Karlhorst Meyer

Beobachten und Auswerten nicht linearer Geometrie[1]

1. Einleitung

Wir leben in einer Zeit, in der die Schule glaubt, Unterrichtsstoff so einschränken zu können, dass der verbleibende Rest von *allen* Schülern[2] verstanden wird. Eigenartigerweise zeigt sich dann nach jeder Stoffreduktion, dass es immer noch Schüler gibt, die wenig verstehen und deshalb wird weiter „entfrachtet“, was nachweisbar im Fach Mathematik seit 1880 Mode ist, als damals ein Arzt erkannt hatte: „Mathematik macht Jugendliche krank“ (siehe LORINSER 1836 „Zum Schutze der Gesundheit in Schulen“ nach KATJA KRÜGER [1]).

In Wirklichkeit werden die Reduktionen auch dadurch verursacht, dass zu wenige Lehrerinnen und Lehrer einen *übergeordneten* Lehrplan verfolgen, weil sie sich schon lange auf Einzelbeispiele der Mathematik zurückgezogen haben. Fragt man vor einem solchen Vortrag einen ihrer Vorgesetzten, was man als Vortragender tun soll und kann, kommt sehr schnell die Antwort: „Bringen Sie vor allem schöne Beispiele, am besten verteilen Sie hierzu ein Manuskript“. Bezogen auf Anfänger ist dieser Standpunkt durchaus berechtigt, aber man sollte Beispielmaterial auch an sie nicht weitergeben, ohne die verbindenden Aspekte und ihren Stellenwert für das Gesamtcurriculum zu nennen. Abgesehen von den Anfängern ist es für alle anderen sicher besser, nicht in der häuslichen Bibliothek (sprich „Internet“) nach Beispielen zu suchen, sondern geeignete Beispiele im Alltag ohne Bibliothek zu erkennen – oben heißt es *zu beobachten* – und zu verwerten – oben *auswerten* genannt.

Auch das Hochschulcurriculum wird seit geraumer Zeit „entfrachtet“, weil der Auftrag, Studenten im Studium an die Forschung heranzuführen, nicht mehr gestattet, manches zu lehren von dem man glaubt, hierauf verzichten zu können, auch wenn die betroffenen Berufe noch durchaus ein Interesse an solcher Lehre hätten. So werden für Lehramtskandidaten kaum mehr **Reelle Zahlen bzw. Elementargeometrie** gelesen. Auch ist interessant, dass man glaubt, bei Ingenieuren auf Konstruktive Geometrie verzichten zu können, weil ja die Schule Darstellende Geometrie lehrt, was aber außerhalb von Österreich im deutschsprachigen Raum nicht mehr geschieht. Man darf auch nicht übersehen, dass zwar der Computer die Zeichenarbeit abnimmt und doch raumgeometrische Kenntnisse vorhanden sein müssen, wenn man nicht auf „Besonderheiten der Software“ hereinfallen will (siehe z. B. Kapitel 2.2.5). In Wirklichkeit sind Vorlesungen, auf die heute verzichtet wird, nicht mehr forschungsrelevant und deshalb haben Hochschullehrer an ihnen wenig Interesse.

Man kann an der Schule keine Wiedereinführung verlorener Dinge initiieren, weil es mittlerweile kaum noch einen Lehrer gibt, der solches vermitteln könnte. Also ist *doch* die Universität gefordert, die entstandenen Lücken zu schließen.

Der Streichungsprozess geht an den Universitäten noch weiter: Ein Bundesland hat beobachtet, wie nur noch einige Studenten die Vorlesungen **Grundlagen der Geometrie, Algebra und Zahlentheorie** besucht haben und will deshalb diese Traditionsvorlesungen für Gymnasiallehrer aus der Studienordnung streichen, weil man glaubt, hier würde für Lehrer nur Unwichtiges vermittelt.

In den Schulcurricula der einzelnen Länder kommt heute praktisch nur noch lineare Geometrie vor, wenn man von dem Wenigen an Kreisen und Kugel absieht, die aber dann beim Rechnen auch gemieden werden; denn wenn man keine Kenntnisse hat, führt ja der Schnitt zweier Kreise auf ein Problem der Ordnung 4, was ein Schüler i. Allg. nicht lösen kann. In vielen Bundesländern finden am Lehrplan Kürzungen statt, siehe **Darstel-**

[1] Anschließend an den Vortrag „Lineare Geometrie am Gymnasium reicht nicht, wenn die Abiturienten Mathematik anwendende Berufe ergreifen wollen“, gehalten an der Friedrich-Schiller-Universität Jena am 2. 11. 2004.
[2] Der Leser möge entschuldigen, wenn zur Textvereinfachung nur Schüler, Lehrer usw. genannt werden.

lende Geometrie, sphärische Trigonometrie, komplexe Ebene, Kegelschnitte, geometrische Ortsaufgaben, Parameter-Darstellung von Kurven, Polarkoordinaten, Krümmungsuntersuchungen in der Analysis u. v. m.

Auf der anderen Seite sind die Erwartungen der Abnehmer der Gymnasialabsolventen eher größer als kleiner geworden. Das beginnt bei **Lehrlingen** mit den modernen computergesteuerten Werkzeugmaschinen und wirkt sich vor allem bei Studenten aus, deren hohe Abbrecherquote (40% bis 60% der Studienanfänger) in den uns berührenden Fächern weniger durch nicht verstandene Vorlesungen als durch fehlende Schulerfahrung im Rechnen und Zeichnen ihre Ursache hat, wie uns Professor Dr. Pfeiffer von der TU München vor einigen Jahren belegt hat (siehe PFEIFFER [1]). Man würde heute bereits 30% der Reifeprüflinge für Mathematik anwendende Berufe benötigen, Tendenz steigend. Wir müssen deshalb nicht „Lehrpläne entfrachten", sondern uns bemühen, einem größeren Schülerkreis die ursprüngliche Freude an Mathematischem zu erhalten und die Chance zu nutzen, die Schüler *mehr zu lehren*. Hierzu werden wir uns auch bequemen müssen, mit der Mathematik im Unterricht *anders* umzugehen.

