Karlhorst Meyer

Schon Knut Hamsun [1] schreibt 1928 in seinem Roman „Das letzte Kapitel“ von einem schwedischen Professor, der die Meinung hat, dass „Schulbücher zu groß und zu voll an Lehrstoff“ (Seite 291) seien. Der Schwede wird auf Seite 348 dahingehend zitiert: „Schule heißt, der Natur zuwiderhandeln, den Schüler auf ein Nebengleis zu schieben, das in einer ganz anderen Richtung läuft, Schule heißt, diesem Nebengleis geradeswegs in die Wüste hinein zu folgen.“ Siehe auch Seiten 340 bis 352.

Zum Überwinden der absoluten Kompetenzorientierung

Zusammenfassung: Mit einer Reihe von sehr einfachen bis komplexen Beispielen für die Jahrgangsstufen 5 mit 10 des Gymnasiums und adäquaten Schulen wird gezeigt, wie man frühzeitig das Begründen in der Mathematiklehre beginnen kann. Da es in der Mathematik keine allgemeine Theorie gibt, mit der man Lösungsstrategien und damit Beweise konstruieren kann, muss in einem gewissen Umfang anhand von Beispielen der Schülerin und dem Schüler auseinandergesetzt werden, wie beweisen „funktioniert“, um eine gewisse Kompetenz hierin zu vermitteln. Hierbei kann das Deduzieren als das wichtigste Verfahren beim Begründen nur eingesetzt werden, wenn auf bereits früher kennen gelerntes Wissen und Können zurückgegriffen (deduziert) werden kann (Kapitel 1 und 2). Theoretisch müsste es reichen, hierzu jeweils das entsprechende Axiomensystem zu lehren; aber hiermit wären selbst mathematische Genies überfordert, wenn nicht auf weitere Details zurückgegriffen werden kann. Schließlich wird in Kapitel 3 skizziert, dass es ohne Begründen keine Mathematik gibt, wobei die Frage „Was ist Mathematik?“ nur sehr unvollständig beantwortet werden kann.

Vorwort

„Gute“ Lehrer[1] überschritten schon immer gelegentlich den Lehrplan, wenngleich sie sicher damit verbundene Inhalte nicht Gegenstand ihrer Prüfungen werden ließen. Die Überschreitung geschah z. B. im Rahmen einer Binnendifferenzierung für ihre „guten“ Schüler aber auch manchmal für die Gesamtklasse. Die hierfür erforderliche Zeit ist heute vor allem deshalb vorhanden, weil alle Bundesländer ihre Lehrpläne stark reduziert haben. Durch ein Mehr an Mathematik kann Begeisterung entstehen, die hilft, das Verständnis für Mathematik anzuheben. Letzteres ist freilich nur möglich, wenn der Lehrer selbst von seinem Fach begeistert ist.

Im Folgenden geht es vor allem um den Geometrieunterricht. Weshalb ist immer wieder die Rede von der Anwendbarkeit der Mathematik? Die Kompetenzorientierung steht im Ruf, nur noch das heute Nützliche lehren zu wollen. Einmal ganz abgesehen davon, dass niemand voraussagen kann, ob das Heutige für zukünftige Anforderungen ausreichend sein wird, geht es im vorliegenden Artikel auch darum, dass die kompetenzorientierte Lehre ihre selbstgesteckten Ziele verfehlt. Teamwille der nächsten Generation anzuerziehen, ist sicher ein löbliches Ziel; Team-Bereitschaft ist aber nicht alles. In den Teams der Wirtschaft braucht man auch zukünftig Fachwissen und Fachkönnen und dies auch aus dem Bereich der Mathematik am Gymnasium. Sicher kann man als Unternehmer seine erforderlichen „Spezialisten“ – quasi in letzter Minute – durch Gewaltschulung auf hohem Niveau ausbilden (bilden wohl weniger) und so die Betriebsabhängigkeit fördern. Das widerspricht aber unseren Vorstellungen von Freiheit des demokratischen Bürgers. Man sollte ihm auch zukünftig die Möglichkeit zugestehen, sich aus einem Team zu lösen, um anschließend dank der eigenen Schulbildung etwas ganz anderes zu machen. Eine Welt allgemein Gebildeter versehen mit dem unterschiedlichsten Wissen ist die der Demokraten, auch wenn ein paar Spezialisten weltweit ausreichend wären.

[1] Man möge entschuldigen, dass im vorliegenden Artikel aus Vereinfachungsgründen meist nur die männliche Form verwendet wird.

So ist es unbestritten, dass in Informatik weltweit ganz wenige Sprachentwickler, in Japan einige Superschweißer für die Behälter von Kernreaktoren (man schickt u. U. deutschen Stahl nach Japan und dann den fertigen Behälter zurück – die Transportwirtschaft freut sich) ausreichen, dass in Japan die Besten in Blockdesign zur Konstruktion von Verbundsystemen ausgeliehen werden können usw. Trotzdem ist es gut, wenn sich weitere Menschen für diese Spezialberufe interessieren und u. U. so erfolgreich sind, die vorhandenen Profis durch neue Ideen zu übertreffen.

Man möge beachten, die im Folgenden hervorgehobenen benutzten Inhalte hinsichtlich **Können** und **Wissen** sind abhängig von der gewählten Strategie. Selbstverständlich gibt es auch andere Strategien, die die gestellten Probleme lösen; diese werden u. U. andere Lerninhalte voraussetzen. In Fußnoten werden für Niedersachsen (NS) und Bayern (By) Bezüge zu den bestehenden Lehrplänen hergestellt. Natürlich könnten entsprechende Angaben für weitere Bundesländer gemacht werden. Die Ausarbeitung der einzelnen Beispiele ist eine Empfehlung und muss nicht in jedem Fall vollständig vorgenommen werden.

1. Vom Konstruieren zum Beweisen – auch im Zeitalter der Computer

1.1 Gleichheit von geradlinig begrenzten Flächen in der Ebene

Will man allmählich ein Gefühl für ein Flächenmaß aufbauen, so spielt sicher eine Rolle: „Wann sind Flächen gleich groß, auch wenn sie verschiedene Formen haben?" Hierzu gab es früher ein Standardbeispiel, das sehr geschickt Stoff aus Vorklassen wiederholte – was heute besonders angestrebt wird –, vor allem aber verschiedenen Unterrichtsinhalten im Nachhinein zu einer übergeordneten Erkenntnis führen, heute würde man dies vermutlich eine Kompetenz nennen:
Klasse 4: Rechtwinklige Dreiecke haben einen Flächeninhalt, der die Hälfte des Inhalts eines dazu gehörigen Rechtecks hat.
Klasse 7: Aus der Kongruenz zweier Dreiecke findet man, dass obiger Satz für beliebige Dreiecke bzw. dazugehöriger Parallelogramme gilt.
Klasse 9: Im Höhensatz bzw. Satz des EUKLID erfährt man eine Möglichkeit, konstruktiv die Flächengleichheit zwischen Rechteck und Quadrat zu untersuchen. Dann kam im Unterricht das folgende Beispiel:

Beispiel 1.1.1 (Klasse 9): Betrachten wir ein beliebiges Viereck und suchen ein hierzu flächengleiches Quadrat[2].

Der klassische Weg „Eckenabschneiden" geht aus von:
Wissen 1: Dreiecksflächen mit der gleichen Grundlinie und der hierzu gehörigen gleichen Höhe sind flächengleich.
Wissen 2: Man kann das Viereck durch eine Diagonale in 2 Dreiecke zerlegen.
Können 1 (Erfahrung, inneres Auge): Man kann eines dieser Teildreiecke in ein anderes Dreieck flächengleich so „verwandeln", dass beide Teile zusammen *ein* Dreieck ergeben.
Wissen 3: Werden Flächen überschneidungsfrei aneinander gefügt („vereinigt"), so addieren sich ihre Flächeninhalte.
Wissen 4: Der Flächeninhalt eines Rechtecks.
Wissen 5: Das rechtwinklige Dreieck.
Können 2 (Erfahrung, inneres Auge): Man verwandelt das gefundene Dreieck in *ein geeignetes* rechtwinkliges Dreieck, das man dann in ein flächengleiches Rechteck verändert.
Wissen 6: Der Satz des EUKLID oder der Höhensatz. Man kann damit das gefundene Rechteck in ein flächengleiches Quadrat überführen.

Was hier „Können 1" und „Können 2" genannt wird, sind Kompetenzen, die bereits vorab erworben worden sind.

[2] Kernlehrplan 2006 NS Gy 3.2.3 Schuljahrgang 8, Lehrplan 2008 By Gy M9.5.2

Gegeben ist also das Viereck *ABCD*.

Insgesamt entsteht die folgende Konstruktion (siehe Abb.1):
1. *BD* ist eine Diagonale.
2.,3. Fläche *ABCD* = Fläche *AED*
4. Rechter Winkel in *A*
5. Fläche *AED* = Fläche *AEU*
6., 7. *F* ist Mitte von $\overline{AU}$. Also: Fläche *AEU* = Fläche *AEGF*
8. $\overline{HE}$ ist Hypotenuse des bei *A* rechtwinkligen Dreiecks *HKE*.
9. THALES-Kreis über $\overline{HE}$ um *M*. $\overline{AK}$ ist Höhe von *HKE*.
10. bis 13. Quadratkonstruktion: Fläche *AEGF* = Fläche *AKLN*

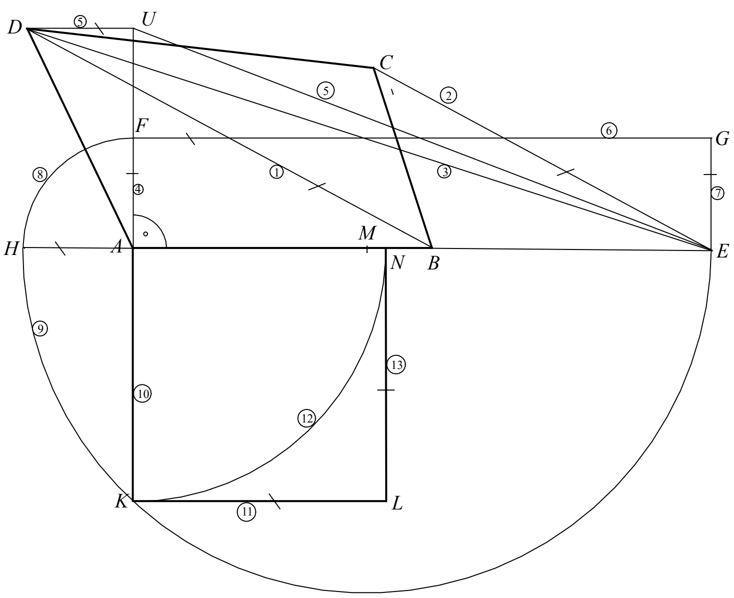

Abb. 1

Der Weg heute:

Gegeben sind als Zeichnung ein Viereck und ein Quadrat (siehe Abb. 2) mit den Flächenmaßen V und Q; dann heißt es: Was ist richtig: $V < Q$ oder $V = Q$ oder $V > Q$?

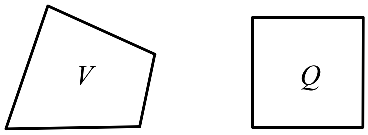

Abb. 2

Um diese Entscheidung zu treffen, muss man auch heute noch das Viereck in ein flächengleiches Quadrat verwandeln und dann dessen Kantenlänge mit der von Q vergleichen; deshalb lautet heute die Frage anders:

Welche der folgenden 3 Möglichkeiten kommt der Situation von Abb. 2 am nächsten[3]:

1) $V = 2Q$ 2) $V = 100$ ME und $Q = 105$ ME 3) $V = 100$ ME und $Q = 150$ ME

Kritik:

Man spricht heute mit den obigen Fragen *geschicktes Raten* an, auch die Erfahrung, eventuell auch einfaches Wissen und Können. Sicher ist auch das wichtig; aber man vergisst insbesondere am Gymnasium: „**Begründe deine Antwort**". Letzteres muss aber zumindest am Gymnasium und adäquaten Schulen an *vielen Beispielen* geübt werden, damit Schüler allmählich die Kunst des Beweisens bis zu einem gewissen Grad lernen. Dieser zunächst umständlich erscheinende Weg ist erforderlich, da es zum Finden mathematischer Beweise keine schuladäquate Theorie gibt, einmal abgesehen vom Widerspruchbeweis oder der vollständigen Induktion. Unterricht ohne Beweisen aber ist kein Mathematikunterricht (siehe Kapitel 3).

