

## Verallgemeinerung des Satzes von VIVIANI

Der Satz von VIVIANI<sup>1</sup> besagt, dass in einem gleichseitigen Dreieck die Summe der Abstände von einem beliebigen Punkt im Innern des Dreieckes unabhängig von der Lage des Punktes ist. Wir haben also eine Invariante. Der Invariantenbegriff ist in der Mathematik zentral, viele Sätze der Mathematik lassen sich mit Hilfe von Invarianten formulieren und verstehen. Für die Beweise kommen verschiedene Lösungswege zur Sprache, die je einen eigenen Aspekt der Mathematik beleuchten. Der Satz von VIVIANI kann in verschiedener Hinsicht verallgemeinert werden.

### 1. Der Satz von VIVIANI

Wir wählen einen Punkt  $P$  im gleichseitigen Dreieck und messen dessen Abstände  $a$ ,  $b$  und  $c$  von den drei Dreiecksseiten (Abb. 1).

Wir stellen fest: Wenn wir den Punkt  $P$  variieren, ändern zwar die drei Abstände  $a$ ,  $b$  und  $c$ , aber ihre Summe  $a + b + c$  bleibt konstant. Diese Aussage ist der *Satz von VIVIANI* (siehe ALSINA und NELSEN [1] S. 112).

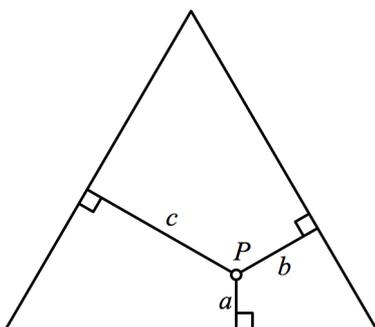


Abb. 1: Abstände von den Dreiecksseiten



Abb. 2: Vincenzo VIVIANI (1622-1703)

**Frage 1:** Wie kann der Satz von VIVIANI bewiesen werden?

**Frage 2:** Wie ist es in einem nicht gleichseitigen Dreieck?

### 2. Weitere Beispiele

Wir suchen andere Figuren mit konstanter Abstandssumme. Das einfachste Beispiel ist der Parallelstreifen (Abb. 3).

Damit haben alle konvexen Vielecke, welche als Durchschnitte von Parallelstreifen gedeutet werden können, ebenfalls eine konstante Abstandssumme. Dazu gehören Quadrat, Rechteck, Rhombus, Parallelogramm und viele mehr. Abb. 4 zeigt ein Beispiel.

<sup>1</sup> Vincenzo VIVIANI (5. April 1622 bis 22. September 1703) war ein Schüler und Mitarbeiter GALILEIS. Er publizierte eine italienische Version von EUKLIDS Elementen. Die VIVIANISCHE Kurve, die Schnittkurve der Kugel mit einem Zylinder von halbem Radius, führt zu Flächenteilen auf der Kugel mit rationalem Flächeninhalt.

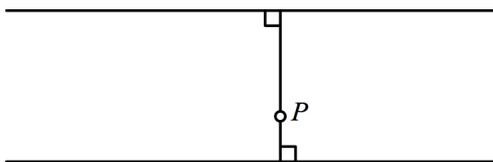


Abb. 3: Parallelstreifen

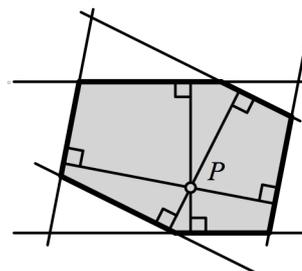


Abb. 4: Konstante Abstandssumme

Das Sechseck ist recht unregelmäßig, gegenüberliegende Winkel sind aber gleich groß.