Sicher reicht es nicht, wenn sich der Lehrer in jeder Oberstufenklasse des Gymnasiums bemüht, die Analysis zu begründen und deshalb jedes anschaulich verständliche Sätzchen beweist. Ganz Ähnliches gilt für den Geometrieunterricht. Wir müssen Schwerpunkte setzen, die aber auch bisher vernachlässigte Bereiche *exemplarisch* und *vor allem einprägsam* auseinandersetzen. Ich will das, was ich meine, anhand einiger Thesen festhalten:

- Zuerst braucht man **Wissen**, um Mathematik zu machen. Aus diesem Grund muss der Unterricht zukünftig mehr Wert auf die Entstehung von Wissen und auf dessen Erhaltung legen.

- Man braucht aber auch **Ideen** und **Fantasie**, um zu mathematischen **Vermutungen** zu kommen. Hierzu muss man vor allem in der Geometrie **Zusammenhänge sehen, *beobachten* können**. Der Lehrer muss allmählich seine Schüler befähigen, *selbständig zu beobachten*.

- Hat man eine Vermutung, die „vernünftig" zu sein scheint, kommt ein **Beweis**, **eine gewisse Art der Auswertung**. Erst, wenn man einen Beweis erfolgreich abschließen kann, hat man einen Satz gefunden.

- Im Unterricht muss nicht jeder Satz bewiesen werden. Oft reicht es, einen Satz plausibel zu machen und mitzuteilen, wer ihn bewiesen hat. Auch sollte jeder Lehrende so viel beweisen, dass der Lernende die Methoden der einzelnen Theorie aber auch ihre Grenzen beherrschen lernt.

- Anwender haben mir gerade in letzter Zeit deutlich werden lassen, dass der Beweis nicht nur die beschriebene innermathematische Bedeutung hat. Anwender schreiben häufig ihre Überlegungen unvollständig auf, so dass z. B. ein Nachfolger nicht mehr verstehen kann, was einst überlegt worden ist. Hier entsteht auch eine Aufgabe für die Schule im Bereich Beweisen: Beweise halten in ihrer Niederschrift **mathematische Ideen** so fest, dass ein anderer sie **nachvollziehen** kann. Auch dieses ist eine Art des *Auswertens von Beobachtetem*, d. h. Erkanntem.

Man muss heute für sehr viel mehr Menschen Mathematik-Vorlesungen halten, als dies noch vor 50 Jahren der Fall war. Hinsichtlich didaktischer Erfordernisse muss man aber leider zugeben, dass sich nur sehr selten der Stil der Mathematik-Vorlesungen gegenüber damals geändert hat. Unter dem Druck, eine neue Generation an die mathematische Forschung innerhalb von 10 bis 12 Semestern heranführen zu müssen, steigt man in die Mathematik mit Darstellungen ein, die zwar häufig noch rein sprachlich den Zusammenhang mit geometrischen Ursprüngen, z. B. beim Terminus „Raum", vermuten lassen, der Student aber weit überfordert ist, solche Zusammenhänge von sich aus zu erkennen, wenn er nicht bereits auf der Schule – oder wie DIEUDONNÉ in seinem Cours d'analyse in der Einleitung andeutet – in einem einschlägigen Vorkurs Anschauungsmaterial kennen gelernt hat. Leider ist dies nicht immer gegeben. Nur selten erkennen so z. B. Ingenieurstudenten, weshalb sie sich mit Analysis mit all den Konvergenzkriterien befassen sollen, wenn der Bezug zu ihrem angestrebten Beruf nicht hergestellt wird oder zumindest geklärt wird, weshalb es nicht reicht, mit dem Computer sich stabilisierende Zahlenkolonnen zu beschaffen.

Bei Hochbegabten kann man solche Mängel nicht feststellen; sie überspielen Lücken der Schule, sie helfen sich selbst. Nur leider ist der Bedarf an Nachwuchskräften in unserer High-Tech-Gesellschaft so groß, dass man ihn mit den Hochbegabten allein nicht abdecken kann.

Hier beginnt das Bemühen um eine bessere Schule, die uns das angenehme Leben in einer Industrienation auch noch in Zukunft ermöglichen soll. Schlimm ist nur, dass erforderliche Ideen für die Schule seit langem schon unbekannt sind und man sie deshalb wieder von außen an das Gymnasium heranschaffen muss. Schlimmer noch ist der Umstand, dass die Vor- wie auch Fortbildung der Lehrerschaft häufig nicht ausreicht, Einschlägiges für die Schule durch die Lehrer selbst aufzubereiten.

Wie man zu mathematischen Ideen im Rahmen des Schulunterrichts durch *Beobachten* kommen kann, wird im Folgenden auseinandergesetzt:

Abbildung 1 besteht nur aus Kreisbögen und Strecken. Sie ist eine frühe Studienarbeit im Maschinenbau. Es steckt eine Menge Schulgeometrie in der Zeichnung, die die Universität oder Fachhochschule stillschweigend vom Gymnasialbesuch her als bekannt voraussetzt; dies gilt vor allem dann, wenn die Querschnittsfläche berechnet werden soll.

Es handelt sich um einen Querschnitt eines Ventils. Die in der Strömungsmechanik berechneten Wandungen werden durch sich berührende Kreisbögen angenähert. Der theoretische Hintergrund fehlt dem Studenten noch zum Zeitpunkt, in dem er diese Zeichnung zu fertigen hat.

Sicher, es gibt hierzu auch einfachere Beispiele, etwa die Ausrundungen der Gehsteige bei einer Straßenkreuzung; das wäre dann ein einführendes Beispiel für die Schule. Hier soll zunächst das schwierige Beispiel vorgeführt werden:

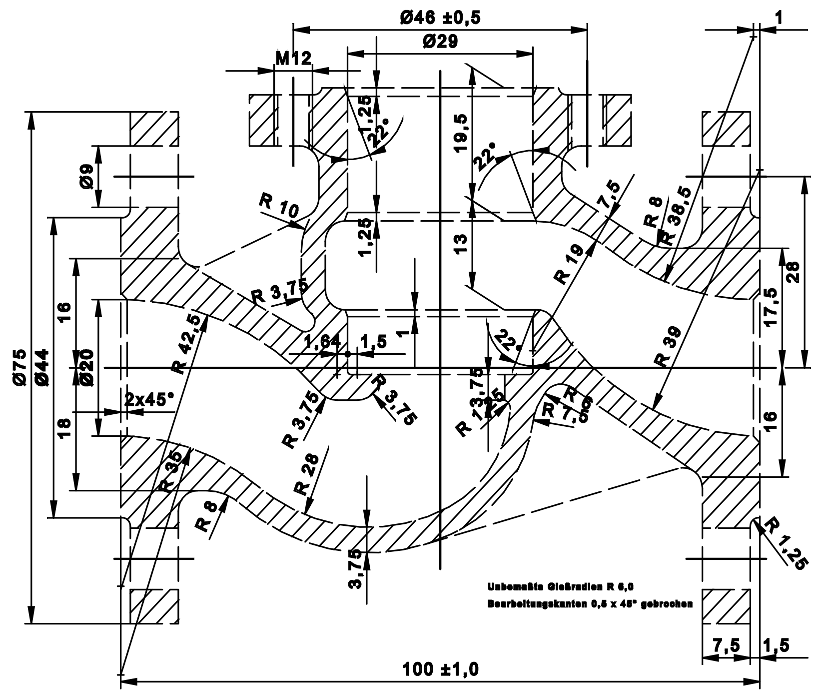

Abb. 1 Studienarbeit

2. Ideen für einen nicht nur linearen Geometrieunterricht

2.1 Themen ab der fünften Jahrgangsstufe

2.1.1 Beobachten und Zeichnen

Der mathematische Laie bezieht seine Meinung über Mathematik in aller Regel aus dem von ihm besuchten Unterricht. Sehr häufig ist er davon überzeugt, dass **allein die Logik** zu mathematischen Erkenntnissen führt und deshalb eigentlich gar nichts Neues in der Mathematik erforscht werden kann. Meist ist ihm unverständlich, dass allein **Experimentieren**, also das Rechnen von Beispielen oder das Anfertigen von Skizzen, mathematische Zusammenhänge sichtbar werden lässt, die dann anschließend erst – oft in einem mühsamen zweiten Anlauf – ins mathematische Gebäude eingereiht werden, sprich bewiesen werden. Häufig wird also die Unkenntnis des Laien von einem Unterricht verursacht, der das Experimentelle der Mathematik meidet.

Der Geometrie-Anfangsunterricht an der Schule hat auch das Ziel, **Zeichnen und Skizzieren** zu lehren, um Schüler hinzuführen, anderen Personen mathematische Inhalte zu erklären. Umso näher hierbei eine Skizze der „Wirklichkeit“ kommt, desto mehr regt sie die eigene Vorstellungskraft und auch die unseres Gegenüber an. Und jede Zeichnung hat eigentlich dieses Ziel.

Man stellt die folgende Aufgabe: Ein Polizeiauto fährt nachts auf einem Kreis um einen Verbrecher, den es trotz eines Suchscheinwerfers auf dem Fahrzeugdach nicht sehen kann. Will der Schüler die Ursache hierfür einem anderen erklären, so ist er gut beraten, mit einer Zeichnung zu erklären.

Der Schüler muss deshalb frühzeitig ermutigt werden, selbstständig geeignete Skizzen anzufertigen, er muss aber auch lernen, entscheidende Dinge an Zeichnungen zu erkennen. Gute Schüler einer 5. Klasse (andere später) erkennen dann auch, wie man vorhandene Zeichnungen besser machen kann:

Gegeben ist eine Kugel mit Nordpol und Äquator und ein Punkt P der nördlichen Halbkugel. Durch N und P wird eine Gerade festgelegt, die die Äquatorebene in P’ schneidet. Der Schüler betrachtet Abbildung 2 und argumentiert etwa wie folgt:

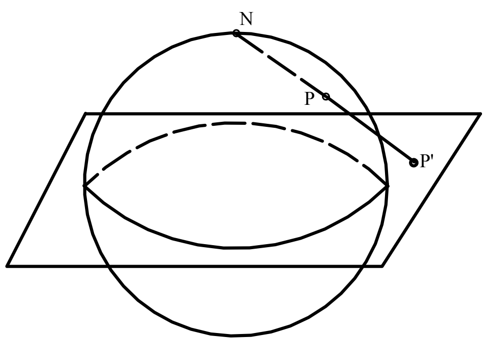

Abb. 2 Aus der mathematischen Literatur

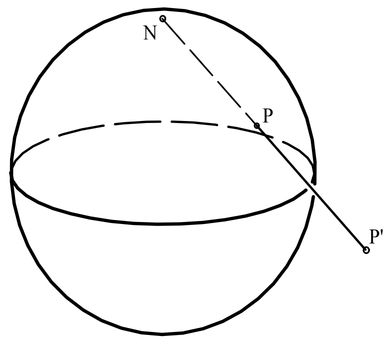

Abb. 3 Bessere Zeichnung

Der Äquator ist ein Kreis, der überall glatt ist, also in der Ansicht keine Spitze haben kann. Ob der Schüler „sieht“, dass der Nordpol nicht auf dem Umriss der Kugel liegen kann, ist unwahrscheinlich. Die Gerade „geht nach vorne“, also muss P’ auch „vorne“ liegen; usw.

Die Frage ist: „ Wie trainiert man hierzu die Schüler?“ Vor einiger Zeit hat KRÄMER [1] gotische Fenster u. ä. von Sechsklasslern (zu Beginn eines Schuljahres, also mit den Kenntnissen einer Klasse 5) abzeichnen lassen, ohne dass irgendwelche geometrischen Sätze über Kreise bekannt waren. Die Schüler haben die Fenster erst nachzeichnen können, als sie u. a. *beobachtet* hatten, dass an Berührstellen und „glatten“ Übergängen die Mittelpunkte angrenzender Kreisbögen mit dem Berührpunkt auf einer Geraden liegen müssen.

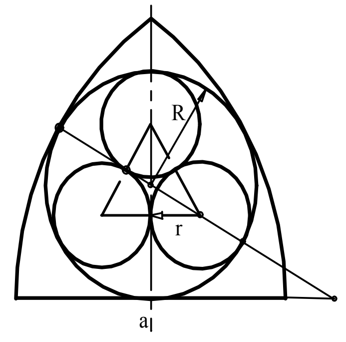

Abb. 4 Gotisches Fenster vereinfacht

Sind solche Kenntnisse wirklich wichtig?