Man agiert heute anders als früher: Beim klassischen Weg spielen Können und Wissen eine viel zu große Rolle, deshalb verzichtet man auf obiges Beispiel. Überlegungen zur Flächengleichheit (und dann natürlich auch Volumengleichheit) entscheidet man lieber am Computer. Hierbei übersieht man, dass zwar Computer die Gleichheit näherungsweise, nicht aber exakt nachweisen können, was durchaus auch heute noch zumindest gelegentlich bedeutsam ist, einmal ganz abgesehen davon, dass das laufende Vorführen von Begründungen durch einen Lehrer dem Schüler allmählich Erfahrung und den Mut vermittelt, selbständig mit dem Beweisen zu beginnen. Aber solche *Kleinigkeiten* spielen bei zu vielen Lehrplanautoren keine Rolle mehr.

Und wenn man schon Obiges begründen muss, dann sucht man halt einfach das erforderliche Wissen und Können z. B. bei Google. Hierzu wurde vom Autor in die Suchmaschine „Flächengleichheit" eingegeben:

[3] ME bedeutet Maßeinheit

Man findet unter „Flächenlehre ohne Rechnen“ auf 9 Druckseiten eines Buches alles, was man hierzu braucht, wenngleich kein schuläquivalentes Übungsmaterial samt Lösungen zur Verfügung gestellt wird, was sich für einen Vierzehnjährigen als Nachteil erweist (Obiges Beispiel hat man früher in Klasse 9 gemacht.). Für 9 Druckseiten Stoff haben früher die Schüler in einer mit Begründen gut geübten Klasse 9 Doppelstunden benötigt. Ein Schüler heute wird diese 9 „Googleseiten“ gar nicht lesen, geschweige denn verstehen können, weil es ihm an Vorerfahrungen fehlt. Das scheint unwesentlich zu sein, da eine solche Information über Google ja nicht der Schüler sondern erst der Erwachsene vollziehen soll, wenn er solches braucht. Hier stellt sich die Frage: Wer hat denn heute schon etwa Ingenieure beim „Googlen“ beobachtet, wenn diese eine Schulzeit – und ein Studium – ohne einen beweisenden Mathematikunterricht erfahren haben?
Selbst wenn man eines Tages bei „Google“ solches Wissen und Können für einen Ungebildeten vielleicht besser aufbereitet finden wird, bleibt für ihn eine wesentliche Lücke: Er hat nicht gelernt, wie man für komplexe Probleme, die über Minimalstandards hinausgehen, eine Lösung findet. So wird er nicht einmal wissen, welches Wissen er bei Google suchen muss.
Dieses Beispiel zeigt also, dass der heute in vielen Lehrplänen angestrebte Weg jedenfalls später, etwa im Berufsleben, weitaus mehr Aufwand verursachen wird, wie vor der Lehrplanreform erforderlich gewesen ist. Die scheinbar praktizierte Kompetenzorientierung erreicht nicht ihr selbst gestecktes Ziel: Der Unterricht soll auf das im späteren Berufsleben erwartete Können ausgerichtet sein.

Man möge auch beachten: Das oben aufgezählte Wissen und Können kann der Schüler auch noch in anderem Zusammenhang innerhalb und außerhalb der Mathematik nutzen; d. h. das Sich-Aneignen von solchem Wissen und Können lohnt sich, weil hierdurch Arbeitszeit zum Suchen bei Google gespart wird, also Produktion billiger wird. Wenn auch das eine oder andere Detail in einem Kernlehrplan als Standard gefunden werden kann, reicht es nicht, bei solchen Standards stehen zu bleiben. Auch bei Kompetenzorientierung scheint mir pädagogisch bedeutsam, dass Schüler früher stets sehr befriedigt gewesen sind, wenn es ihnen nach einigen Versuchen gelungen ist, Abb. 1 fertigzustellen. Vor allem auch dann, wenn sie eine ästhetisch gelungene Anordnung der Gesamtzeichnung präsentieren konnten.

Schon GOETHE soll festgestellt haben, dass Mathematik keine Wissenschaft ist, da all ihre Details einfachste Trivialitäten sind. Auch er hat wohl nicht erkannt, dass die Kunst der Mathematik vor allem darin besteht, Wege zu finden, die es erlauben, komplexe Probleme auf solche Trivialitäten zurückzuführen und gleichzeitig den Weg exakt zu überprüfen. Da für das Finden solcher Wege bis heute kaum eine Theorie existiert, erhält man allein durch langes Üben allmählich *ein wenig* Kompetenz. Hierbei ist es nicht gleichgültig, in welcher Reihenfolge man sich das erforderliche Wissen und Können aneignet. Erst ein geschickter Lehrer wird in einem u. U. Jahrtausende alten Mathematik-Gebäude mit sanfter Hand den Schüler geeignet bilden können, ihn führen. So ist bei jedem Versuch, Änderungen an diesem Gebäude vorzunehmen, mit Bedacht zu prüfen, ob die Änderungen sich lohnen.

Einige Kollegen, denen das Manuskript gezeigt wurde, beanstandeten, dass dieses Beispiel zu schwer ist und nicht von allen ausgeführt werden kann und deshalb heute am Gymnasium unbrauchbar ist (also eine Feststellung, die unabhängig vom kompetenzorientierten Unterricht ist). Solche Lehrer übersehen, dass das Gymnasium eine Ausleseschule ist und deshalb stets eine Rolle spielt, wie viele der gestellten Aufgaben der einzelne Schüler bearbeiten kann, um auf diesem Weg eine transparente Auslese zu schaffen.

1.2 Herleitung und Nutzung eines Additionstheorems (Klasse 10?)

Heute:

An den Schulen werden zwar noch die trigonometrischen Funktionen auf $\mathbb{R}$ hinsichtlich ihrer Graphen gelehrt, doch kann man das sicher nicht mehr Trigonometrie nennen, auch wenn die Funktionen aus den Winkeln eines Dreiecks entwickelt werden. Vielen Studenten der Naturwissenschaften und des Ingenieurwesens entstehen hierdurch unnötig Probleme. Eigentlich hätte man die Abschaffung der Trigonometrie und der sphärischen

Trigonometrie allen einschlägigen Hochschuldozenten durch einen ministeriellen Erlass mitteilen müssen, damit sie diese erhebliche Lücke in der Bildung ihrer Studenten ausgleichen können.
Auch sollten Lehrplanmacher als Gebildete (immerhin haben sie alle noch einen recht gediegenen Trigonometrieunterricht genossen) wissen, ohne Additionstheoreme gibt es – abgesehen von trivialen Fällen – keine Lösungen von goniometrischen Gleichungen und ohne solche kann der Anwender viele Probleme nicht mathematisieren (siehe z. B. HEMME [1]).

Da man nicht alles wissen kann, darf z. B. der Ingenieurstudent in seinen schriftlichen Prüfungen Formelsammlungen beliebigen Umfangs jedoch kein Internet benutzen. Die Bezeichnung „**A**dditionstheorem“ führt dazu, dass damit etwa die Formel für sin x + sin y unauffindbar wird. Die Formelsammlungen sind meist nicht lexikographisch angeordnet, sondern bieten Einschlägiges unter Trigonometrie an, wodurch der Suchende gezwungen wird u. U. in 100 Seiten die passende Formel zu suchen. Dieses Verhalten ist beabsichtigt. Man will den Ingenieurstudenten zwingen, Wichtiges *auswendig zu lernen*, denn: In einem Notfall kann der Ingenieur nicht erst in seinem Büro via Internet oder Bibliothek suchen gehen, sondern muss vor Ort ad hoc Entscheidungen *aus dem Gedächtnis* heraus finden können, wenn es etwa darum geht, einen kochenden Reaktor der Chemie vor einer Explosion zu retten. **Wissen und Können sind deshalb für ihn lebensnotwendig. Hierzu ist auswendig lernen erforderlich,** mit dem man nicht erst in einem Studium beginnen kann.

Mit Internet ist die Suche einfacher. So hat der Autor am 13. 7. 2015 in die Suchmaschine „sin x + sin y“ eingegeben und vieles angeboten bekommen, was hier in der Reihenfolge von Google kommentiert wird:

1. „Additionstheoreme, ein Beweisversuch“: „factor sin x + sin y, ein Versuch zur Lösung…“ ohne Ergebnis.
2. „Beweisen Sie sin x + sin y =“, eine Bitte um einen Beweis.
3. „Integrale und Additionstheoreme“, eine Formelsammlung
4. „Lösung 7“: Man findet Lösungsvorschläge für das 7. Übungsblatt der Universität Karlsruhe WS 2008/9 usw.

Falsche Formeln fand ich bei dieser Suche nicht; leider waren sie stets ohne Beweis angegeben. Ganz anders war dies allerdings bei einer früheren Suche im Zusammenhang mit halbregulären Körpern; denn: **Ins Internet kann jeder alles stellen, auch wenn es falsch ist.**

Beispiel 1.2.1: Heutige Aufgabenstellungen:

Es sei $z = \sin x + \sin y$.	*Lösungen:*
a) Es sei $z = 2$; finde eine Lösung $(x \mid y)$.	$(x \mid y) = \left(\frac{\pi}{2} \mid \frac{\pi}{2}\right)$
b) Es sei $z = 1{,}5$. Gib zwei Lösungen an.	$(x \mid y) = \left(\frac{\pi}{2} \mid \frac{\pi}{6}\right)$, $(x \mid y) = \left(\frac{\pi}{6} \mid \frac{\pi}{2}\right)$
c) Gib ein Beispiel für z mit $\lvert z\rvert \leq 2$ an.	$(x \mid y) = \left(\frac{\pi}{6} \mid \frac{\pi}{6}\right)$

Die Fragen sind zwar auch nur mit Wissen zu beantworten; es handelt sich hier aber um sehr einfaches Wissen: Man muss nur die Schreibweisen verstehen und dem Taschenrechner einige spezielle Werte für den Sinus entnehmen.

Beispiel 1.2.2: Früher hätte man wie folgt gefragt[4]:

Es sei z = sin x + sin y.

a) *Weshalb* ist stets $\lvert z\rvert \leq 2$?
b) Es sei $z = 2$. Gib *alle* Lösungen an.
c) Es sei z = 1,5. Gib *alle* Lösungen an.
d) Es sei z = 1,5 und $x + y = \pi$. Finde *alle* Lösungen.
e) Verwandle z in ein Produkt und *begründe* deine Antwort.
f) *Begründe*, weshalb gilt für alle x: $\sin x + \sin\left(x + \frac{2}{3}\pi\right) + \sin\left(x + \frac{4}{3}\pi\right) = 0$
   Wie kann man diese Formel experimentell nutzen?

[4] Kernlehrplan 2006 NS Gy 3.2.4 Schuljahrgang 10? Lehrplan 2008 By Gy M10.2

Lösungen:
Zu a) **Wissen 1:** Dreiecksungleichung, Betrag des Sinus: $|z| \leq |\sin x| + |\sin y| \leq 1 + 1 = 2$ für reelle x und y.
Zu b) $z = 2$ kann nach a) nur erreicht werden, wenn gilt: $\sin x = \sin y = 1$ also $(x \,|\, y) \in (M \,|\, M)$ mit $M = \left\{u = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ für alle ganzen } k\right\}$. Hierzu ist erforderlich:
Wissen 1: Siehe a)
Wissen 2: Graph der Sinusfunktion.
Können 1: Mengentheoretische Schreibweisen. Man kann diese zwar vermeiden, wenn man statt der Mengenschreibweise einen sprachlichen Satz schreibt. Die mathematische Sprache aber wird deutlicher, wenn man Mengensymbolik verwendet. Deshalb wird sich der Lernende *allmählich* durch stetes Vorführen der Mengenschreibweise durch einen Lehrer ein diesbezügliches Können aneignen.