**Frage 3:** Wie ist es mit einem Punkt  $P$  außerhalb des Parallelstreifens?

**Frage 4:** Gibt es auch krummlinig begrenzte Beispiele?

### 3. Regelmäßige Vielecke

Regelmäßige Vielecke, insbesondere solche ungerader Eckenzahl, haben ebenfalls eine konstante Abstandssumme. Um dies einzusehen, zerlegen wir das  $m$ -Eck vom Punkt  $P$  aus in  $m$  Dreiecke mit je einer Seite als Basis (Abb. 5 für das regelmäßige Fünfeck).

Für den gesamten Flächeninhalt  $A$  des  $m$ -Ecks erhalten wir:

$$A = \sum_{k=1}^m \frac{1}{2} s h_k = \frac{1}{2} s \sum_{k=1}^m h_k$$

Daraus ergibt sich für die Summe der Abständen von der Position von  $P$  unabhängigen Wert:

$$\sum_{k=1}^m h_k = \frac{2A}{s}$$

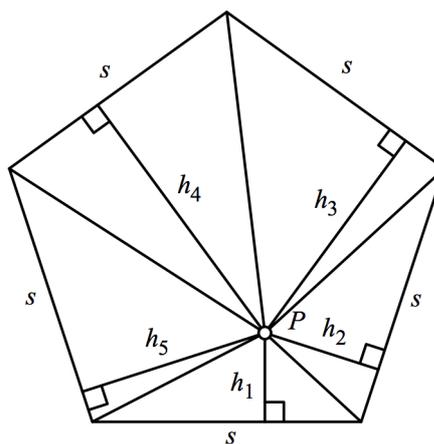


Abb. 5: Regelmäßiges Fünfeck

**Frage 5:** Wie ist es mit regelmäßigen Vielecken gerader Eckenzahl?

### 4. Gleichseitige Vielecke

Der Beweis für die regelmäßigen Vielecke benützt nur die Gleichseitigkeit des regelmäßigen Vieleckes, nicht aber seine Gleichwinkligkeit. Daraus folgt, dass die Eigenschaft der konstanten Abstandssumme bereits für konvexe gleichseitige Vielecke gilt. Die Konvexität ist wichtig, wie die Abb. 6 lehrt. Die Summe der Abstände von  $P$  zu den Seiten ist deutlich kleiner als die Summe der Abstände von  $Q$  zu den Seiten.

Wenn wir allerdings je nach Halbebene auch negative Abstände zulassen und ihre Summe algebraisch rechnen, können wir die Bedingung der Konvexität weglassen.

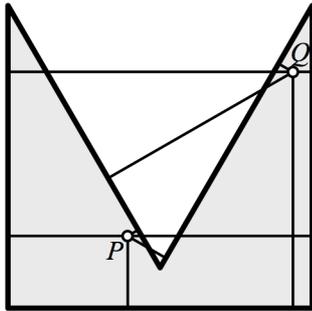


Abb. 6: Nicht konvexes gleichseitiges Vieleck

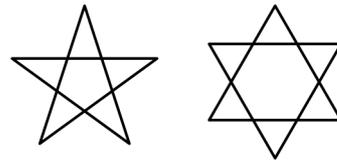


Abb. 7: Pentagramm und Davidstern

**Frage 6:** Wie ist es im Pentagramm oder im Davidstern (Abb. 7)?

## 5. Gleichwinklige Vielecke

Die Abstandseigenschaft gilt allerdings auch für gleichwinklige Vielecke. Um dies einzusehen, gehen wir von einem regelmäßigen Vieleck aus und verschieben eine oder mehrere Seiten parallel (Abb. 8).

