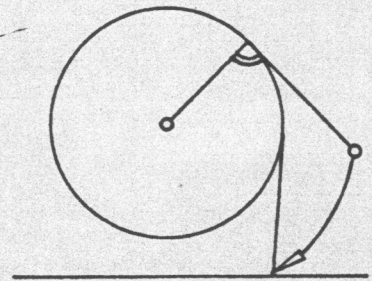
2. Die nächste Beispielgruppe könnte man das *Einspielen gewisser Konstruktionsgrößen* beim Fertigen von Zeichnungen nennen, d.h.: Durch eine Bewegung oder Abbildung kann eine Teilkonfiguration an die richtige Stelle einer Zeichnung gebracht werden, wobei die erforderliche Abbildung oft primär mit der Fragestellung nichts zu tun hat, also erst während der Konstruktion gefunden wird.

2.1 Zu dieser Aufgabengruppe gehört abgesehen von primitiven Beispielen des Strecken- und Winkelabtragens das zentrische Vergrößern und Verkleinern, das in jedem Geometrieunterrichtswerk geübt wird. Es bleibt unverständlich, weshalb es meist beim Einüben dieser Variante bleibt.

Das nächste Beispiel verdeutlicht, daß es primär keineswegs um eine charakteristische Eigenschaft zentrischer Streckungen geht:

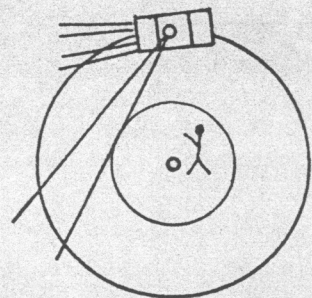
2.2 Gegeben ist ein Gaskessel durch seine Ausmaße so, daß nur noch durch Konstruktion festgestellt werden muß, wo seine Stützen vorgegebener Länge angeschweißt werden müssen.

Die Aufgabe wird so gelöst, daß man in Gedanken irgendwo die Stütze an den Kessel anschweißt und dank der Rotations-symmetrie des Kessels die Stütze über eine geeignete Drehung in ihre richtige Lage überführt (siehe [5] Seite 96).



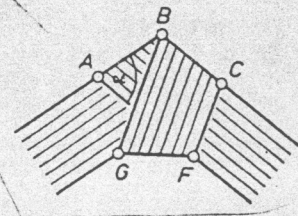
2.3 Zu dieser Gruppe von Aufgaben gehört ein Beispiel, das 10-jährigen viel Freude bereitet:

Ein in einem Kreis fahrendes Polizeiauto leuchtet mit einem starr angebrachten Scheinwerfer den Kreis aus und findet einen sich dort versteckenden nicht. Warum? (siehe [5] Seite 95).



2.4 Anspruchsvoll wird dieser Abschnitt bei Beweisen zu Faltsternen u.ä.

Will man sich überlegen, weshalb die nebenstehende Skizze eines verschlungenen Bandes ein reguläres Fünfeck ist, so muß man stark an die Bewegung seiner Entstehung denken (siehe [5] Seite 16 und 112).



2.5 Schließlich ist der Vorstellungskraft eines jeden eine Grenze gesetzt und man greift zu Hilfsmitteln, falls man solche kennt:

Vermutet man eine Lösungsmöglichkeit im Zusammenhang mit einer Bewegung, die das innere Auge nicht mehr überblicken kann, so ist es oft zweckmäßig, Teile der Konfiguration auf Transparentpapier zu zeichnen und umherzuschieben, bis man die Zusammenhänge erkennt. In [5] Seite 122 wird hierzu ein Beispiel der Astrogeodäsie schülergerecht beschrieben.

- 3. Gute Anwendungsbeispiele für die Bewegungsgeometrie, bei denen es nicht nur um einen Vergleich zwischen einer Ausgangs- und Endlage geht, geben *Rollkurven* aller Art, die in viel stärkerem Maße auch hinsichtlich der Parameterdarstellung von Funktionen und Relationen der Kollegstufe in den Schulunterricht einfließen sollten.