Zu c) Die Fragestellung ist für eine Binnendifferenzierung des Unterrichts gedacht, die man auch bei Kompetenzorientierung ausführen kann:
Wissen 2: Graph der Sinusfunktion; in der gehobenen Mittelstufe bekannt.
Wissen 3: Die Sinusfunktion hat keine Umkehrfunktion. Man kann aber die Umkehrbarkeit auf vielfältige Weise durch Einschränkung des Definitionsbereichs erzwingen und so den Arcussinus mit den unendlich verschiedenen Hauptwerten $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$ oder $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$ für alle ganzen k bekommen. Die Kenntnis des Normhauptwertes, wie ihn z. B. der Taschenrechner kennt, reicht nicht (vergleiche HEMME [1]).
Können 2: Umgang mit der Anordnung der reellen Zahlen ist ein Thema seit Klasse 1 und muss am Gymnasium ab Klasse 7 forciert und anschließend ihre Nutzung ausgebaut werden, was leider zu oft – auch hinsichtlich einer Binnendifferenzierung des Unterrichts – vergessen wird, weil darin viele Kolleginnen und Kollegen einen Eingriff in die gymnasiale Oberstufe sehen.
Können 3: Ganz analog muss der Unterricht – und dies nicht nur bei den begabteren Schülern – sich bemühen, die Anordnung hinsichtlich Intervallen der Zahlengeraden zu nutzen, wenn man Interesse hat, in der gymnasialen Oberstufe einen Hauch von Analysis zu erhalten. Ein Unterricht, der dies alles erst in der Oberstufe in Angriff nimmt, ist erfahrungsgemäß zum Scheitern verurteilt, wie dies auch bei zu vielen Studenten z. B. des Ingenieurwesens der Fall ist, die ihr betreffendes Mathematikstudium ohne einschlägige Vorkenntnisse aus dem Gymnasium beginnen.
Können 4: Auch der Analysisunterricht der Vorlesung „Höhere Mathematik" ist nicht in der Lage, bei den Studenten das eben genannte „Können 2" zu erzeugen, sondern auch dort erwartet man vom Studenten – wir hier vom Schüler - , dass er mit **Fantasie** aus dem Wenigen, das er gelernt hat, in der Lage ist, komplexe Situationen zu bewältigen. Hier zeigt sich, dass es offenbar schwer ist, solches Können auch in der Sprache der Kompetenzorientierung zu formulieren.
Wissen 4: Zusammenhang zwischen Grad- und Bogenmaß

Zur Lösung:
$z = 1{,}5$ stellt implizit eine Funktion $y = f(x)$ dar.
D. h. man sucht Lösungen $(x \,|\, y)$ mit $y = \arcsin(1{,}5 - \sin x)$, (1)
wobei für arcsin jeder mögliche Hauptwert (unendlich viele) genommen werden kann.
Da $|\sin x| \leq 1$ und $|\sin y| \leq 1$ stets gelten, kann man bei einer Summe 1,5 nur x und y mit $0{,}5 \leq |\sin x| \leq 1$ bzw. $0{,}5 \leq |\sin y| \leq 1$ gebrauchen. Der Abb. 3 entnimmt man x und y aus $\bigcup_{k \in Z}\left\{x: \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right\}$ für alle ganzen k, wobei (1) berücksichtigt wird.

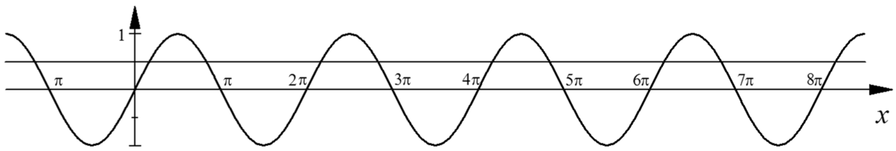

Abb. 3

Zu d) Nun kommt zur Problematik von c) noch die Gleichung $x + y = \pi$. (2)
Da nach c) auch $0{,}5 \le |\sin y| \le 1$ gelten muss, bekommt man für y ebenfalls Abb. 3. D. h. die Gültigkeit von (2) bedeutet in Abb. 3, ob es für den Sinuswert 0,5 in $\bigcup_{k\in Z}\left\{x: \frac{\pi}{6} + 2k\pi \le x \le \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right\}$ zwei Punkte gibt, deren Summe der x-Ordinate π ergibt. Man „sieht", das ist in jedem Teilintervall genau einmal möglich. Man kann das aber auch mit dem
Wissen 2 (Graph der Sinusfunktion; heute noch vorhanden) und
Wissen 5 (spezielle Anwendung des Wissens 2) algebraisch klären:
$\sin x + \sin y = \sin x + \sin(\pi - x) = 2\sin x = 1{,}5$ also $\sin x = \frac{1{,}5}{2} = 0{,}75$ und damit
$x = 0{,}84806207.. + 2k\pi$ und $y = \pi - x = 2{,}29353057.. + 2k\pi$ für alle ganzen k.

Zu e) Aufgaben dieser Art sollten eigentlich nur gestellt werden, wenn gleichzeitig angegeben wird, was an Kenntnissen vorausgesetzt werden kann, es sei denn, man will nur die entsprechende Formel aus dem **Wissen** abfragen, dann aber widerspricht diese Aufgabe *schon immer* den Absichten des Gymnasiums und nicht nur der Schule mit kompetenzorientiertem Unterricht. Sinnvoll wäre also
Wissen 6, die Benutzung der Additionstheoreme 1. Art ($\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ u. ä.), zu gestatten, wobei man also eine Herleitung aus den Theoremen oder eine Zurückführung auf diese Theoreme verlangt. Man findet diesen Weg in jedem älteren Lehrbuch der Trigonometrie.

Zu f) **Wissen 6:** Sinus-Additionstheorem
Wissen 7: Spezielle Werte von Sinus und Cosinus
Wissen 8: Umgang mit den Graphen von Sinus und Cosinus
Gibt man einfach die gegebene Formel in die Suchmaschine des Internets ein, so kann man Glück haben und eine Herleitung finden. In aller Regel wird man zwar die Formel finden, aber nicht ihre Herleitung. Man rechnet:

$$\sin x + \sin\left(x + \tfrac{2}{3}\pi\right) + \sin\left(x + \tfrac{4}{3}\pi\right) = \sin x + \sin x \cos\tfrac{2}{3}\pi + \cos x \sin\tfrac{2}{3}\pi + \sin x\ \cos\tfrac{4}{3}\pi + \cos x \sin\tfrac{4}{3}\pi =$$
$$= \sin x - \tfrac{1}{2}\sin x + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\cos x - \tfrac{1}{2}\sin x - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\cos x = 0$$

Zusatzfrage: **Wissen 9 zum Fächerübergriff der Physik oder Elektrotechnik:** Je zwei benachbarte Phasen des
Drehstroms sind um $\frac{2}{3}\pi$ versetzt. Schließt man alle drei Phasen – wie etwa bei der so genannten Sternschaltung
eines Trafos – kurz, so fließt an der Kurzschlussstelle kein Strom, weil keine Spannung vorhanden ist.

Kritik:

Der heute oft benutzte Teststil vermeidet gezielt Begründungen und Beweise bzw. Herleitungen aus Bekanntem. Dieser Stil prüft so Einzelwissen, obwohl Kompetenzorientierung die bloße Reproduktion von Wissen ablehnt.
Will man trotzdem wie in Beispiel 1.2.2 solche Begründungen abprüfen, ja den Schüler selbständig finden lassen – früher sprach man in diesem Zusammenhang von Transfer – und irgendwie doch modernen Fragestil praktizieren, kann man leicht Schwierigkeiten bekommen; siehe obige Frage c). Man muss also heute als Prüfer sehr aufpassen, damit man nicht plötzlich die Fähigkeiten seiner Gymnasiasten überfordert.
Auch hier zeigt sich deutlich, dass nicht einfach ein Curriculum mit einer langen Geschichte beiseitegelegt werden kann, ohne entweder fast inhaltslos zu werden oder Schüler sinnlosen pädagogischen Experimenten auszusetzen.
Der Einwand, man kann nicht alles wissen und/oder lehren, spielt keine Rolle, wenn es eine allgemein bekannte Tradition gibt, in deren Rahmen gehandelt wird. Setzt man sich aber über diese Tradition hinweg, wird damit insbesondere die Zusammenarbeit zwischen Gymnasium und Universität gestört:
Das Gymnasium muss wissen, was die Universität von ihm erwartet, wie auch die Universität zu berücksichtigen hat, wie und was das Gymnasium lehrt.
Jede Schulart wird nicht alles, was innerhalb ihrer Möglichkeiten an Mathematik vorhanden ist, lehren können, man kann aber stets die neue Mathematik am Bisherigen anknüpfen und das gilt auch für wissenschaftliche

Publikationen: Auch wenn monatlich ca. 20 000 Referenzen in den Reviews der American Mathematical Society zu finden sind, kann jede der Referenzen so abgefasst sein, dass jeder der angesprochenen Leser ausgehend von der üblichen Tradition zu der neuen Errungenschaft hingeführt werden kann.

Dass Kritikern, die außerhalb dieses bisher üblichen Zusammenspiels stehen, derartiges verborgen geblieben ist, kann nicht dazu führen, geradezu ohne Konzept Änderungen herbeizuführen, es sei denn, sie wollen die bisherige Wissenschaft Mathematik vernichten.

1.3 Dreieckskonstruktionen

Mathematisch ist es sinnlos, wenn man in manch einem neuen Lehrplan empfiehlt, nur einen der 4 Kongruenzsätze exemplarisch zu behandeln. Selbst nur einen der vier Sätze zu beweisen, wäre hinsichtlich der Fähigkeiten von 13-Jährigen fragwürdig, weil sie in aller Regel zu jung sind, um einen einmaligen Anlauf des diesbezüglichen Beweisverfahrens zu verinnerlichen.

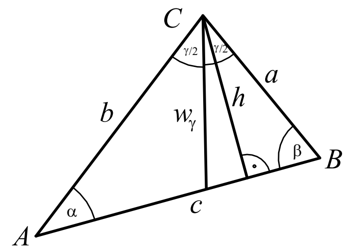

Abb: 4

Im Folgenden kommen vor allem bei den Aufgabenstellungen die genormten Stücke eines Dreiecks vor, wie sie in Abbildung 4 zu sehen sind.
h_c ist die Höhe durch die Ecke C, die auf der Seite c senkrecht steht usw.
w_γ ist die Winkelhalbierende, die den Innenwinkel γ halbiert usw.

Beispiel 1.3.1 (Klasse 7?)[5]: Konstruiere ein bei γ rechtwinkliges Dreieck mit den Höhen $h_c = 3{,}0$ cm und $h_a = 5{,}0$ cm und begründe die Konstruktion hinsichtlich Veränderung der Größen h_c und h_a.

Lösung:
Wissen 1: Im bei γ rechtwinkligen Dreieck gilt $h_a = b$.
Können 1: Der Schüler schätzt verschiedene Lösungsmöglichkeiten hinsichtlich der Anzahl ihrer Konstruktionsschritte ab, um eine möglichst kurze und damit möglichst genaue Lösung zu finden. Da es sich nicht lohnt, ihm hierzu eine passende systematische Theorie an die Hand zu geben, wird er lernen, sich in Gedanken vielleicht mit ein paar Skizzen zwischen verschiedenen Wegen zu entscheiden. Da in aller Regel mathematisch zu lösende Probleme nicht nur zu einer Strategie führen, spielen solche Entscheidungen fast immer eine Rolle. Dreieckskonstruktionen sind hierbei erste Beispiele, eine einschlägige Kompetenz zu erhalten. Leider muss festgestellt werden, dass kaum ein kompetenzorientierter Geometrielehrplan diese Kompetenz berücksichtigt.

1. Weg: Man beginnt mit dem rechten Winkel γ und trägt auf einem Schenkel $h_a = b$ ab.
Wissen 2: Da h_c auf c senkrecht steht, muss der Fußpunkt von h_c auf dem THALES-Kreis über h_a und auf dem Kreis $k(C, h_c)$ liegen.
Fall $h_c < h_a$: Das ist bei den vorliegenden Daten der Fall. Die beiden Kreise schneiden sich in 2 Punkten und erzeugen somit 2 Lösungen: diese sind kongruent.
Wissen 3: Man konstruiert bis auf Kongruenz.
Fall $h_c > h_a$: Es gibt keinen Schnittpunkt und damit keine Lösung.
Fall $h_c = h_a$: Die beiden Kreise berühren sich in A. Damit liegt B unendlich fern auf einer Senkrechten zu $h_a = b$. Eine Lösung kann man das nicht nennen.

2. Weg: Man beginnt mit $\gamma = 90^o$. Die Lösung entspricht dem 1. Weg.
3. Weg: Man beginnt mit h_c.

[5] Kernlehrplan 2006 NS Gy 3.2.3 Schuljahrgang 8, Lehrplan 2008 By Gy M7.5.3

Können 2: Der Schüler hat bereits die Erfahrung, dass dann C auf einer Parallelen zu c liegt. Man nimmt C auf einer der beiden Geraden beliebig an und schneidet die andere Gerade mit $k(C, h_a)$, was nur möglich ist, wenn gilt: $h_c < h_a$. Der Fall $h_c = h_a$ führt auch hier zu keinem „richtigen" Dreieck, da B Fernpunkt wird.