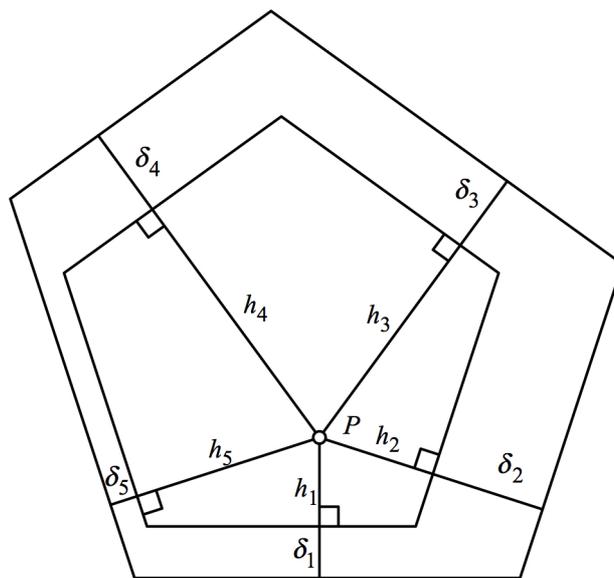


Abb. 8: Parallele Verschiebung der Seiten

Für die neue Abstandssumme erhalten wir:

$$\sum_{k=1}^m (h_k + \delta_k) = \sum_{k=1}^m h_k + \sum_{k=1}^m \delta_k$$

Die Abstände  $\delta_k$  und damit der Zusatzterm rechts ist nicht von der Lage des Punktes  $P$  abhängig und daher auch konstant.

## 6. Überlagerungen

Aus zwei Polygonen mit konstanter Abstandssumme können wir durch Überlagerung und Durchschnittsbildung ein neues Polygon mit konstanter Abstandssumme gewinnen. Die Abstandssumme der Überlagerung ist die Summe der Abstandssummen der beiden Startpolygone. Abb. 9 zeigt die Situation für die Überlagerung eines gleichseitigen Dreiecks mit einem Rechteck.

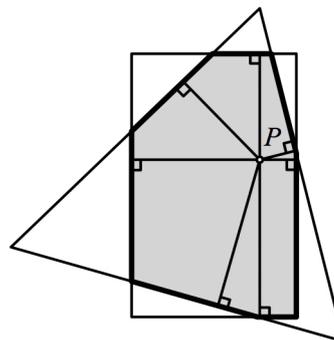


Abb. 9: Gleichseitiges Dreieck und Rechteck

## 7. Allgemeiner Fall

Wir suchen ein allgemeines Kriterium für eine konstante Abstandssumme. Dazu fragen wir zunächst umgekehrt, wie sich in einem beliebigen Polygon bei Verschieben des Punktes  $P$  die Abstandssumme ändert.

### Änderung der Abstandssumme:

Zur Berechnung von Abständen von einer Geraden benötigen wir den Normaleinheitsvektor dieser Geraden (Prinzip der HESSESchen<sup>2</sup> Normalform). Verschieben wir einen Punkt  $P$  um einen Vektor, so ist die Änderung seines Abstandes von einer Geraden die Projektion des Verschiebungsvektors auf den Normaleinheitsvektor dieser Geraden, also das Skalarprodukt des Verschiebungsvektors mit dem Normaleinheitsvektor der Geraden. Bei mehreren Geraden ist die Änderung der Abstandssumme die Projektion auf die Vektorsumme der Normaleinheitsvektoren der beteiligten Geraden. Abb. 10 illustriert den Sachverhalt für ein Dreieck. Die resultierende Vektorsumme ist fett eingetragen.

Genau für ein gleichseitiges Dreieck verschwindet die Vektorsumme.

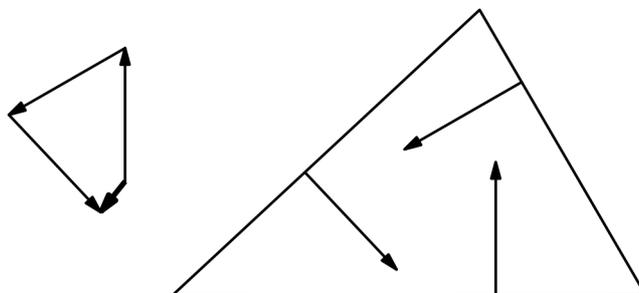


Abb. 10: Summe der Normaleinheitsvektoren

### Konstante Abstandssumme:

Aus unseren Überlegungen folgt: In einem Polygon ist die Abstandssumme genau dann konstant, wenn die Summe der nach innen gerichteten Normaleinheitsvektoren verschwindet.