Geraden und Kreise sind die einfachsten geometrischen Punktmengen, die in der Technik oft dazu dienen, andere Kurven zu approximieren. Zum anderen dienen Kreise dazu, möglichst glatte Übergänge – sprich **Ausrundungen** – im Straßenbau aber auch Maschinenbau zu bekommen. Abbildung 1 wie die folgenden Abbildungen 5 und 6 werden von Erstsemestlern als Übungsaufgaben gezeichnet (u. U. auch mit CAD), wobei aber häufig zu beobachten ist, dass Studenten gerade die oben angesprochenen Kenntnisse fehlen. Die mathematischen Vorlesungen wie auch Ingenieurvorlesungen gehen hierauf nicht ein oder zumindest zu spät, wenn die Studenten längst in einem höheren Semester sind.

Wünschenswert wäre, wenn Schüler und Lehrer selbständig solche Beispiele *finden* und dann *beobachten* könnten, um sie schließlich *auszuwerten*, indem sie mathematische Gesetzmäßigkeiten, die zu einer Konstruktion führen, erforschen.

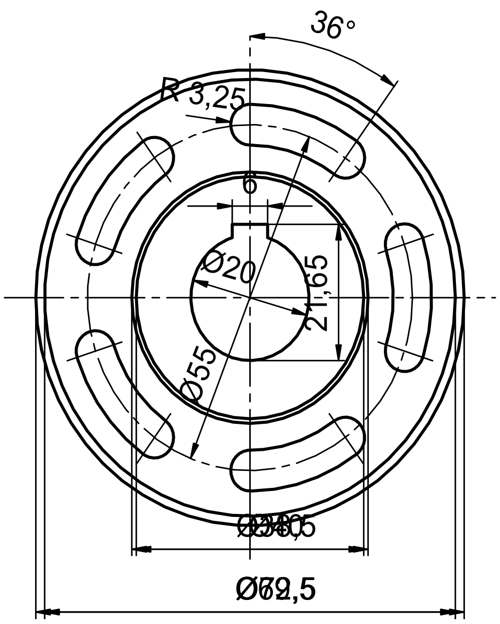

Abb. 5 Frühe Studienarbeit

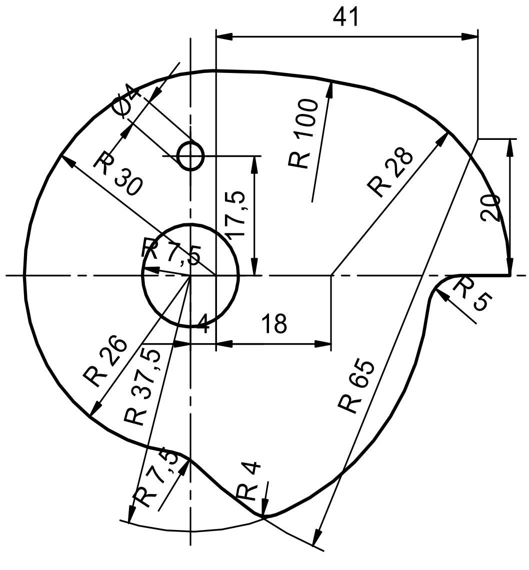

Abb. 6 Frühe Studienarbeit

2.1.2 Mathematik im Erdkundeunterricht

In vielen Bundesländern beginnt der Erdkundeunterricht in Klasse 5 mit dem, was man früher mathematische Geographie in Klasse 10 genannt hat. Ob das gut ist oder vermieden werden soll, sei dahingestellt, wenngleich es manchmal zu empfehlen ist, eine gemeinsame Fachsitzung zwischen Geographielehrern und Mathematikern zu halten, um den Erdkundelehrern auseinanderzusetzen, welche mathematischen Probleme in ihrem Fach in Klasse 5 als gelöst vorausgesetzt werden. Tragisch ist nur, dass im Mathematiklehrplan vieler Bundesländer in der Klasse 10 zwar die Kugel behandelt wird, dann aber auch kaum mehr gelehrt wird, als der Geographielehrer in Klasse 5 bereits als Allgemeinwissen der Gymnasialneulinge vorausgesetzt hat.

Es folgen Kugeleigenschaften für Klasse 10, auf die man zumindest hinsichtlich eines anschließenden Ingenieurstudiums nicht verzichten kann:

- **Definition:** Die Menge aller Punkte P des Raumes, die von einem festen Punkt A gleiche Entfernung r haben, bilden eine Kugel; liegen die Punkte darüber hinaus in einer Ebene, so bilden sie einen Kreis. Man möge beachten, der Kreismittelpunkt ist so noch nicht definiert. Unmittelbar folgt:
- **Satz:** Der ebene Schnitt einer Kugel ist leer oder einpunktig oder ein Kreis. Es gibt Klein- und Großkreise.
- **Satz:** Lässt man einen Kreis um einen seiner Durchmesser rotieren, so entsteht eine Kugel.
- **Satz:** Falls eine Ebene eine Kugel in einem Kreis schneidet, fällt man das Lot vom Kugelmittelpunkt auf die Schnittebene, dann ist dessen Fußpunkt Mittelpunkt des Kreises.
- **Satz:** Die Gerade durch den Kugelmittelpunkt und den Schnittkreismittelpunkt steht auf der Schnittebene senkrecht.
- **Satz:** Die Senkrechte zur Ebene des Schnittkreises in dessen Mittelpunkt läuft durch den Kugelmittelpunkt.
- Geht man von einer Kugel aus und betrachtet alle Ebenen durch zwei Gegenpunkte der Kugel, so erhält man nur Großkreisschnitte. Man beachte, dass mit zwei Gegenpunkten auch der zugehörige Durchmesser in jeder dieser Ebenen liegt.
- **Satz:** Durch zwei Kugelpunkte, die nicht Gegenpunkte sind, lässt sich genau ein Großkreis legen.
- Allein mit Schultrigonometrie lässt sich begründen:
  Satz: Die kürzeste Entfernung zwischen zwei Kugelpunkten liegt auf einem Großkreis.
- **Satz:** Jeder Punkt auf der Kugel ist durch Angabe zweier Winkel und dem Kugelradius festgelegt.
- Die Parallelprojektion einer Kugel ist eine Ellipse (genannt Umriss), die Orthogonalprojektion ein Kreis (genannt Umriss). Projiziert man eine Kugel samt einem Großkreis orthogonal, so berührt die Bildellipse des Großkreises (die also keine Strecke ist) in 2 Scheiteln das Kugelbild. Projiziert man einen Kleinkreis, so sind die Umrissberührpunkte der Kleinkreisellipse nicht Scheitel. Sieht man den „Äquator“ einer Kugel als Ellipse, so kann der zum Äquator gehörige Nordpol nicht auf dem Kugelumriss liegen.