Kritik:

Richtet man seine Lehre nur an der Anwendbarkeit des Gelehrten aus, so besteht kein Zweifel, dass gerade die Dreieckskonstruktionen als Anwendung der Kongruenzsätze nur innermathematisch sind und deshalb in der modernen Lehre als „sinnlos" bezeichnet werden. Allzu leicht übersieht man, dass es keine Kongruenzsätze in der Viereckslehre trotz deren Anwendbarkeit gibt, da man ja die Kongruenzproblematik auf die der Dreiecke zurückführt. Hier kommt also eine Grundidee der Mathematik zum Tragen: Jedes Problem wird – wenn möglich – auf ein einfacheres zurückgeführt. Hat der Schüler bereits des Öfteren diese Grundidee erfahren, erhält er hierdurch u. U. eine **Kompetenz**, selbständig ein Problem über eine vereinfachende Zurückführung zu lösen.
Auch in der heutigen Zeit kann man nicht auf diese Grundidee der Mathematik im Unterricht verzichten, auch wenn man sie in Klasse 7, in der man auf die Kongruenzsätze zu sprechen kommt, noch nie explizit genannt hat und wohl auch nie nennen wird. Geht es doch nicht darum, eine Theorie aus dieser Grundidee zu machen, sondern sie einfach nur so oft wie möglich zu praktizieren.

Inwieweit die Unwissenheit der Lehrplanmacher hier eine Rolle spielt, soll zunächst nicht untersucht werden. Einiges hierzu wird in Kapitel 3 zu finden sein.

Es ist natürlich bekannt, dass zu keiner Zeit alle Lehrer mit den ersten Konstruktionsaufgaben von Dreiecken auch gleich obige Determinationen ins Spiel gebracht haben. Das muss auch nicht sein, wenngleich man durchaus zumindest die „besseren" Schüler sehr wohl bereits in Klasse 7 zu solchem veranlassen kann.

Beispiel 1.3.2 (Klasse 9?)[6]: Konstruiere ein Dreieck ABC aus den folgenden genormten (siehe Abb. 4) Stücken $k := b:a = 3:5$, Winkelhalbierende $w_\gamma = 4{,}0$ cm und Seite $c = 6{,}0$ cm. Kläre in einer eigenen Untersuchung, ob die Anzahl der Lösungen der Aufgabe sich verändert, wenn die Größen der gegebenen Stücke variiert werden.

Was braucht man zu einer Lösung?

Wissen 1: Die Winkelhalbierende w_γ teilt die Strecke c im Verhältnis der „anliegenden Seiten", also im Verhältnis k.
Wissen 2: Zu jeder Winkelhalbierenden w_γ eines Dreiecks gibt es eine so genannte äußere Winkelhalbierende w_γ'. Diese beiden stehen aufeinander senkrecht.
Wissen 3: Die beiden Winkelhalbierenden einer Dreiecksecke teilen die gegenüberliegende Seite c harmonisch, d. h. innen und außen im Verhältnis k (einmal abgesehen von einem Vorzeichen).
Wissen 4: Wie teilt man eine Strecke $\overline{AB}$ innen und außen im gleichen Verhältnis? Wie hängt die Lage der Teilungspunkte von k ab?
Wissen 5: Da die beiden Winkelhalbierenden aufeinander senkrecht stehen, liegt ihr Schnittpunkt auf dem THALES-Kreis, dessen Durchmesser die Strecke zwischen den Teilungspunkten ist.
Können 1: Es sieht so einfach aus. Zunächst spielt „nur" *ein* Können bei der Konstruktion eine Rolle: Die Anordnung der einzelnen Konstruktionsschritte auf dem Zeichenpapier. Dahinter steckt eine lange Erfahrung, die man nicht von allen Schülern einfordern kann. Diese Erfahrung zielt auf möglichst wenige Zeichenteile ab, um eine möglichst hohe Zeichengenauigkeit zu erzielen. Der Leser möge hier nicht die Bemerkung machen, im Zeitalter von CAD spiele dies alles keine Rolle mehr, weil auch das umständlichste CAD immer noch genau genug sei. Diese Aussage ist leider falsch, wie ein Insider berichtet, der auch das klassische Konstruieren noch kann; denn jeder Rechenschritt des Computers lässt die Genauigkeit dank laufenden Rundens des Rechners schrumpfen. Können 1 spielt also auch heute noch im PC-Zeitalter eine Rolle, wie weiter unten gezeigt wird. Dass erst Können 1 die Ästhetik der Zeichnung schafft, bewegt zunächst keinen Schüler, spielt wohl heute im Unterrichten auch eine sehr unbedeutende Rolle, hat aber die Zeichnen-Kultur über mehr als 2000 Jahre geprägt.

[6] anschließend an Kernlehrplan 2006 NS Gy 3.2.3 Schuljahrgang 10, Lehrplan 2008 By Gy M10.1.1?

Können 2 betrifft zwar nicht die Konstruktion, sondern „nur“ deren Dokumentation, damit der Konstrukteur selbst oder dann auch ein anderer „rekonstruieren“ kann, in welcher Reihenfolge die einzelnen Schritte ausgeführt worden sind. Die Rede ist also von der guten alten Konstruktionsbeschreibung. Ihre Abschaffung ist hinsichtlich moderner Anforderungen ein großer Fehler. Der Konstrukteur – ganz gleich ob es um das Fertigen einer Zeichnung oder um eine Berechnung im Computer geht – muss die Schritte seines Programms außerhalb desselben dokumentieren, denn erfahrungsgemäß werden auch Computersprachen „später“ unlesbar, wenn man sie nicht mehr praktiziert. Beispiel: Im Jahr 2000 beim Überschreiten der Jahrtausendgrenze hatte man Zeitprogramme, deren Programmiersprachen nicht mehr gelesen werden konnten. Man musste aber prüfen, ob alle Zeitprogramme mit zukünftig einer vorgestellten „2“ mitmachen, was sehr schwierig war, weil auch keine Dokumentationen der Programme vorhanden waren. Leider dokumentieren Informatiker, Ingenieure, Naturwissenschaftler sehr ungern, weil „man“ damit zu spät begonnen hat. Sicher ist es für Lehrer ein Gräuel gewesen, wenn sie bei ihren Schülern gelesen haben: „Ich steche in *M* ein und schlage einen Kreis.“ Hier hat die Einführung der Mengenschreibweise zwar ein gutes Übungsmaterial geschaffen, aber es geht beim Zeichnen auch anders, wie einige technische Hochschulen in ihrer Geometrievorlesung für Ingenieure gezeigt haben. Deshalb werden im Folgenden im Text Nummern erläutert, die man in der Zeichnung findet und die die Reihenfolge der Schritte festlegen (siehe Abb. 5 und auch Abb. 1).

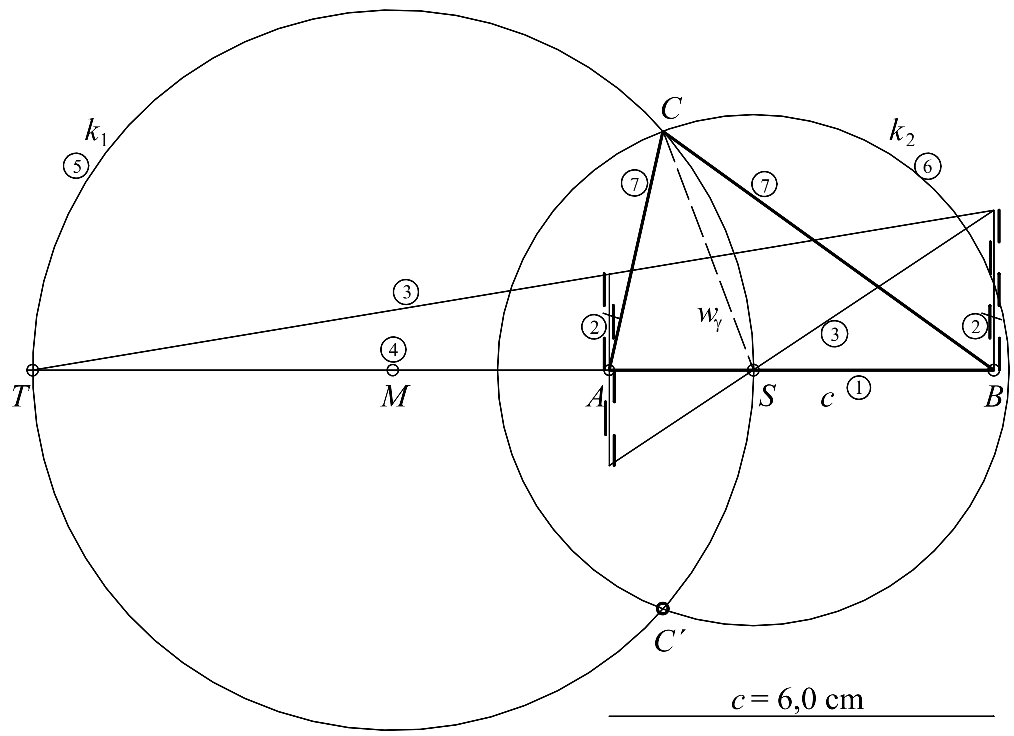

Abb. 5

Die selbstdokumentierende Zeichnung:

1. bis 7. legt die Reihenfolge der Konstruktionsschritte in Abb. 5 fest. Bei 2. ist jeweils angegeben, wie viele Strecken abgetragen werden müssen, bzw. dass zwei Geraden parallel sind (in der Zeichnung nicht notwendig senkrecht zu c). Die gestrichelte Linie w_γ müsste nicht gezeichnet werden.

Klassische Dokumentation (Konstruktionsbeschreibung zu Abb. 5):

1. Zeichne $c = |\overline{AB}| = 6{,}0$ cm.
2. Zeichne in *A* und *B* parallele Geraden, deren Richtung von *c* verschieden ist und trage in *B* nach oben und in *A* nach unten und oben 5 bzw. 3 Einheiten ab.
3. Verbinde die freien Endpunkte von 2. Die Verbindungsgeraden schneiden die Gerade von *c* in *S* bzw. *T*.

4. M sei die Mitte von $\overline{ST}$.
5. Zeichne den Kreis $k_1(M,r)$ durch S und T.
6. Zeichne den Kreis $k_2(S, w_\gamma)$. Die beiden Kreise schneiden sich in C und C'.
7. ABC ist das gesuchte Dreieck. Eigentlich wäre auch ABC' eine Lösung. ABC' ist aber kongruent zu ABC. Die beiden Dreiecke gehen durch Spiegelung an der Gerade zu c auseinander hervor.

Determination:

Die Zusatzfrage von Beispiel 1.3.1 bezieht sich auf die Determination.
Können 3: Es ist hierbei früher nicht nur um die Anzahl der Lösungen gegangen, sondern auch um einen Beweis, der zeigt, dass die vorgelegte Konstruktion auch das leistet, was man von ihr erwartet. D. h. eigentlich hat sich der Konstrukteur der Lösung letzteren Teil der Determination bereits vor und/oder während der Konstruktion überlegen müssen:

a) Kann man jede Strecke c innen und außen in jedem Verhältnis $k = \frac{|\overline{AS}|}{|\overline{BS}|} = \frac{|\overline{AT}|}{|\overline{BT}|} \geq 0$ teilen? Nein, das geht nicht uneingeschränkt; Randfälle sind:
Für $k = 0$ gilt $A = S = T$.
Für $k = \infty$ gilt $B = S = T$.
Für $k = 1$ ist zwar S die Mitte von $\overline{AB}$ und T der Fernpunkt der Geraden von c. Das alles impliziert Wissen 4.
D. h. der vorgegebene Wert $k = \frac{3}{5}$ lässt die oben vorgeführte „harmonische" Teilung zu. Ist $k = 1$, so ist das gesuchte Dreieck ABC gleichschenklig und die Winkelhalbierende auch Mittelsenkrechte. Die Konstruktion hierfür ist also kein Problem.

b) Da die beiden Winkelhalbierenden in C aufeinander senkrecht stehen, liegt C auf dem THALES-Kreis über $|ST|$, falls beide Punkte im Endlichen liegen.

c) Der Mittelpunkt von k_2 liegt auf k_1.
Fall $w_\gamma < |\overline{ST}|$: Es gibt stets 2 Lösungen, weil die Kreise sich schneiden. Die Kongruenz der beiden so entstehenden Dreiecke ist bereits oben angesprochen worden; man erwartet also vom Schüler
Wissen 6: Konstruktionsergebnisse sind gleichwertig, wenn sie kongruent sind.
Fall $w_\gamma \geq |\overline{ST}|$: Es gibt keine Lösung, da es keinen Schnittpunkt zwischen den Kreisen gibt.

d) Um die Lösbarkeit der Konstruktion belegen zu können, muss man $|\overline{ST}|$ als Funktion von c und k berechnen.
Aus $\frac{|\overline{AS}|}{|\overline{SB}|} = k$ folgt $k|\overline{SB}| = |\overline{AS}| = c - |\overline{SB}| = c - \frac{|\overline{AS}|}{k}$ und hieraus $|\overline{AS}| = \frac{c}{1+\frac{1}{k}} = \frac{ck}{1+k}$. (3)
Aus $\frac{|\overline{TA}|}{|\overline{TB}|} = k$ folgt $|\overline{TA}| = k|\overline{TB}| = k(|\overline{TA}| + c)$ und hieraus $|\overline{TA}| = \frac{ck}{1-k}$. (4)
Aus (3) und (4) folgt $|\overline{TS}| = |\overline{TA}| + |\overline{AS}| = \frac{ck}{1-k} + \frac{ck}{1+k} = \frac{2ck}{1-k^2} = 11{,}25 > 4{,}0$.
Im Beispiele 1.3.2 schneiden sich also die beiden Kreise in 2 Punkten C und C'.