Die Abb. 11 zeigt, wie wir nun ein solches Polygon konstruieren können. Wir zeichnen zuerst ein geschlossenes gleichseitiges Vektorpolygon, also das „Normalenbild“ des zukünftigen Polygons. Anschließend zeichnen wir ein zum Normalenbild passendes Polygon. Wir haben viele freie Parameter.

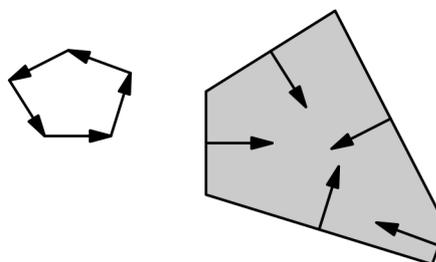


Abb.11: Konstruktion

<sup>2</sup> In der HESSESchen Normalform  $ax + by - c = 0$  einer Geraden ist  $a^2 + b^2 = 1$ . Otto Ludwig Hesse (\* 22. 4. 1811 in Königsberg, + 4. 8. 1874 in München) lehrte in Königsberg, Halle, Heidelberg und TH München Mathematik.

## 8. Bearbeitung der Fragen

**Bearbeitung der Frage 1:** Für den Beweis des Satzes von VIVIANI gibt es verschiedene Möglichkeiten.

*Erster Lösungsweg:* Verschieben von Dreiecken:

Abb. 12 skizziert einen Verschiebungsbeweis mit Dreiecken. Dieser Verschiebungsbeweis zeigt zudem, dass die Summe der Abstände gleich groß ist wie die Dreieckshöhe.

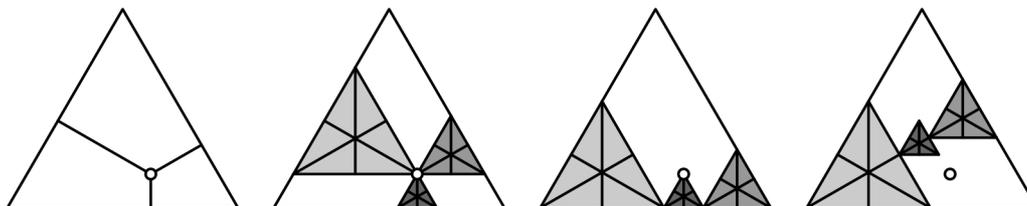


Abb. 12: Verschiebungsbeweis

Beweise dieser Art finden sich als Bilderfolgen und Proofs without words in CLAUS [3] S. 139, KAWASAKI [6] S. 213 und NELSEN [7] S. 15.

*Zweiter Lösungsweg:* Verschieben des Punktes:

Wir verschieben den Punkt  $P$  zunächst parallel zu einer Dreiecksseite (Abb. 13a). Einer der drei Abstände bleibt dabei unverändert. Die beiden anderen Abstände verändern sich so, dass der eine um genau so viel verkürzt wird wie der andere verlängert. Ihre Gesamtsumme bleibt daher unverändert.