Vielen Buchautoren bis hin zu Wissenschaftlern sind solche Sätze scheinbar unbekannt. An der Schule muss man sie nicht alle beweisen, oft wird es genügen, dass die Schüler ihre Richtigkeit einsehen.

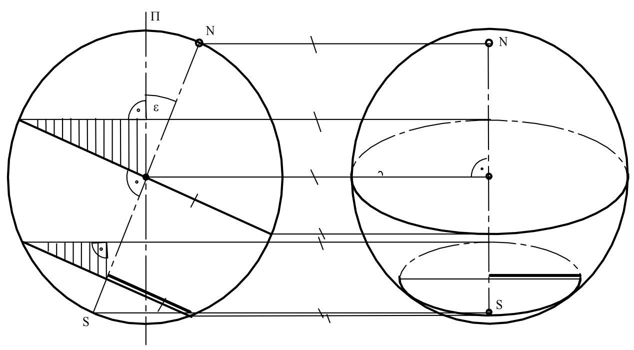

Abb.7 Kugel mit Groß- und Kleinkreis

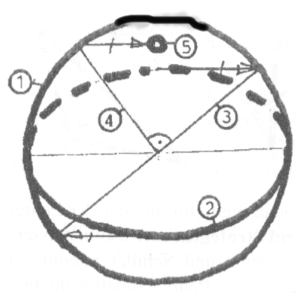

Abb.8 Freihandzeichnung einer Kugel

Wichtig scheint zu sein, Schüler *erkennen* zu lassen, was z. B. alles an einem Bild wie oben in den Abbildungen 2 und 3 rund sein muss. Dann kommt das Hinterfragen, das *Auswerten*, wie etwa in Abbildung 7 dargestellt. Erst jetzt entsteht vertieftes Verständnis, das dann z. B. angehenden Lehrern ermöglicht, Abbildung 8 als Freihandzeichnung an die Tafel zu zaubern; hierbei sind Linien eingezeichnet, die der Lehrer sich während des Zeichenvorgangs „nur denkt".
In einer Technik, die z. B. Kugellager benutzt, sind solche Kenntnisse „lebensnotwendig". Und es ist auch klar, dass in einem Studium keine Zeit ist, diese an sich für das Gymnasium bestimmten Inhalte an der Universität zu lehren.

2.1.3 Gleichdicke

Zu oft bringt der Geometrieunterricht nur statische Beispiele und keine solchen, die Bewegungsabläufe haben. Dabei ist des Deutschen liebste Beschäftigung Autofahren und was bewegt sich nicht alles an einem Auto. Zwei Gegenstände „rollen aneinander schlupffrei ab" liefern hierbei eine wichtige Definition, die man nicht lernen muss, wenn man beobachten kann:

Definition: Zwei Kurven (K) und (C) rollen aneinander schlupffrei ab, wenn die so genannte *Rollbedingung* erfüllt ist, d. h. wenn für die Bogenlänge s_1 längs (K) und dem „gleichzeitig" zurückgelegten Weg s_2 längs (C) (siehe Abbildung 9) gilt:

$$s_1 = s_2$$

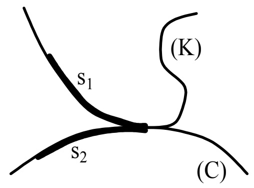

Abb. 9 schlupffreies Abrollen

Lässt man z. B. einen Kreis auf einer Geraden schlupffrei abrollen, so kann man den Kreisumfang bestimmen.

Allgemein: Lässt man eine Kurve auf einer Geraden schlupffrei abrollen, so erhält man die durchlaufene Bogenlänge. Dieses Verfahren führt nur zu Näherungslösungen, da die Schlupffreiheit technische Probleme bereitet. Solche Beobachtungen braucht man nicht zu *lernen*, wenn man sie einmal gesehen und erkannt hat.

Will man nun hiermit Technische Anwendungen bereits in frühen Klassen (siehe MEYER U. A. [1], Seite 140) auswerten, so greift man auf obige Definition zurück: Es werden die Bausteine eines Wälzlagers (siehe Abbildung 10) erklärt und dann gefragt:

a) Wie oft dreht sich eine Walze um ihre eigene Achse, wenn der 36-mm-Kreis 1500 Umdrehungen macht?
b) Wie oft dreht sich hierbei die Achse der Walze um die Achse des Lagers?

Im Planetengetriebe der Abbildung 11 sind die drei Kreise k_1, k_2 und k_3 jeweils so zu schalten, dass auf einen Kreis die Kraft eines Motors gegeben wird, während von einem anderen Kreis diese Kraft weitergegeben wird an die Antriebsachse eines PKWs.

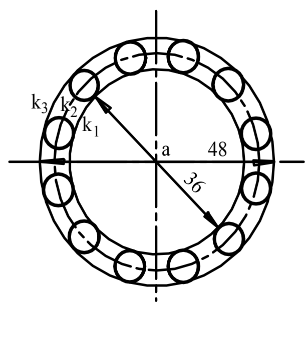

Abb. 10 Wälzlager

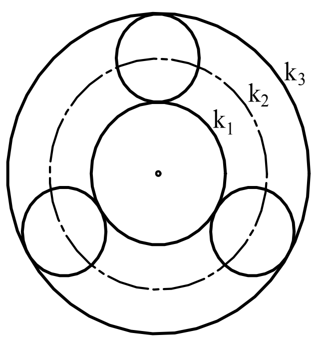

Abb. 11 Planetengetriebe

a) Wie viele Übersetzungsverhältnisse ergeben sich? Stelle die Werte der Übersetzungsverhältnisse in einer Tabelle zusammen.
b) Wann erhält man gegensinnige Umdrehungen?

Was ist nun *eine* Dicke einer Kurve; selbstverständlich muss die Kurve eine geschlossene sein. Als Dicke definiert man dann den Abstand der Geraden g, h (siehe Abbildung 12):

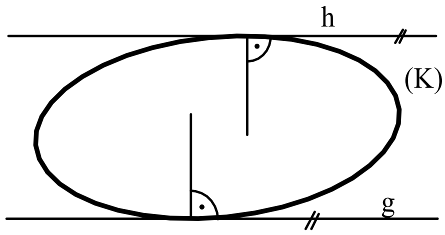

Abb. 12 Dicke einer geschlossenen Kurve

Auch hierbei handelt es sich um eine *Beobachtung*, die man nicht auswendig lernen muss, wenn man sie einmal *gesehen* hat.