Ganz gleich wie viel Können zukünftig Computer ohne Zutun eines Nutzers haben werden, wird es immer wieder Situationen geben, bei denen der Nutzer außerhalb des Rechners wird handeln müssen. D. h.: Auch in Zukunft wird im Bereich der ehemaligen Schulalgebra umfangreiches
Können 3 und
Wissen 7, das hier nicht genauer dargestellt ist, zum Einsatz vom Ingenieur und Naturwissenschaftler erwartet werden, was zweckmäßig die Schule im früheren Rahmen und nicht die Hochschule zu vermitteln hat.

Drei „Können" und sieben „Wissen" sind erforderlich. Kein Wunder, wenn der Lehrplanmacher geneigt ist, so viel im Lehrplan zu streichen, dass diese Aufgabe nicht mehr vorkommen kann. Und bekanntlich hat man ja das gesamte Umfeld um den Kreis des APOLLONIUS lange Zeit *vor* der Kompetenzorientierung nach und nach aus den Lehrplänen aller Bundesländer gestrichen, vorübergehend einige Jahre dann in Bayern nochmals praktiziert und dort Mitte der Neunziger abermals entfernt. Man hält eben von Bildung wenig, vor allem dann, wenn sie anstrengend wird und der Auslese dient. Man jammert zwar schon immer über die nicht ausreichend vorgebildeten Abiturienten, die man kaum als Studenten unterrichten könne, man jammert auch über die zu

vielen, die ein Studium anstreben; aber eine ernstzunehmende Untersuchung, warum das so ist, hat man stets als politisch nicht machbar abzulehnen verstanden.
Ganz außer Acht bleibt, dass gerade das Umfeld der Determination (abgeschafft etwa seit 1960 in allen Bundesländern) die Schüler zunächst via anschaulicher Geometrie an eine Kompetenz heranführt, die aber analog in allen Disziplinen der Mathematik benötigt wird, vor allem dort, wo die Mathematik forscht.

Kritik:

Dreieckskonstruktionen wurden einst wohl ein volles Schuljahr (Klasse 7) lang geübt. Man hatte viel Zeit, um bei den meisten Schülern ein Gefühl für die Sache zu erzeugen. Sie wussten, es müssen 3 Größen des Dreiecks bekannt sein, damit man eine Lösung finden kann, sie wussten nicht, warum das so ist. Hinsichtlich echter Anwendungen der Mathematik, die niemand damals forcierte, waren die Problemstellungen sinnlos.
Und doch hatten sie ihre Bedeutung: Auch bei diesen einfachen, anwendungstheoretisch unbedeutenden Fragestellungen musste aus dem bereits vorhandenen Können und Wissen eine Strategie aufgebaut werden. Es ging also gar nicht so sehr um Dreiecke; sie waren nur die ersten Konstruktionsbeispiele. Weitere Beispiele fand man dann im Folgejahr bei den Vierecken. Hier wurden dann Determination und Begründen ausgebaut. Echte Anwendungsaufgaben konnten jetzt bearbeitet werden.

Heute sollte man dies nicht alles im „Zeitalter des Computers“ beiseiteschieben. Konstruieren bezieht sich nicht nur aufs Zeichnen, sondern auch aufs Programmieren. Mit immer rascheren und größeren Maschinen glaubte man noch um 1975, alle Probleme möglichst primitiv, also ohne Wissen und Können, auf dem Computer zu lösen; heute aber weiß auch der Informatiker, dass es sich beim Programmieren vor allem von geometrischen Problemen lohnt, mehr Wissen und Können hineinzustecken, wenn es nicht schief gehen soll, d. h. u. a. ewig lange Rechnerzeiten eine Nutzung unmöglich machen. Zwei Beispiele:

- Um 1960 wurde der Flugverkehr über Deutschland während der Hauptflugzeiten (6 bis 8, 11 bis 13, 18 bis 20 Uhr) so dicht, dass man nicht mehr die Maschinen längs Geraden zwischen den Leuchtfeuern (deren Abstand zwischen 50 und 100 km lag) unterbringen konnte. Man musste in die Ebene gehen, d. h. die Triangulierung durch die Leuchtfeuer nutzen. Sicherheitsgründe verlangten dabei, dass ein Flugzeug ein benachbartes Dreieck der Triangulierung nur ansteuern konnte, wenn es unbelegt war. Ohne Wissen aus der Geometrie versuchte man, in einer lexikographischen Anordnung der Dreiecke das richtige zu finden. Damals stellte man fest, dass die Bordcomputer zu dieser Entscheidung ca. 30 Minuten benötigten, obwohl der Überflug eines Dreiecks höchstens 8 Minuten in Anspruch nahm. Trotzdem führte man diese Studie weiter, weil die betreffenden Entwickler überzeugt waren, dass die Bordcomputer bis zur Realisierung hinreichend schnell werden könnten. Die Stilllegung des Projekts war ein großes Verdienst des damaligen Bundesverkehrsministers SEEBOHM, da auch nach Fertigstellung der Studie die Bordcomputer immer noch zu langsam gewesen wären.
- Landet man in fremdem Gelände, so ist es günstig, via zweier Kameras beim Anflug (etwa am Mond) eine solche Karte aus einem Stereobild zu erzeugen, mit der dann der Computer den Anflugplatz festlegt. Dank des Gefühls des Piloten ARMSTRONG konnte die erste Mondlandung in letzter Minute durch Ausschalten der Automatik gerettet werden: Er setzte mit Handsteuerung über einen großen Stein hinweg und war gelandet. Hätte er die Automatik nicht ausgeschaltet (man hört im Film über die erste Mondlandung deutlich die Zornausbrüche in der Steuerzentrale in Houston, die mit dem Abschalten der Automatik nicht zufrieden war), wäre die Landefähre Eagle an diesem Stein zerschellt. Was war am Programm falsch? Man hatte allein durch Koordinaten das Stereobild erfasst und daraus die Karte entwickelt. Man vergaß, Geometrie zum Einsatz zu bringen und damit die Rechnerzeit zu verkürzen.

Es reicht nicht, erst bei Bedarf bei Google nach passender Geometrie zu suchen, wenn man u. U. gar nicht weiß, wonach man suchen soll. Man muss einfach Wissen und Können parat haben. Und was hierbei so benötigt wird, ist sehr wohl aus einer 2500jährigen Geometriegeschichte bekannt, auch kennt man seit langem den Weg, wie man darin ausbildet.

Das zeichnerische Konstruieren von 13-Jährigen hat gegenüber der Blackbox „Computer“ den Vorteil, dass der Schüler das Entstehen seiner Konstruktion erlebt und sich über seinen Erfolg freut.

2. Ohne Lernen von Wissen und Können keine Mathematik

Kapitel 1 beinhaltet doch nur Unfug, der wirklich nicht im Leben erforderlich ist. Was entsteht denn für ein Schaden, wenn der Schüler eben nicht die Erfahrung bekommt, dass man mit 3 gegebenen Stücken ein Dreieck festlegen kann, zudem ja hierzu nicht einmal 3 beliebige Stücke ausreichen, da es ja bekanntlich auch solche Vorgaben gibt, mit denen ein Dreieck allein mit Zirkel und Lineal nicht konstruiert werden kann (siehe HERTERICH K. [2]). Lassen wir doch dies alles weg. Hier werden nur innermathematische Erkenntnisse gepflegt, über die sich der Mathematiker – vielleicht der Ästhet – freut, die aber sonst keiner braucht. Will man ein Dreieck z. B. in der Praxis festlegen und hat 3 Größen gemessen, die nicht zu seiner Festlegung ausreichen, dann misst man halt eine vierte usw., irgendwann reicht es schon.

Genauso verhält es sich mit dem Satz des APOLLONIUS: Hat man ihn nicht, kann man auch leben. Da man ihn mit einfacherem Wissen beweisen kann, zeigt ja gerade die Mathematik, dass man auf ihn verzichten kann. Usw.

So scheint nur die allereinfachste Mathematik für unsere Zukunft bedeutsam. D. h.: Will man den mittlerweile in Kernlehrplänen u. a. eingeschlagenen Weg erweitern, muss man dies an allereinfachsten mathematischen Inhalten begründen, wobei natürlich eine herausragende Rolle spielt, was für den Autor Mathematik bedeutet. Hierüber soll aber erst anschließend in Kapitel 3 einiges geschrieben werden.

2.1 Bereits das Allereinfachste in der Mathematik erfordert Wissen und Können.

Sieht man einmal davon ab, dass an der Grundschule der Geometrieunterricht mit einer Namengebung für Formen u. a. beginnt, kommt man zum eigentlich „Mathematischen" der Geometrie beim Untersuchen einfachster Spiegelungen, wie dies zu Beginn des Geometrieunterrichts meist in Klasse 7 des Gymnasiums der Fall ist, wenn man nochmals auf die entsprechenden Vorerfahrungen der Grundschule zurückkommt:

Beispiel 2.1.1: Spiegeln an einer Geraden durch Falten[7].

Falten ist eigentlich ein Raumprozess, auch wenn das Unterrichtsgeschehen nur selten darauf eingeht. Der Lehrer geht davon aus, dass seine Schüler zuerst den Raum als ihren Lebensraum erkundet haben und er dies nutzen kann, aus dem Lebensraum heraus die Abstraktion „ebene Geometrie" abzuleiten. Hier wird

Können 1 aus der Vorschulzeit vorausgesetzt. Früher – schätzungsweise vor 1950 – war bei Zehnjährigen solches Können dank des Bastelns von Häuschen durch Zusammenkleben ebener Formen u. a. vorhanden. Heute findet kaum mehr ein solches Basteln statt und auch die viel gepriesenen Vorschulkindergärten füllen diese Lücke nicht hinreichend.

Was beim Falten passiert kann man im Raum erklären. Nur so kann der Schüler „sehen" (d. h. erkennen), dass fast alle Punkte beim Falten jeweils auf einem Kreis wandern, der in einer Ebene senkrecht zur Faltachse a liegt. Hieraus findet man die folgenden Erkenntnisse über den Zusammenhang eines Punktes P mit seinem Bildpunkt P' beim Spiegeln an der Geraden a einer Ebene:

1. $PP' \perp a$
2. $PP' \cap a =: F$
3. $|\overline{PF}| = |\overline{P'F}|$

Die Mengenschreibweise gehört in den Unterricht, allerdings nicht an den Anfang, sondern in einen zweiten Anlauf, um die Schüler nicht mit zu viel Lernstoff zu verprellen. Hier wird diese Schreibweise benutzt, um

[7] Kernlehrplan 2006 NS Gy 3.2.3 Schuljahrgang 8, Lehrplan 2008 By Gy M7.1.1

rasch dem Leser, einem Mathematiker, diese 3 Punkte vor Augen zu führen. Im Unterricht auch am Gymnasium (Klasse 7) werden aber hierfür 3 Sätze in Umgangssprache geschrieben.