Verstehen kann man solche Rollvorgänge mit der sogenannten Abrollbedingung:

Zwei Kurven werden aneinander abrollen, d.h. schlupffrei wie Zahnräder (Spirograph!) aneinander sich bewegen, wenn jeweils die Bogenlängen, die der gemeinsame Berührungspunkt auf beiden Kurven zurücklegt, gleich sind.

Anwendungsbeispiele kann man für alle Altersstufen finden:

- 3.1 Gleichdicke (siehe [5]).
- 3.2 Kugellager und Planetengetriebe (siehe [5]).
- 3.3 Zykloide bis hin zum WANKELMotor mit seinem komplizierten Bewegungsablauf (siehe [5]) oder nur
- 3.4 ein einfaches Mitnehmerrad, das etwa beim Filmtransport eines Vorführgerätes aus der kontinuierlichen Bewegung des Motors eine diskontinuierliche Bewegung des Films macht (siehe [5] Seite 285)

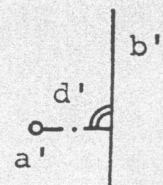
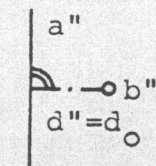
- 4. Auch in den Methoden der *Darstellenden Geometrie* sind viele abbildungsgeometrischen Vorgänge verborgen, die es wieder zu wecken gilt: Perspektive Affinität (Kreis-Ellipse, auch zur Erzeugung der wahren Größen einer in zwei Rissen gegebenen ebenen Figur), Drehen und Klappen von Neigungsdreiecken oder auch das Umprojizieren sind letztlich Abbildungen, in denen meist versucht wird, eine allgemeine Lage auf bekannte Spezialfälle zurückzuführen; z.B.:

Der windschiefe Abstand kann in den skizzierten Spezialfällen sofort angegeben werden; also wird man im allgemeinen Fall etwa durch Umprojizieren versuchen, den Fall auf die bekannte Speziallage zurückzuführen.

Gerade im Hinblick auf die Kollegstufe kann man das Mehrtafelverfahren als eine Abbildung im Sinne der Darstellungstheorie auffassen.

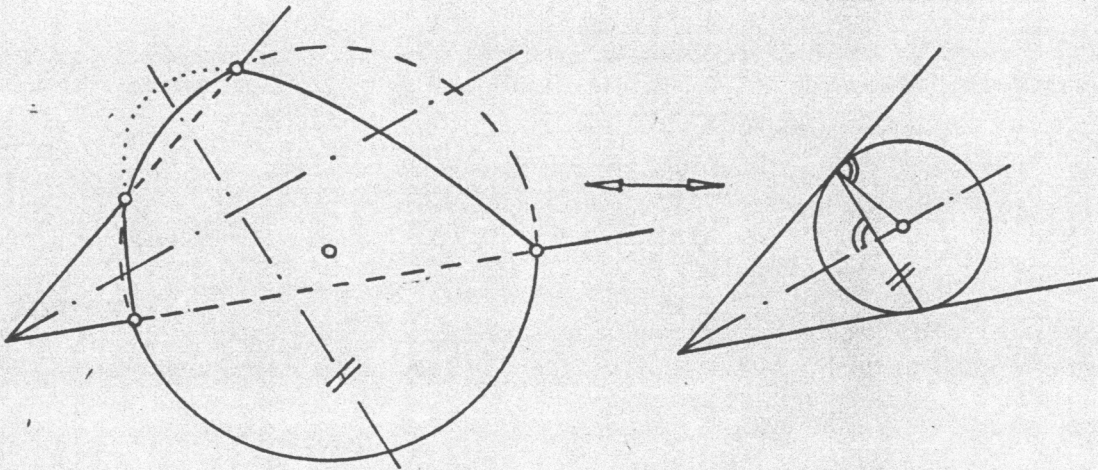
- 5. Zum Schluß will ich auf die Erzeugung von *Grenzfällen*, deren Lösung einfacher als eine gestellte Aufgabe ist, zu sprechen kommen:

Eine Methode, die sich in moderner Konstruktionstechnik bestens bewährte, beruht auf dem sogenannten *Aufblasen* oder *Schrumpfen lassen* von Teilen einer Figur. Genaueres folgt:

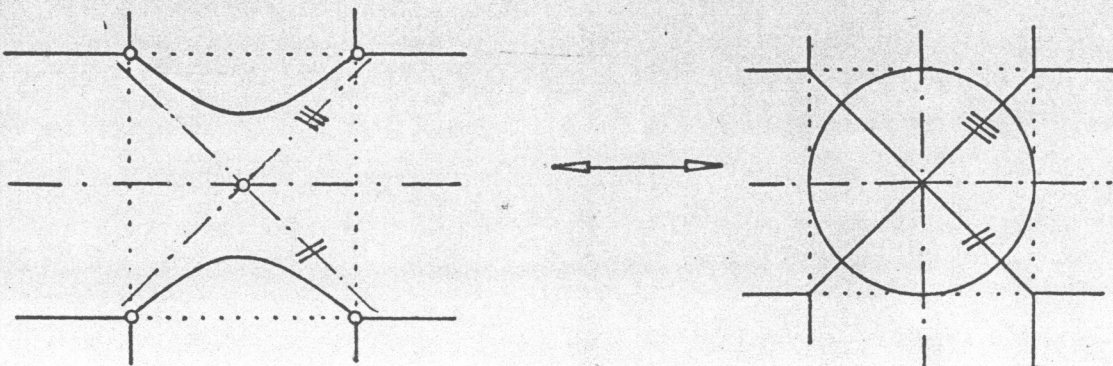


Kugel und Kreis haben imaginäre Fernpunkte, deren Lage vom Radius unabhängig ist; d.h. interessiert man sich nur für ein Fernpunktsverhalten einer Konfiguration (also z.B. interessiert man sich für eine Richtung), so darf man z.B. die Radien der beteiligten Kreise und Kugeln verändern, ohne das Fernpunktsverhalten zu stören. Der Beweis dieser Behauptung läßt sich mit projektiven Koordinaten im Rahmen der folgenden Beispiele leicht erbringen; trotzdem würde ich die allgemeine Sanktionierung dieser Behauptung am Gymnasium für überflüssig halten. Dort reicht es durchaus, wenn man gelegentlich ein "Aufblasbeispiel" bringt. Die Richtigkeit unseres Handelns läßt sich dann immer auch am Beispiel mit den erlernten elementaren Methoden bestätigen.

- 5.1 Schneidet man eine Kugel mit einem Kegel und liegen Kugel und Kegel symmetrisch zu einer Rißtafel, so ist der Riß der Verschneidungskurve stets Teil einer Parabel, weil durch Aufblasen die allgemein gelegene Kugel stets in den Spezialfall übergeführt werden kann, wo sie den Kegel längs eines Kreises berührt. Diesen Kreis sieht man im Riß als Strecke, also als Teil einer Geraden, die bekanntlich nur einen Fernpunkt hat; deshalb kann die Verschneidungskurve der Ausgangslage auch nur einen Fernpunkt haben. Man weiß, der Riß der Verschneidungskurve ist eine Kurve zweiter Ordnung. Unter allen Kurven zweiter Ordnung ist aber die Parabel die einzige mit genau einem Fernpunkt.



- 5.2 Genauso findet man: Schneiden sich zwei Zylinder so, daß die Zylinder symmetrisch zu einer Rißtafel liegen, so ist der Riß der Verschneidungskurve ein Teil einer Hyperbel, weil durch "Aufblasen" eines der Zylinder die linke Zeichnung in die rechte übergeht.