Man möge keine Bedenken haben, in einem solchen Unterricht viele geometrische Definitionen ungeordnet zu benutzen. Ich glaube, man sollte zukünftig einen geordneten Aufbau der Schulfächer gegenüber einer Unordnung anhand *einprägsamer Beispiele* abwägen, um zu vermeiden, dass so viele mathematische Begriffsbildungen der Schule zu rasch in Vergessenheit geraten.

Satz: Der Kreis ist ein Gleichdick, d. h. zu *jeder* Tangente gibt es eine zweite parallele im Abstand des doppelten Radius.

Hier stellt sich also die Frage, ob es auch Gleichdicke gibt, die keine Kreise sind. Um die Diskussion zu beleben ist es zweckmäßig, zunächst einmal ein Gleichdick zu zeigen, das kein Kreis ist (siehe Abb. 13). Die Schüler finden den Konstruktionsweg dieses Gleichdicks. Wiederum erhebt sich die Frage, ob es weitere gibt. Man schneidet irgendwelche geschlossenen Kurven aus und stellt experimentell fest:

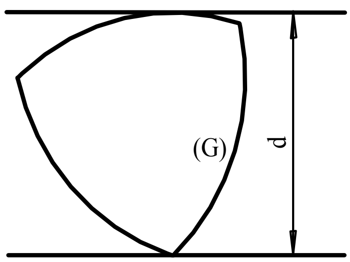

Abb. 13 Gleichdick

Satz: Jedes Gleichdick ist konvex.

Erfreulich ist, wenn Schüler finden, dass man mit jedem Gleichdick weitere über die Parallelkurven des gefundenen Gleichdicks bekommt, wenn man an den „Ecken“ passende Ausrundungen einfügt. Sehr selten finden Schüler einen weiteren Weg, Gleichdicke aus Kreisen zu konstruieren, wie dies in Abb. 14 geschehen ist. In einer höheren Klasse kann man dann nochmals etwas systematischer auf die Problematik der Gleichdicke ein-gehen (siehe MEYER [1] bzw. ZEITLER [1], wenngleich auch hier darauf hingewiesen werden muss, dass die Behauptung von ZEITLER, der Rotor des WANKEL-Motors sei ein Gleichdick, falsch ist).

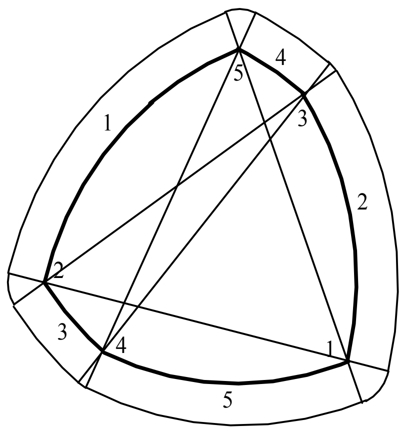

Abb. 14 Gleichdick aus Kreisbögen

Schüler finden den Begriff der Stützgeraden:

Definition: g ist eine Stützgerade einer Kurve, wenn g einen Punkt mit der Kurve gemeinsam hat und die ganze Kurve auf einer Seite von g liegt.

Wie bereits das Obige zeigt, muss g nicht notwendig Tangente an die Kurve sein.

Satz: An jede konvexe Kurve gibt es zu jeder Richtung genau zwei Stützgeraden (vgl. Abb. 12).

Hauptsatz über Gleichdicke: Eine konvexe Kurve ist genau dann ein Gleichdick, wenn die Verbindungsgerade der Berührpunkte von je zwei parallelen Stützgeraden auf diesen senkrecht steht und durch jeden Berührpunkt ein Kreis geht, dessen Mittelpunkt im gegenüberliegenden Berührpunkt liegt und der das Gleichdick ganz einschließt.

Selbstverständlich fußt ein Beweis auf den Erkenntnissen der Kinematik, die wir am Gymnasium durchaus nicht lehren wollen. Die aber im Hintergrund eines solchen Beweises stehende Anschauung lässt doch hinsichtlich des Verstehens des Hauptsatzes einige Überlegungen am Gymnasium zu:

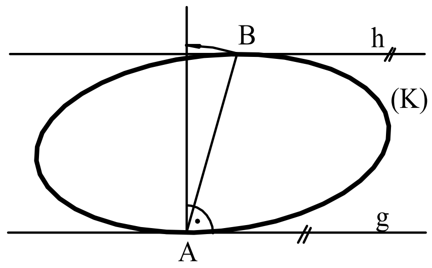

Abb. 15

1. Angenommen in nebenstehender Figur seien g und h parallel und die Gerade AB nicht auf g senkrecht. Hält man (k) in A fest und bewegt (K) um A ein bisschen längs eines Kreises um A in der eingezeichneten Form, so wird h angehoben. Die konvexe Kurve von Abbildung 15 kann also kein Gleichdick sein.

Hat der genannte Kreis einen kleineren Radius als der Krümmungskreis der Gleichdickberandung, so berandet die Gegenkurve ein nicht konvexes Flächenstück und man erhält auch deshalb kein Gleichdick (siehe die Abbildung 16). Beide Bedingungen sind also notwendig.

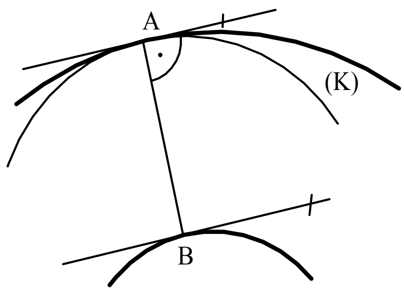

Abb. 16

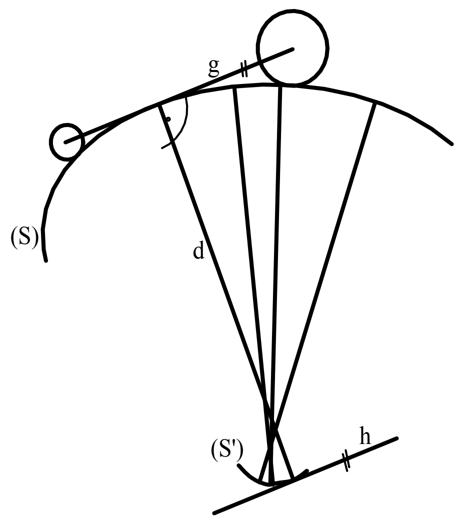

Abb. 17

2. Die in Abbildung 17 gezeichnete Maschine (g, d, h) läuft am Kurvenstück (S) entlang. Die Enden der Geraden h hüllen hierbei eine weitere Kurve (S') ein. (S) und (S') gehören dann offensichtlich zum Rand eines Gleichdicks, wenn sich die Gesamtheit der Kurventeilstücke schließt. Die genannten Bedingungen sind also auch hinreichend.