Trotzdem setzt diese Herleitung aus dem Raum viel Erfahrung hinsichtlich Wissen und Können voraus:

Können 2: Ist es Mut oder Können, ein ebenes Problem räumlich zu interpretieren und dadurch neue Kenntnisse zu erwerben? Wie ich bereits an anderer Stelle betont habe, zeigt man in sehr „hoher" Mathematik, wie der Umkehrprozess der Projektion, eben das Lifting, funktioniert, was in obigem Unterricht sicher nicht thematisiert werden darf. Im Unterricht geht es also nur darum, einen ebenen Vorgang, das Spiegeln an einer Geraden, räumlich einzubetten, Eigenschaften zu finden, die dann wiederum in der Ebene interpretiert werden. Was dahinter steckt ist hier unwesentlich, im Laufe des allmählichen Entdeckens der Mathematik durch den Schüler wird wohl an anderer Stelle dieses Phänomen auch benutzt, ohne es zu begründen.
Man braucht aber auch Wissen:

Wissen 1: Gebrauch von „=" bei Mengen und Längen. Ein Gleichheitszeichen versteht man, wenn man hierzu parallel eine Ungleichheit beachtet. Bei Mengen gehört also indirekt die Obermenge, bei Längen u. U. Erfahrungen mit der Streckenaddition dazu.
Wissen 2: Was ist eine Ebene? Diese Frage kann und soll in Klasse 7 mathematisch nicht endgültig geklärt werden. Aber „gewisse" Vorstellungen anhand von Vorerfahrungen braucht man schon.
Wissen 3: Was heißt gleich lang?
Wissen 4: Was ist senkrecht? Zumindest muss der Schüler so viele Vorerfahrungen anhand von Beispielen haben, dass er durch Messen feststellen kann, wann zwei Dinge in der Ebene und im Raum zueinander senkrecht sind.
Wissen 5: Was ist ein Kreis in der Ebene, im Raum? Auch hierbei wird keineswegs eine endgültige Definition im Sinne der Mathematik erwartet, aber „gewisse" Erfahrungen müssen beim Schüler existieren.
Wissen 6: Was hat das alles mit dem Stehen vor einem Spiegel zu tun? Um das zu klären, muss vorher bereits geklärt sein, was man im Spiegel sieht.

Kritik: Eigentlich ist ein Unterricht, der dies alles vorab klärt, todlangweilig und wird deshalb nie so praktiziert. Hier kommt die Frage: Benutzt man eigentlich immer die grundlegenden Kompetenzen so versteckt? Hat man hier eine der Ursachen, dass immer nur ein Teil der Klasse den Gedanken des Lehrers folgen kann? Oder anders ausgedrückt: Kennt der „gute" Lehrer intuitiv dieses Problem, und geht gerade deshalb beim 2. Anlauf, bei den Anwendungen, beim Wiederholen auch andere Wege, um dann vielleicht Können und Wissen auch im Sinne einer Kompetenz abzurunden?

Alle diese grundlegenden Erkenntnisse liefert die Grundschule, die Eingangsklasse 5 der weiterführenden Schulen, bevor sie u. U. erstmals zu Beginn des eigentlichen Geometrieunterrichts – also etwa in Klasse 7 des Gymnasiums – im Zusammenhang genutzt werden. Vielleicht wird die „Sache" in Klasse 10 bei einem weiteren Anlauf mathematischer, abstrakter untersucht. Viele angehende Anwender der Mathematik haben dann früher in ihrer Geometrievorlesung zu Beginn ihres Studiums hierzu Endgültiges erfahren. Heute verzichtet man weitgehend auf diesen Abschluss, so bleiben also die Grundlagen, die schon in der Grundschule eine Rolle gespielt haben, weiterhin vorläufig, und einschlägiges Wissen und Fähigkeiten von immer mehr Menschen bleiben vage.

Das einst viel gepriesene Spiralprinzip beim Lehren – ausgehend von ersten Beobachtungen und viel später auf höherem Niveau erst eine endgültige Klärung – hat doch eigentlich verdeutlicht, dass Kompetenz nicht unbedingt beim ersten Anlauf erworben werden muss und auch kann.

Man kann sich auch auf einen anderen Standpunkt stellen: Eine endgültige Sachklärung, wie dies die Mathematik anstrebt, ist nicht entscheidend, sondern der Umstand, wie erfahrene Lehrer bei den Schülern eine Beispielkette aufbauen, die allmählich an die „mathematische Wirklichkeit" heranführt, wie dies HURWITZ [1] in anderem Zusammenhang in seinem Vorwort schon vor 100 Jahren geschrieben hat, als er den Begriff Funktion dadurch erklärte, dass ein erfahrener Lehrer mit einer geeigneten Beispielkette seinem Schüler allmählich nahe bringt, was man unter einer Funktion versteht; also HURWITZ sah keine Definition für den Begriff Funktion als erforderlich an. Der Erwerb einer Kompetenz ist sicher ein Ziel; oft wird der Lehrer das Ziel nur approximieren können und/oder der Schüler nicht erreichen. Dieser Fakt darf aber nicht dazu führen, im Unterricht nur noch solche Kompetenzen anzusteuern, die erreichbar sind oder gar von allen Schülern erreicht werden können. Letzteres würde eindeutig dem Status des Gymnasiums, eine Ausleseschule zu sein, widersprechen.

Noch zwei weitere Punkte muss man im angesprochenen Zusammenhang stets vor Augen haben:

a) Der Lehrer erzählt, führt vor, lenkt. Bei jedem Schüler bleibt nur ein Teil des Unterrichts hängen, was mit der Fülle des Geschehens und mit der Ermüdung seiner Zuhörer zu tun hat. Deshalb empfiehlt die Pädagogik: Die Schüler sollen selbst entdecken; doch auch hier spürt der Lehrer die Ermüdung, vor allem aber, dass nahezu jeder Schüler anderes entdeckt, was insbesondere bei der Vielzahl geometrischer Axiome zu nicht realisierbaren Wegen führen wird, die der Lehrer „rechtzeitig" abbrechen muss, um nicht zu viel Unterrichtszeit zu vergeuden und um zu vermeiden, dass seine nicht so guten Schüler Falsches lernen. Für den Lehrerstudenten ist deshalb der Besuch einer umfassenden Grundlagenvorlesung in Geometrie unerlässlich. Nur so kann der Lehrer seine Schüler entdecken lassen und dann doch dieses Entdecken rechtzeitig lenken, selbst die Initiative ergreifen, Mathematik – was immer dies sein soll – *entsprechend der Altersstufe* seiner Schüler aufzubauen.

b) Der Lehrer – und hier unterscheidet er sich wesentlich von einem Supervisor – muss laufend ausgleichen zwischen der Unter- und Überforderung seiner Schüler. Der gute Schüler hat mit Wissen 1 bis 6 keine Probleme. Er zeichnet sich dahingehend aus, dass er *ohne Nachzudenken* dies alles zum rechten Zeitpunkt erahnt und zur Unterforderung neigt. Der weniger gute Schüler nimmt das, was der Lehrer sagt, ernst *und lernt und lernt* und wird durch sein Handeln müde und überfordert.

2.2 Ein weiteres einfaches Beispiel

Beispiel[8] 2.2.1, gymnasial formuliert: Wo liegen in der Ebene die Mittelpunkte aller Kreise durch zwei gegebene Punkte? *Begründe* dein Vorgehen. Existieren Sonderfälle? *Weshalb* gibt es durch 3 verschiedene Punkte höchstens einen Kreis?

Zur Lösung: Der Lehrer kennt natürlich die Lösung und braucht keine Überlegung, um sie zu finden. Bei solch einfachen mathematischen Fragestellungen ist die Gefahr für ihn groß, zu rasch ein Ergebnis ohne Nachdenken entstehen zu lassen und so zu wenig auf die eigentliche Mathematik Bezug zu nehmen. Jeder, der nur einmal eine Lösung gesehen hat, kennt sie eben und überlegt auch nicht mehr, warum das so ist. Das heute übliche langsamere Hinführen zur Lösung durch den Lehrer – ein Schüler könnte dies zunächst nämlich nicht – hat eindeutig Vorteile gegenüber früheren Unterrichtsstilen:

Können 1: Man vereinfacht das Problem und fragt:
Wissen 1: Wo liegt der Mittelpunkt *eines* Kreises bezüglich zwei seiner Punkte (oder einer seiner Sehnen)? Antwort: Auf der Mittelsenkrechten dieser beiden Punkte.
Können 2: Stets sollte die Frage kommen: Warum ist das so? Antwort:
Wissen 2: Abgesehen von einer Ausnahme bilden die beiden Kreispunkte zusammen mit dem Mittelpunkt ein gleichschenkliges Dreieck.
Wissen 3: Das gleichschenklige Dreieck hat eine Symmetrielinie, die die genannte Mittelsenkrechte ist.
Der Ausnahmefall tritt ein, wenn die beiden Kreispunkte zusammen mit dem Mittelpunkt auf einer Geraden liegen. Da aber diese Mittelsenkrechte eben durch die Mitte der Sehne $\overline{AB}$ geht, ist das dann der Kreismittelpunkt.

[8] Kernlehrplan 2006 NS Gy 3.2.3 Schuljahrgang 6; Lehrplan 2008 By M10.1

Können 3: Logisches Folgern: Bei zwei Kreisen durch die beiden gegebenen Punkte erfüllt jeder dieser Kreise die bisherige Überlegung, also müssen sie jeweils dieselbe Mittelsenkrechte haben. Weitere Folgerung: Alle Kreise durch die beiden gegebenen Punkte haben Mittelpunkte, die auf der Mittelsenkrechten dieser Punkte liegen (Abb. 6).

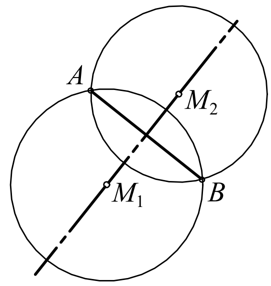

Abb. 6

Sonderfall: Die Verbindungslinie der beiden gegebenen Punkte könnte man als einen Kreis mit unendlich großem Radius bezeichnen.

Zusatzfrage: Hat man drei gegebene Punkte, die ein Dreieck bilden, dann müssen alle Kreise durch sie auf den drei zugehörigen Mittelsenkrechten liegen.
Wissen 4: Die drei Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden sich in genau einem Punkt; deshalb gibt es genau einen Kreis, auf dem die gegebenen drei Punkte liegen.
Wissen 5: Bilden die drei gegebenen Punkte kein Dreieck, so liegen sie auf einer Geraden, die man u. U. (siehe oben) als einen Kreis mit unendlich großem Radius nennen könnte.

Kritik: Natürlich verlangt die Lehre der Mathematik nicht in jedem Fall ein solches Vorgehen. Die in der vorliegenden Abhandlung dargestellten Beispiele können, müssen aber nicht so unterrichtet werden. Das Entscheidende sind ihre Bezüge zu früher Gelehrtem, die jedenfalls vorhanden sein sollten. Gelegentlich sollten aber Überlegungen, wie sie eben dargestellt worden sind, auch in den Schulheften dokumentiert werden, damit der Schüler die Möglichkeit bekommt, bei der häuslichen Vorbereitung nochmals die Gedankenkette des Unterrichts auszuführen. Dies ist ein wesentlicher Punkt, Kompetenzen entstehen zu lassen.

3. Ohne Begründen keine Mathematik

Die vorliegenden Vorschläge brauchen Antworten auf die Frage „Was ist Mathematik?“ und „Braucht man überhaupt Mathematik?“ Haben doch Kritiker der Mathematik schon immer vermutet, dass Mathematik vor allem für Mathematiker da ist und gelehrt wird, damit Mathematiker nicht eines Tages ohne Nachwuchs dastehen.
Jedenfalls wird es zukünftig für die Schulen nicht ausreichen, diese Fragen zu stellen ohne sie zu beantworten, was leider hier wie auch an anderer Stelle (z. B. WIECHMANN, BANDELT [1]) *nicht umfassend* geschehen kann.

Als ich die 2. Frage einem Ingenieur vorlegte, kam sofort die Antwort „Wie soll ich die Schwingungen einer Welle berechnen, wenn ich keine Mathematik zur Verfügung habe?“ Es gibt also Berufe, die *ausreichend* Mathematik auch vom Gymnasium erwarten, um ihren Alltag zu bewältigen. Auch ist es eine Selbstverständlichkeit, dass nicht alle in ihrem späteren Beruf die Mathematik nutzen werden, die etwa – immer noch – an einem Gymnasium gelehrt wird.