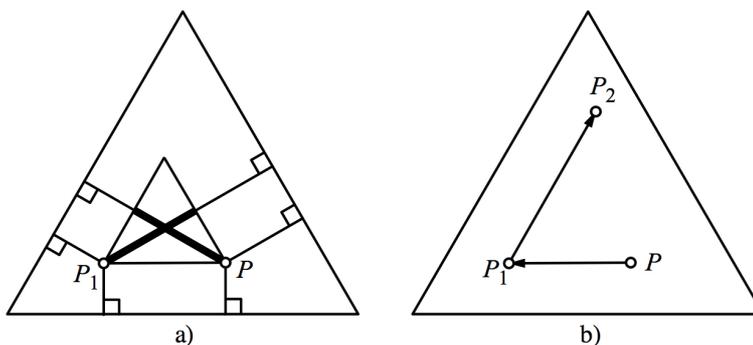


Abb. 13: Verschiebung des Punktes parallel zu Dreiecksseiten

Eine beliebige Verschiebung des Punktes  $P$  kann nun in zwei Schritten ausgeführt werden (Abb. 13b), wobei die erste Verschiebung parallel zu einer Dreiecksseite erfolgt und die zweite Verschiebung parallel zu einer anderen Dreiecksseite.

*Dritter Lösungsweg:* Flächenberechnung:

Wir berechnen die Dreiecksfläche auf zwei Arten (Abb. 14): Dreiecksfläche =  $\frac{as}{2} + \frac{bs}{2} + \frac{cs}{2} = \frac{hs}{2}$

Somit ist  $a + b + c = h$ ; die Summe der Abstände ist also invariant.

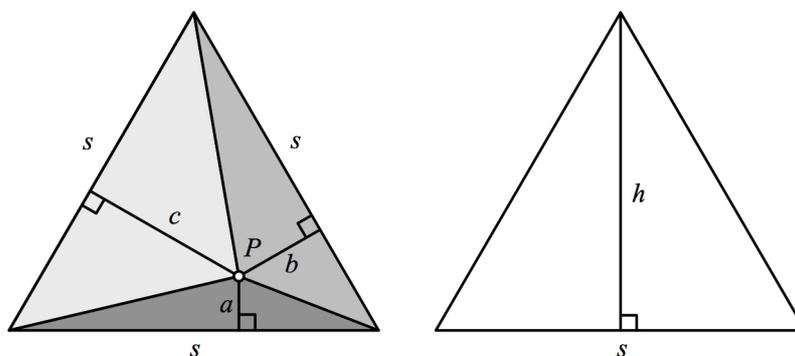


Abb. 14: Flächenberechnung

Rechnerische Beweise geben COXETER, GREITZER [4] S. 93 sowie GOOD, CHIPMAN [5]. In beiden Fällen wird der Satz nur inhaltlich gegeben, der Name VIVIANI aber nicht erwähnt.

*Vierter Lösungsweg: Kaleidoskop:*

Wir kaleidoskopieren das Dreieck, das heißt wir spiegeln es sukzessive an den Dreiecksseiten (Abb. 15).