Man beachte: (S) muss nicht aus Kreisbögen zusammengesetzt sein (vgl. HILBERT-COHN-VOSSEN [1] und RADEMACHER-TOEPLITZ [1]). Eine Klassifikation aller Gleichdicke scheint bis heute nicht gelungen zu sein. Gleichdicke (wie Abbildung 13) wurden vermutlich erstmals von REULEAUX im Maschinenbau benutzt. Gelegentlich kommen sie dort noch heute vor.

2.2 Themen ab Klasse 8 bzw. 10

2.2.1 Immer noch Gleichdicke

Satz von BARBIER (1839 – 1889): Jedes Gleichdick der Dicke d hat den Umfang U = dπ mit der Kreiszahl π.

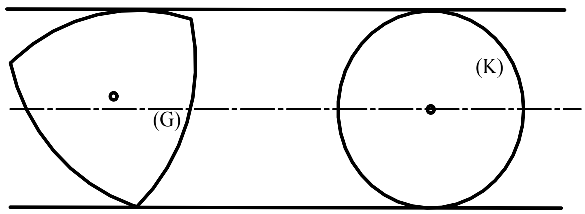

Abb. 18

Der Satz lässt sich sehr schön experimentell darstellen: In Abbildung 18 sind zwei Gleichdicke zwischen zwei Holzleisten (mit einer Nut) eingespannt. Bewegt man die obere Latte, so rollen beide Gleichdicke unterschiedlich rasch in der Nut. Markiert man die Berührpunkte mit der unteren Latte vor der Bewegung, so kann man feststellen, dass nach einem Vollumlauf beide Gleichdicke wieder ihre Marken unten haben. Also haben sie den gleichen Umfang, ist dann die naheliegende Auswertung. ZEITLER [1] gibt eine andere Begründung unter Zuhilfenahme eines Satzes von BUFFON an.

Für die Schüler ist sicher die folgende Mitteilung nach dem Bisherigen von Interesse:

Satz von BLASCHKE (1855 – 1962): Von allen Gleichdicken der Dicke d besitzt das Gleichdick der Abbildung 13 den kleinsten und der Kreis den größten Flächeninhalt (für den Beweis siehe z. B. JAGLOM, BOLTJANSKI [1]).

Was sind nun die Vorteile der einzelnen Gleichdicke?

! Vermutlich haben bereits die alten Ägypter die Sphinx und andere große Steine auf Rollen transportiert, deren Querschnitte durch die Abnutzung im Lauf der Zeit zu Gleichdicken geworden sind.

! Nur der Kreis hat beim Abrollen einen festen Mittelpunkt; deshalb kann man ihn als Rad benutzen.

! Beim Abrollen bewegt sich der Kreis (siehe die Abbildung 18) mit seinem Mittelpunkt und Schwerpunkt gleichmäßig, wohingegen sich das Gleichdick (G) ruckartig vorwärts bewegt. Das ist der entscheidende Grund, weshalb man früher beim Diatransport oder bei der Fadenspannung der Spinnereimotoren Gleichdicke zur Änderung der Bewegungsgeschwindigkeit einsetzte. Heute ist dies oft dank der Halbleitertechnik überflüssig geworden.

2.2.2 Viereckslehre

Ein Parallelogramm ist ein ebenes Viergelenk, ein Dreieck ist starr. Dieser Satz ist Gymnasiasten meist bekannt, aber sicher nicht:

Satz: Jedes Viereck ist ein Viergelenk, auch räumlich.

Der bastelnde Schüler kann weitaus vertiefter *beobachten* als das moderne Kind, das am Computer erzogen worden ist. Ein technisch hergestelltes Gelenk hat eine Drehachse, d. h. die anschließenden Schenkel bewegen sich – aus Herstellungsgründen – auf Kreisen in einer Ebene. So ist aber der Satz nicht gemeint. Die beiden Schenkel können sich mathematisch auch außerhalb einer wie oben festgelegten Ebene auf Kegelflächen bewegen. Hier zeigt sich also, dass eine durch *Beobachten gemachte Erfahrung* mathematische Auswertungen anders interpretieren lässt als beim Fehlen solcher Erfahrung. Weitere Beobachtungen:

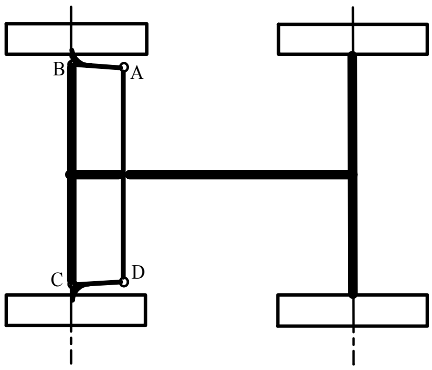

Abb. 19

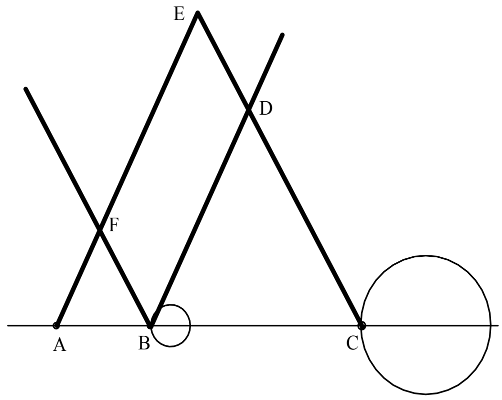

Abb. 20

Weshalb ist das Lenkgestänge eines PKWs oder LKWs (siehe die Abbildung 19) in Ruhestellung ein gleichschenkliges Trapez ABCD?
Begründung: Bei Auslenkung sollten sich im „wichtigsten" Lenkbereich die Achsen der beiden Vorderräder mit der starren Hinterachse „möglichst" in einem Punkt treffen, um das Schleudern des Fahrzeugs zu vermeiden.