Man kann aber auch die zweite Frage „Braucht man überhaupt Mathematik?“ verneinen, wenn man nur die Mathematik am Gymnasium noch lehren will, die *alle* Berufe gemeinsam nutzen. Dagegen kann man sie bejahen, wenn man an die Freiheit der Berufswahl also an eine allgemeine Hochschulreife denkt, und dem einzelnen ermöglichen will, erst mit dem 18ten Lebensjahr eine Entscheidung hinsichtlich Berufswahl fällen zu müssen, wenn halbwegs die Eignung aber auch die Liebe zu einem Beruf geklärt sind. D. h.: Obige zweite Frage ist von Politikern zu entscheiden, auch unter dem Aspekt, was billiger ist:

- Grundlegendes der Mathematik *allen* zu lehren, auch wenn sie dies nicht alle im „Leben“ nutzen werden, oder
- *nur denen* zu ermöglichen, die dies ein Leben lang praktizieren.

Die erste Frage „Was ist Mathematik?“ ist schwierig und vom einzelnen Autor sicher nicht umfassend zu beantworten. Seine Antworten werden Flickwerk bleiben. Trotzdem will ich einige Aspekte ansprechen, um Berufenere zu ermutigen, öffentlich auf diese Frage eine Antwort zu geben:

3.1 Einige historische Bemerkungen

Das älteste uns bekannte Lehrbuch der Geometrie stammt von EUKLID und ist bis ins 20ste Jahrhundert Vorbild für Schulbücher gewesen. Und doch ging es vielleicht EUKLID gar nicht um das Schreiben eines Lehrbuchs, sondern mehr um eine wissenschaftliche Darstellung der Geometrie, wie man sie ohne Parallelenaxiom – so würden wir heute sagen – entwickeln kann. Und das hat er recht genau begründet. Mit der Anwendung der Geometrie hatte das sicher nichts zu tun. Handelte es sich doch offenbar „nur“ um eine innermathematische Frage, die erst zweitausend Jahre später in der nichteuklidischen Geometrie von BOLYAI, LOBATSCHESWKI bis MINKOWSKI beantwortet werden konnte.

Ohne Frage ist nach EUKLID viel neue Mathematik im Bereich von Anwendungen der Physik (auch Ingenieurwesen), Astronomie u. a. entstanden. Es bestand das Bedürfnis, Dinge zu berechnen, die man – noch – nicht berechnen konnte, deren Berechnung dann aber deduktiv aus bereits Vorhandenem aber auch Neuem hergeleitet wurde. Unter Umständen gelang es dann, nicht nur die Existenz einer Sache zu begründen, sondern auch die Vielfalt der Lösungen exakt im Sinne des mathematischen Deduzierens zu zeigen.

Als das mathematische Wissen drohte, nicht mehr vermittelbar zu werden, weil es zu vielfältig geworden war, suchte man wesentliche Grundlagen in den einzelnen Theorien zu finden und Axiomensysteme aufzubauen. Hier sei nur angemerkt, dass sich die Absicht, in der mathematischen Lehre genauso zu verfahren, also beim Axiomatischen zu beginnen, nicht als effektiv zeigte und fallen gelassen werden musste. Anders verhielt es sich mit dem Drang der modernen Mathematik, so stark wie möglich zu verallgemeinern, um vorab möglichst allgemein Gemeinsames zwischen zunächst unterschiedlichen Theorien zu klären.

Die alte Tradition aus Fragestellungen der Anwendung zu neuer Mathematik zu kommen, prägt die Mathematiker immer noch. So waren es Highlights in mathematischen Kolloquien, wenn etwa einem Raum nahe liegende topologische Eigenschaften gegeben worden waren und sich am Ende des Vortrags zeigte, dass die „normale“ Kugel des dreidimensionalen Raums das einzige Beispiel war, was noch allen gestellten Bedingungen genügte, oder ein anderer Vortragender stolz war, ein vorher als unlösbar angenommenes partielles Differentialgleichungssystem mit Garbentheorie gelöst zu haben usw. D. h. Mathematiker freuen sich immer noch, wenn es ihnen gelingt, mit rein abstrakt gefundener Mathematik (bzw. durch Verallgemeinerung vorhandener Mathematik) Anwendungsbeispiele zu entdecken und im Sinne von Existenz und Eindeutigkeit zu lösen.

D. h. aber auch: Niemand kann a priori sagen, was Mathematik in 50 Jahren kann und ob bestehende Mathematik heute schon genutzt wird oder eines Tages erst genutzt werden kann. Diesen Satz sollten Lehrplanmacher zukünftig stärker als in der jüngeren Vergangenheit berücksichtigen.

Wenn man also – und das war immer schon so – vor einem scheinbar unlösbaren Problem steht, kann es u. U. wirklich unlösbar sein,

- weil die Fragestellung falsch oder unvollständig ist,
- in den bestehenden Theorien nicht gelöst werden kann,
- oder nur, weil bis jetzt keine Strategie in einer vorhandenen Theorie bekannt ist,

Jedenfalls zeigt sich, dass ein Problemlöser mit großem mathematischen Wissen und Erfahrung geeigneter ist als ein Unwissender. Deshalb sollte sich die Mathematiklehre angefangen vom Kindergarten bis zu den Hochschulen bemühen, **so viel wie nur irgendwie möglich zu lehren**, auch dann, wenn nicht alle Schüler alles verstehen und verinnerlichen werden. Mehr Wissen hilft immer, wie etwa im folgenden Beispiel:

Berät man als Mathematiker Ingenieure, so sieht man oft Kopfschütteln, wenn man dank seines eigenen Wissens und seiner Erfahrung in wenigen Zeilen eine Sache „händisch" berechnet, die vom Ingenieur in vielen Rechnerstunden nicht gelöst werden konnte.

3.2 Bemerkungen zum Sosein von Mathematik

Ganz gleich, ob ein reales Problem vorliegt oder ob innerhalb bestehender Theorien eine Verallgemeinerung angestrebt wird, es entstehen Vermutungen in Abhängigkeiten von Eigenschaften usw. Dieser Satz gilt noch für alle Wissenschaften. Nur durch Mathematik gibt es dann vom Forscher unabhängige und allgemein anerkannte „Strategien", die *prüfen*, ob für alle Fälle, in denen diese Abhängigkeiten (Satzvoraussetzungen) zutreffen, die Vermutung (Satzaussage) eintrifft. In aller Regel werden zu Beginn einer solchen Untersuchung weder die Voraussetzungen noch die Satzaussage passen und man wird sie variieren, bis man zu einem begründbaren Resultat kommt.

Treten die Voraussetzungen nicht ein, so lässt sich auch ein vorhandener Satz nicht einsetzen. Anwender sind hierbei manchmal nicht genau genug: So glauben heute einige Wirtschaftswissenschaftler, die jüngsten Finanzkrisen haben vor allem im Einsatz von *zu viel* Mathematik ihre Ursache. Es ist stark anzunehmen, dass die Mathematik nicht die Krisen verursacht hat, sondern bestenfalls Krisen durch Einsatz einer falschen Mathematik, die den Voraussetzungen nicht angepasst gewesen ist, verursacht worden sind. Vielleicht würde helfen, wenn Wirtschaftswissenschaftler sich analog zu Physikern verhalten würden, wenn diese z. B. NEWTONsche Mechanik nicht bei relativistischen Problemen verwenden.

Die Voraussetzungen für die Anwendung von Mathematik gelten oft nur innerhalb gewisser Grenzen; ein Beispiel für die Schule: Das HOOKEsche Gesetz, also ein proportionaler Zusammenhang zwischen Dehnung und Belastung, gilt nur zwischen Grenzen, die natürlich vor dem Anwenden des Gesetzes gefunden werden müssen.

Sicher ist es ein Problem, unter der Vielfalt der eigentlich zu beachtenden Voraussetzungen die wichtigsten zu bestimmen, vor allem dann, wenn der Rechner nicht alle Voraussetzungen verkraften kann:

ESSO hatte in Hamburg in den 80ern des letzten Jahrhunderts einen Rechner stehen, der bis zu 100 Variablen bei bestehenden Voraussetzungen verkraftete. Man steuerte mit dem Rechner die Öltanker zwischen New York und Rotterdam so lange hin und her, bis der Rechner vorhersagte, an welchem der beiden Orte der Verkauf des Öls sich lohnen würde. Nun gab es aber hierfür viel mehr Variablen, die berücksichtigt hätten werden müssen. Einschlägig Erfahrene mussten aus diesen 100 Stück aussortieren, wodurch natürlich die Rechnerergebnisse stark von dem Wissen und den Meinungen dieser Erfahrenen abhängig wurden.

Die Mathematik wird also geprägt von einem besonderen Verfahren, wie dies keine andere Wissenschaft besitzt: Man kann mit ihr den Wahrheitsgehalt einer Aussage überprüfen. Hierbei wird jeweils eine passende Strategie entwickelt, die das ursprüngliche Problem in Einzelschritte zerlegt, deren Wahrheitsgehalt bereits allgemein anerkannt ist und der Zusammenhang dieser Einzelschritte als wahr bewiesen werden kann. Dieses Verfahren besteht aus einer Folge von Deduktionen, die einen neuen Zusammenhang mit bereits bekannten herstellen.

Selbstverständlich kann man heute Maschinen – sprich Computer – bauen, die dies auch beherrschen. Bloß kann die Maschine nur solche Zusammenhänge nutzen, die vorher eingegeben worden sind. Die Maschine kann also noch nicht die menschliche Fantasie ersetzen. D. h. die Vielfalt denkbarer Strategien ist größer als das, was ein Computer beherrscht. Zusammengefasst gilt also:

1. Das Wesentliche der Mathematik ist die Deduktion, also die Zurückführung auf bereits als wahr erkannte Aussagen.

2. Die erforderliche Fantasie zum Entwickeln einer neuen Strategie ist abhängig vom vorhandenen Vorwissen.

Für die Schule folgt, was weiter oben bereits mehrfach indirekt angesprochen worden ist:

Mathematik wird von der Pflege der Beweiskunst beherrscht. Ein Schulfach Mathematik ohne Deduzieren gibt es deshalb nicht. In Schularten, in denen dies nicht möglich ist, sollte man nicht mehr von Mathematik oder Geometrie sprechen, sondern zu den historischen Bezeichnungen „Rechnen bzw. Zeichnen“ zurückkehren.

Insbesondere 2. hat zur Folge, wer mehr weiß, kann mehr und leichter deduzieren. Aus diesem Grund sollten sich Lehrer dort, wo die Lehre von Mathematik gepflegt wird, bemühen, ihren Schülern möglichst viel beizubringen. Sicher wird nicht jeder alles verstehen. Aber die naturwissenschaftlichen Erfolge der Vergangenheit haben gezeigt, dass nicht jeder Schüler alles, was gelehrt worden ist, im späteren Leben auch beherrschen muss. Tradition und Erfahrung haben an den Ausleseschulen – also Gymnasien und adäquaten Schulen – Möglichkeiten geschaffen, die Grenzbildung zwischen Verstehen und Überforderung transparent und gerecht zu gestalten, vorausgesetzt, dass die dort beschäftigten Lehrer dies psychisch leisten können.

So sind letztlich die Inhalte der Lehre entscheidend. Man sollte nicht außer Acht lassen, dass für diese Inhalte Grenzen vorhanden sein müssen und auch sind. Insbesondere zwischen dem Gymnasium und den Studienrichtungen gibt es in der Mathematik eine seit langem vorhandene Aufgabenverteilung, die zwar historisch gewachsen ist, über deren Berechtigung aber kaum allgemein anerkannte Untersuchungen vorhanden sind. Das soll nicht heißen, man müsste sofort mit entsprechenden Untersuchungen beginnen. Jedenfalls sollten alle Beteiligten sich stets wechselseitig bei Änderungen informieren und nicht vergessen, vor Inkrafttreten solcher Änderungen abzuklären, welche Konsequenzen die einzelne Änderung nach sich ziehen.