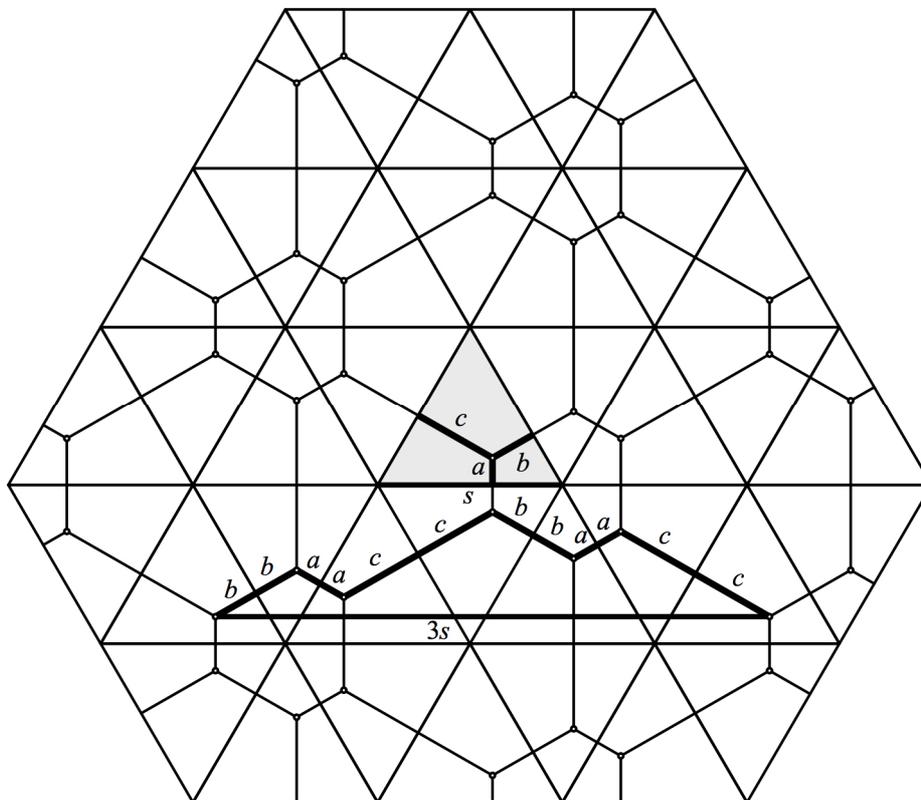


Abb. 15: Kaleidoskop

In Abb. 15 ist nun ein Zickzackweg mit der Länge  $2b + 2a + 2c + 2b + 2a + 2c = 4(a + b + c)$  eingetragen. Der Shortcut, also der direkte Weg vom Anfangspunkt bis zum Endpunkt des Zickzackweges hat die Länge  $3s$ . Die einzelnen Abschnitte des Zickzackweges sind gegenüber dem Shortcut um  $\pm 30^\circ$  geneigt. Bei ihrer Normalprojektion auf den Shortcut haben wir also einen Verkürzungsfaktor  $\cos(\pm 30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866$ . Somit

$$\text{ist: } 4(a + b + c) \frac{\sqrt{3}}{2} = 3s \quad \Rightarrow \quad a + b + c = \frac{\sqrt{3}}{2} s = h$$

Die Abstandssumme ist also invariant.

Beispiele dafür, wie man das Dreiecksgitter als Problemlösemethode anwenden kann, findet man unter anderem in BANEJA [2] Seite 231 und COXETER, GREITZER [4] Seite 93.

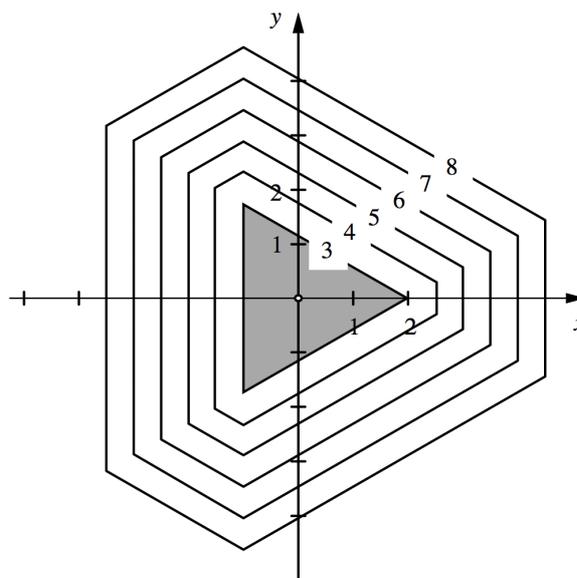
*Fünfter Lösungsweg: Niveaulinien*

Die drei Geraden mit den Geradengleichungen  $x \cdot \cos\left(k \frac{2\pi}{3}\right) + y \cdot \sin\left(k \frac{2\pi}{3}\right) + 1 = 0$ ,  $k \in \{1, 2, 3\}$  begrenzen ein gleichseitiges Dreieck. Die drei Geradengleichungen sind in der Hesseschen Normalform. Daher gibt die Funktion

$$f(x, y) = \sum_{k=1}^3 \left| x \cdot \cos\left(k \frac{2\pi}{3}\right) + y \cdot \sin\left(k \frac{2\pi}{3}\right) + 1 \right|$$

die Summe der Abstände eines Punktes  $P(x, y)$  von den Dreiecksseiten.