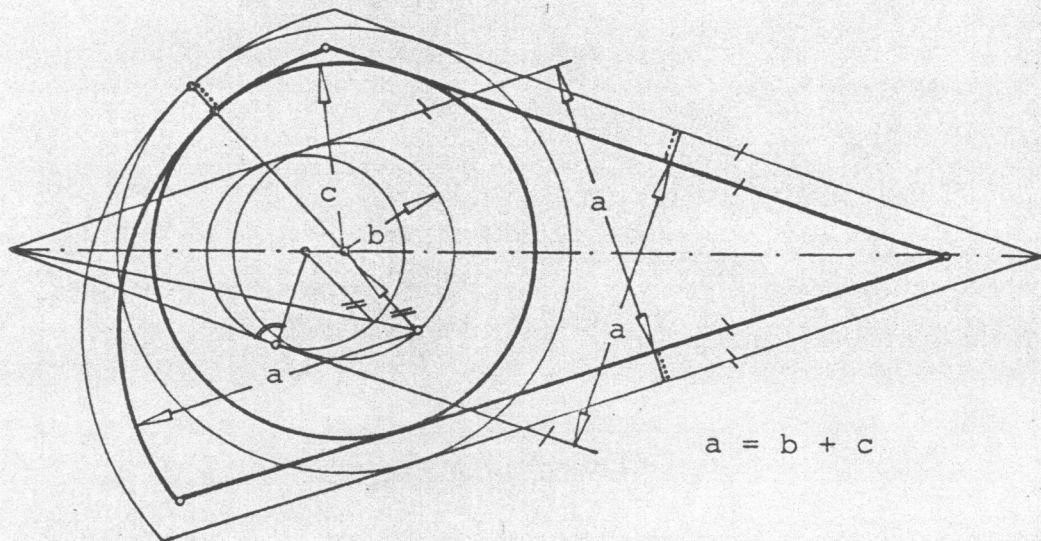


5.3 Das eben beschriebene Verfahren sollte sicher nicht an einer allgemeinbildenden Schule praktiziert werden; trotzdem gibt es Beispiele in jedem Geometrielehrbuch, wo in abgeschwächter Form die eben beschriebenen Zusammenhänge schon immer ausgeführt wurden:

Sucht man die gemeinsamen äußeren Tangenten zweier Kreise, so läßt man beide Kreise jeweils um den gleichen Betrag schrumpfen, bis der kleinere Kreis ein Punkt ist. Dann legt man von diesem Punkt die Tangenten an den verbliebenen Kreis und bläst wieder auf.

Unverständlich bleibt nur, weshalb es beim "normalen" Curriculum bei diesem einen Beispiel der allgemeinen Methode bleibt.

5.4 Will man den Inkreis eines Dreieckes bestehend aus zwei Strecken und einem Kreisbogen bestimmen, so scheint dies schier unmöglich. Wer Abbildungsgeometrie gelernt hat und gewohnt ist, an Figuren in Gedanken Teile zu verändern, kommt auf die Idee, unter Beibehaltung der Geradenrichtungen alles so lange schrumpfen zu lassen, bis aus dem Kreisbogen sein Mittelpunkt geworden ist. Dann läßt sich der "Inkreis", d.h. ein Kreis, der die beiden verbleibenden Seiten berührt und durch den Kreisbogenmittelpunkt geht, durch eine zentrische Streckung konstruieren. Schließlich wird alles wieder zur Ausgangslage aufgeblasen. Von den beiden möglichen Berührkreisen wird nur einer im Folgenden konstruiert.



Zur Verdeutlichung des Aufblasvorganges wurde außen um das Dreieck ein Dreieck als Parallelkurve gezeichnet, mit dem ein elementargeometrischer Beweis gefunden werden kann.

5.5 Jetzt kann man auch den Inkreis für ein Dreieck, das aus drei Kreisbögen gebildet wird, konstruieren: Durch stereographische Projektion führt man 5.5 auf 5.4 zurück.

Wie man insbesondere den angeführten Beispielen ansehen kann, ist es nicht möglich, angewandte Figurengeometrie ohne Abbildungsgeometrie zu betreiben.

Literatur:

- [1] Besuden, H.: Geometrie der Winkelplättchen, Klett Stuttgart 1975
- [2] Hilbert, D.: Grundlagen der Geometrie, Teubner Stuttgart 1962
- [3] Kirsch, A.: Ein didaktisch orientiertes Axiomensystem der Elementargeometrie, MNU, 25. Jahrgang Heft 3, 1972 Seite 139-146.
- [4] Meyer, Kh.: Schwierigkeiten mit dem Vierstreckensatz, Beiträge zum Mathematikunterricht 1980, Schroedel Hannover 1980, Seite 226.
- [5] Meyer, Kh.: Algebra und Geometrie, Anwendungsaufgaben im Mathematikunterricht, Hirschgraben Frankfurt/Main 1981

Anschrift des Autors:

Dr. Karlhorst Meyer
Kyffhäuserstraße 20
8014 Neubiberg
BR Deutschland