3.3 Mathematik in der Schule

Eigentlich waren schon immer die Geometriethemen an der Schule modeabhängig: Auffallend war sicher die Abschaffung der Projektiven Geometrie um 1900, nur war es damals „Mode“, ein Fach abzuschaffen und die gewonnene Unterrichtszeit durch ein anderes Fach zu ersetzen; man benötigte um 1900 Unterrichtszeit für eine einführende Behandlung der Analysis am Gymnasium (so genannte Meraner Pläne). Wohl beeindruckt von den Forschungsergebnissen der Grundlagengeometrie im 20sten Jahrhundert nahm man um 1960 Nichteuklidische Geometrie und Grundlagengeometrie (leider anhand von HILBERT [1], der damals wohl bereits als didaktisch überholt galt, nachdem BACHMANN [1] und seine Schule mit ihrer Spiegelungstheorie in der absoluten Geometrie recht erfolgreich waren) als Wahlkurse zusätzlich zu dem bereits vorhandenen Stoff auf. Auch brachten offenbar Anwendungserfolge endliche Mathematik an die Schule. Sie konnte sich allerdings weder im Algebra- noch Geometrieunterricht durchsetzen. Schulversuche hinsichtlich Kategorientheorie und anderem waren von Anfang an zum Scheitern verurteilt, weil man über Gemeinsamkeiten von Strukturen erst reden kann, wenn man hinreichend viele Beispiele kennt, und der damalige so genannte „Gruppenerkennungsdienst“ an der Schule wohl kaum hierzu verwendet werden konnte.

Anders war das mit Differentialgleichungen: Man hielt selbst die allereinfachsten an der Schule für zu schwer. Die Lehrer brachten gerade mit dieser Ablehnung ihr zweites Lehrfach, die Physik, in Schwierigkeiten, wo man an der Schule sowohl in der Mechanik wie auch in der Elektrizitätslehre Differentialgleichungen löste, aber krampfhaft die Schreibweise mit Differentialquotienten vermied. Fünf Minuten mehr Unterrichtszeit und man hätte erste Differentialgleichungen bekannt gemacht und so vielen Studenten im ersten Semester den Start z. B. in der Vorlesung Mechanik erleichtert. Als Ursache muss wohl angesehen werden, dass die meisten Lehrer sich nie dafür interessierten, was in den Anfängervorlesungen bzw. in den Berufen von der Schule erwartet wird.

Hierin ist auch die Ursache zu suchen, dass man in allen Bundesländern zuerst die Additionstheoreme ausschied, dann feststellte, so kaum noch goniometrische Gleichungen lösen zu können – also „entfrachtete“ man sie auch – und übersah dabei, dass diese Gleichungen an der Schule die einzigen Beispiele waren, die weder eindeutig, noch mehrdeutig, sondern nur unendlichdeutig lösbar waren. Der Anwender kann aber Trigonometrie nur ganz selten einsetzen, wenn ihm keine goniometrischen Gleichungen zur Verfügung stehen.

Da Maschinen in aller Regel keine Entscheidungen ausführen können, kann der Taschenrechner Mehrdeutigkeiten nicht bearbeiten und ersetzt diese scheinbar *willkürlich* durch *einen* Wert, der u. U. das Ausgangsproblem *nicht* löst (vgl. HEMMME [1]). Man muss also die Arbeit des Rechners laufend überwachen. Leider gibt es sehr viele, die ihm bedingungslos glauben und sich dieser Blackbox ausliefern. Einmal ganz abgesehen davon, dass jeder Rechner ausfallen kann und der Nutzer dann ohne ihn auskommen muss, dass es keinen Rechner gibt, der $\sqrt{2}$ „genau" ausrechnen kann, gibt es keinen Rechner, der z. B. beliebige Gleichungssysteme lösen kann (siehe oben). Da die wenigsten Softwarehersteller die Grenzen ihrer Programme angeben, können viele Anwender sich gar nicht im Klaren sein, inwieweit vorhandene Berechnungen als wahr angesehen werden können, auch deshalb, weil die Programme meist nur Vernetzung vorher vorhandener Software (oft unverträglich) sind und meist so schlecht dokumentiert werden, dass im Nachhinein nicht mehr die eigentlichen Abläufe der Programme rekonstruierbar sind. Eine Veröffentlichung solcher Konstruktionen wird meist aber aus copyright-Gründen vermieden.

Ohne Zweifel ist heute die Schule verpflichtet, in die Nutzung der Rechner einzuführen, auch im Bereich Geometrie. Andererseits ist sie aber auch gehalten, auf die Fehler und Gefahren solcher Maschinen aufmerksam zu machen und zu helfen, Nutzer entstehen zu lassen, die diese Geräte beherrschen. D. h. natürlich auch, dass der Schüler bereits lernt zu entscheiden, ob es sich lohnt, einen Rechner einzusetzen oder doch lieber ein anstehendes Problem händisch zu lösen.

Rechner können heute Kreise „anständig" zeichnen und vermeiden die früheren Treppenfunktionen. Trotzdem muss auch in Zukunft ein Schüler zumindest aus Gründen der Tradition üben, einen Kreis mit dem Zirkel richtig zu zeichnen. Ihm sollte verständlich sein, wie man „große" Kreise mit einer Schnur (zur Radiusbildung) entstehen lässt, auch wie man große „Ellipsen", ja sogar eine Schar konfokaler Ellipsen mit zwei festen durch Fischgräten gesicherten Punkten und einer geschlossenen Schnur erzeugen kann (so genannte Gärtnerkonstruktion).

„Gute" Naturwissenschaftler, „gute" Ingenieure, „gute" Meister sollten in der Lage sein, jedem Mitarbeiter etwa auf einem Zeitungsrand anhand von Skizzen eine „komplizierte" Sache zu erklären. Solche Skizzen verlangen aber Können aus dem Bereich Mathematik, wie immer wieder Hochschulmathematiker in der Geometrievorlesung für Ingenieure (die es heute für die genannten Gruppen nur noch selten gibt) betont haben; einiges findet man bei MEYER [1]. D. h. bei aller Liebe zur genauen Zeichnung sollte durchaus der Geometrieunterricht gelegentlich Skizzieren üben und das an der Schule nicht nur dem Kollegen, der Kunst und Zeichnen lehrt, überlassen.

Ganz gleich, auf welche Beispiele des klassischen Mathematikunterrichts man sich bezieht, kann man erkennen, dass es kein Grundwissen einfachster Art (sprich Bildungsstandards) gibt, aus denen *jeder nach Belieben alles*, was er so braucht, herleiten kann. Um beim letzten Beispiel zu bleiben:

Skizzen sind Projektionen des Raums in eine Ebene. In aller Regel wird man Parallelprojektion (so genanntes Schrägbild) verwenden. In einfachen Fällen wird es um Gegenstände gehen, die nur aus Strecken und Kreisen festgelegt sind, die im Bild Punkte, Strecken, Ellipsen oder darunter in Spezialfällen wiederum Kreise sind. Hat solches ein Schüler erfahren und „verinnerlicht", so ist er trotzdem meist ohne weiteres Wissen nicht in der Lage, eine Skizze zu fertigen (siehe z. B. MEYER [1]).

3.4 Was sind unmittelbare Folgen?

Will man weiterhin an Gymnasien und adäquaten Schulen am Unterrichten von Mathematik festhalten, muss zumindest der einzelne Lehrer in seiner Unterrichtsvorbereitung mit den neuen Kernlehrplänen (die in einigen Bundesländern auch anders heißen) vorsichtig umgehen. Er muss die Präambel des Lehrplans genau lesen, in der in aller Regel durchaus nicht behauptet wird, dass *nicht nur* die im Anschluss genannten Bildungsstandards im kompetenzorientierten Lehrplan behandelt werden dürfen. Es ist zwar erfreulich, wenn sich alle 16 Bundesländer auf solche Bildungsstandards geeinigt haben; mit ihnen wird aber nicht gewährleistet, anschließend jedes Studium beginnen und in angemessener Zeit mit Erfolg beenden zu können.

Diesbezügliche Gespräche mit einigen Ministerialbeamten haben immer wieder gezeigt, dass man sich in den einzelnen Kultusbehörden durchaus im Klaren ist, in den Bildungsstandards nicht die optimale Lösung zu sehen. Man bekommt zu hören: „Lehrer sind Vollakademiker; sie werden schon wissen, was zu lehren ist". Lehrer sind wohl zu sehr an frühere Lehrpläne gewöhnt, die ganz genau nahezu jede einzelne Unterrichtsstunde beschrieben haben. Das ist heute nicht mehr so. Zumindest dort, wo man den Unterricht mit wenig Unterrichtszeit ergänzen, ausbauen, erweitern kann, sollte man diese Gelegenheit nutzen. Offen bleibt im Moment, ob man solche Ergänzungen auch abprüfen darf. Bei der derzeitigen Rechtslage ist dies sicher nicht empfehlenswert.

Auch sollten alle Kolleginnen und Kollegen nicht mehr an der seit langem eingespielten Aufgabenverteilung zwischen Universität und Gymnasium rütteln. Ich erwähne nochmals das Beispiel Trigonometrie – auch sphärische: Das Fach ist für den Schulunterricht geeignet. Sicher könnte man es – wie viel anderes – an die Universität verschieben. Man sollte aber daran denken, dass die Hochschule trotzdem die Lehraufgabe behält, Studenten an die Forschung heranzuführen. Fachgebiete wie die Trigonometrie und Fitness für die Forschung würden sich nur vereinbaren lassen, wenn die Studienzeit erhöht wird, was „man" aber auch nicht will.

Ein Hauptanliegen der neuen Lehrpläne ist die Absicht, zukünftig vertieft zu unterrichten. Man erwartet, dass der Lehrer besser als bisher den so genannten Output seiner Schüler beachtet. Man möchte den „sturen" Einsatz weniger Verfahren einschränken und dafür mehr das Mathematische, also das selbständige Finden von Strategien, betonen. Hierzu erwartet man umfassendes Wiederholen bzw. eine Komplexität der gestellten Fragen, auch mit der Absicht, Einzelwissen zusammenzuführen und übergeordnet, eben kompetenzorientiert, zu betrachten.

Beides kann wieder Aufgaben, wie sie im Kapitel 1 beschrieben werden, in den Schulalltag bringen. Neu ist dies nicht, da sich bereits frühere Lehrpläne in einigen Bundesländern ganz entsprechend geäußert haben. Aber auch wie in früheren Jahren ist es eine Utopie zu glauben, dass der praktizierende Lehrer über so viel Arbeitszeit verfügt, entsprechende Vorschläge für seinen Gesamtunterricht selbst zu entwerfen. Er braucht Hilfe, d. h. leicht erreichbare, einschlägige Unterlagen. Solche könnten entstehen, wenn mehr Lehrer als bisher entsprechende Vorschläge für die eine oder andere Unterrichtseinheit in der Zeitschrift Mathematikinformation veröffentlichen könnten und damit Kollegeninnen und Kollegen helfen würden, den neuen Lehrplanaspekten gerecht zu werden.

4. Literatur

Bachmann Friedrich	[1]	Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff, Springer, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1959
Hamsun Knut	[1]	Das letzte Kapitel, Verlag von Th. Knaur Nachf. Berlin 1928
Hemme Heinrich	[1]	Ergänzung zu „Trigonometrie", Mathematikinformation Nr. 53 (2010) Seite 3
Herterich K.	[1]	Dreieckskonstruktionen, Band 1 (lösbare), Klett Stuttgart 1966
	[2]	Dreieckskonstruktionen, Band 2 (unlösbare), Klett Stuttgart 1966
Hilbert David	[1]	Grundlagen der Geometrie, 9. Auflage, Stuttgart 1966
Hurwitz Adolf	[1]	Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen, Springer Berlin 1922: Die Grundlehren der mathe-

		matischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete. Bd.3, ISSN 0072-7830, herausgegeben und ergänzt durch einen Abschnitt über Geometrische Funktionentheorie von Richard Courant (4. vermehrte und verbesserte Auflage mit einem Anhang von Helmut Röhrl. ebenda 1964)
Lobatschewski Nicolai Iwanowitsch	[1]	La Théorie des Paralleles, Librairie Scientifique et Technique Albert Blauchard, Paris
Meyer Karlhorst	[1]	Gymnasialer Mathematikunterricht im Wandel, Reihe: texte zur mathematischen forschung und lehre, Band 2, franzbecker, Bad Salzdetfurth u. Hildesheim 1996
Wittmann Erich Ch.	[1]	Von allen guten Geistern verlassen, Profil 2015, siehe auch hierfür den Auszug in Mathematikinformation Nr. 62 (2015) Seiten 55 – 56
	[2]	Ein anderer historischer Blick auf die „Stoffdidaktik“, Mitteilungen der GDM 99 (2015), Seiten 26 – 29
Wiechmann Ralf, Bandelt H.-J.	[1]	Zehn unbequeme Fragen zur Kompetenzorientierung des Mathematikunterrichts, Mitteilungen der DMV 23/2015 Seiten 176 – 180

Adresse des Autors:
Dr. Karlhorst Meyer
Kyffhäuserstraße 20
85579 Neubiberg
e-mail: karlhorst@meyer-muc.de

Eingereicht am 25. November 2015