Abb. 16 zeigt den Niveaulinienplot für diese Funktion. Für Punkte im gleichseitigen Dreieck haben wir das konstante Niveau 3. Außerhalb des Dreieckes steigen die Funktionswerte an.



Wenn wir in der Funktion  $f(x, y)$  die Betragsstriche weglassen, also mit der Funktion

$$g(x, y) = \sum_{k=1}^3 \left( x \cdot \cos\left(k \frac{2\pi}{3}\right) + y \cdot \sin\left(k \frac{2\pi}{3}\right) + 1 \right)$$

arbeiten, sind auch negative Abstände möglich. Wegen

$$\frac{\partial}{\partial x} g(x, y) = \sum_{k=1}^3 \cos\left(k \frac{2\pi}{3}\right) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial y} g(x, y) = \sum_{k=1}^3 \sin\left(k \frac{2\pi}{3}\right) = 0 \quad \text{sowie} \quad g(0,0) = 3$$

ergibt sich die konstante Funktion  $g(x, y) = 3$ .

**Bearbeitung der Frage 2:** In einem nicht gleichseitigen Dreieck ist die Abstandssumme nicht invariant. Wird der Punkt in Richtung des spitzesten Winkels verschoben, vergrößert sich die Abstandssumme (Abb. 17).



Abb. 17: Veränderung der Abstandssumme

**Bearbeitung der Frage 3:** Einer der Abstände muss negativ gerechnet werden.

**Bearbeitung der Frage 4:** Ein krummlinig begrenztes Beispiel ist der Kreisring (Abb. 18).

**Bearbeitung der Frage 5:** Regelmäßige Vielecke gerader Eckenzahl sind Durchschnitte von Parallelstreifen.

**Bearbeitung der Frage 6:** Im Kernbereich ist die Abstandssumme invariant. In den Spitzenbereichen muss derjenige Abstand, welcher zum Kernbereich weist, negativ gerechnet werden.

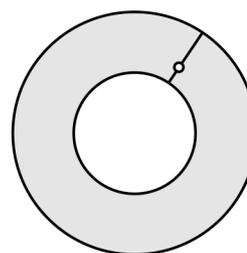


Abb. 18: Kreisring

## 9. Literatur

Alsina, C., Nelsen, R. B.

[1] Bezaubernde Beweise: eine Reise durch die Eleganz der

Mathematik. Berlin: Springer Spektrum 2013

- Banea, H. [2] Probleme de matematică traduse din revista sovietică Kvant, Vol. I, Editura didactică și pedagogică, București 1983
- Claus, H. J. [3] Einführung in die Didaktik der Mathematik. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft 1995
- Coxeter, H. S. M., Greitzer, S. L. [4] Zeitlose Geometrie. Stuttgart: Klett 1983
- Good, W. R., Chipman, H. H. [5] Plane Geometry. Philadelphia, London, Chicago: J.B. Lippincott Company 1930
- Kawasaki, K.-I. [6] Proof Without Words: Viviani's Theorem. Mathematics Magazine, Vol. 78, No. 3, p. 213, 2005
- Nelsen, R. B. [7] Proofs Without Words: Exercises in Visual Thinking. Washington, DC: Math. Assoc. of America 1993

#### Anschrift der Autorin und des Autors:

Dr. Emese Vargyas  
Johannes Gutenberg-Universität  
Institut für Mathematik  
Staudingerweg 9  
55099 Mainz  
Deutschland  
e-mail: vargyas@uni-mainz.de

Dr. Hans Walser  
Gerlikonerstrasse 29  
8500 Frauenfeld  
Schweiz  
e-mail: hwalser@bluewin.ch  
www.walser-h-m.ch/hans

Eingereicht am 31. 1. 2015.