Der STORCH-Schnabel (Abbildung 20) ist ein Parallelogrammgelenk. Was passiert in C, wenn B einen Kreis durchläuft und A festgehalten wird?

2.2.3 Parameterdarstellungen

Will man die Abhängigkeit einer Endlage von einer Ausgangslage beschreiben, so wird dies oft in den Naturwissenschaften, im Ingenieurwesen und wohl auch in der Wirtschaftswissenschaft nicht durch *einen* funktionalen Zusammenhang möglich sein. Man ist bereits zufrieden, wenn man durch zu wählende Parameter mehrere Funktionen aufstellen kann. Ob diese dann zu *einem* funktionalen Zusammenhang führen, bleibt zunächst unbeantwortet. Wie geschickt man die Parameter wählt, hängt von der eigenen Erfahrung und Beobachtungsgabe ab. In aller Regel schließt man aus bekannten Funktionen via Parameterdarstellung auf die erhoffte. Das geschieht zumindest in den Vorlesungen zur Physik, Mechanik und dem Ingenieurwesen ab der ersten Vorlesungsstunde im ersten Semester. Es ist deshalb unverständlich, wie Gymnasiallehrer während der vergangenen 50 Jahre dulden konnten, dass immer mehr die Parameterdarstellung von Funktionen aus dem Unterricht hinausgedrängt worden ist, bis heute schließlich nichts mehr davon übrig geblieben ist. Man behandelt zwar Sinus und Cosinus als Funktionen ihrer Argumente t und leitet sie ja auch aus einem um den Winkel t sich drehenden Kreis ab, das kommt aber nur am Anfang des Trigonometrieunterrichts vor und geht damit unter. Kaum ein Schüler weiß dann, dass diese beiden Funktionen eine Parameterdarstellung des Kreises bilden.

Sieht man von den wenigen Hochbegabten ab, so benötigen alle anderen einen diesbezüglichen gediegenen Unterricht am Gymnasium zur Vermeidung des Schocks, den die Mathematik und die sie anwendenden Studienrichtungen im ersten Semester der Mehrheit der Studenten bereiten. Weniger Studienabbrecher wären die Folge und damit könnte ein wesentlicher Beitrag zur Minderung der Hochschulkosten geleistet werden.

Beispiel: Auf einem festen Radius r eines Kreises wird ein Punkt P beim schlupffreien Abrollen des Kreises auf einer Geraden in Abhängigkeit vom Abrollwinkel t beobachtet. Man findet für die Koordinaten (x|y) (siehe Abbildung 24):

x = tr – a sin t
y = r – a cos t

In der Herleitung dieses einfachen mathematischen Zusammenhangs steckt eine Menge *Erfahrung im Beobachten*, die in aller Regel ein Abiturient ab 2005 nicht mehr haben kann.

Die in der Abbildung 25 dargestellte Kurve kann allgemein nicht in der Form y = f(x) geschrieben werden, weil z. B. für a größer als r kein Graph einer Funktion entsteht. Der gezeichnete Fall stellt die Kurve eines Pedalpunktes dar, die ein Fußgänger sieht, wenn ein Radfahrer ihm begegnet.

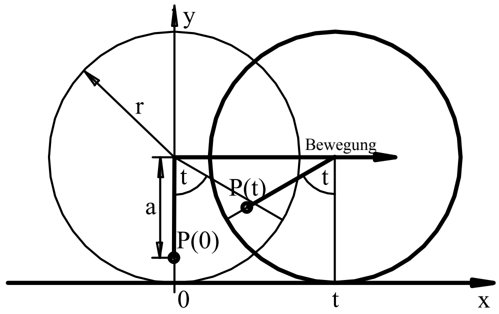

Abb. 24 Abrollen eines Rades

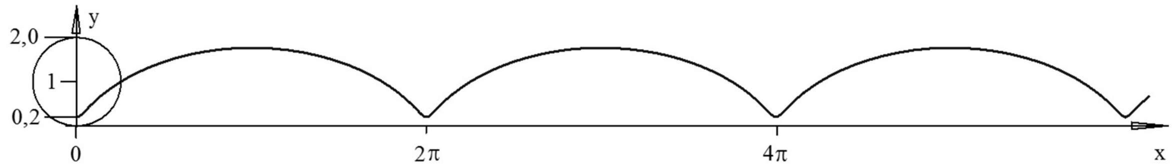

Abb. 25 Gewöhnliche Zykloide für r = 1,0 und a = 0,8

2.2.4 Kegelschnitte

Von der Kegelschnittlehre ist am Gymnasium bestenfalls noch eine Klassifikation dieser Kurven übrig geblieben. Was nutzt aber eine Klassifikation, wenn der Schüler über die Mathematik der Kegelschnitte nichts weiß, ja sich eigentlich gar nicht vorstellen kann, wo Kegelschnitte auftreten und wozu sie nutzen. Gerade heute in einer Zeit von dynamischer Geometriesoftware kann man ja doch sehr leicht Kegelschnitte bekommen, der zeichnerische Aufwand früherer Zeiten ist nicht mehr erforderlich. Weshalb besinnt man sich nicht auf diese wichtigen Kurven, deren Eigenschaften in der Physik, im Maschinenbau wie auch im Bauwesen eine große Rolle spielen? Eine Ursache ist wohl, dass man am Gymnasium schon immer in der Ebene stehen geblieben ist und sich scheut, räumliche Anwendungen mit einzubeziehen. Ganz nebenbei bemerkt, hätte man so auch schöne Beispiele beim Aufstellen der Gleichungen für die Flächen 2. Ordnung (vgl. MEYER [5]).

Bei den folgenden 5 *Beobachtungen* geht es nicht darum, dass im Unterricht jedes Beispiel bis in letzte Detail durchdacht wird. Vielmehr braucht man solche Beispiele, um die Schüler immer wieder zum Beobachten anzuregen, mathematische Zusammenhänge zu entdecken:

1. Nierensteinzertrümmerer nach DORNIER: Ein Halbellipsoid wird in Nierennähe auf die Haut so aufgesetzt, dass der Nierenstein in einem Brennpunkt liegt. Im anderen Brennpunkt wird ein Ultraschall erzeugt. Den Schallübergang an der Haut regelt ein Wasserkissen. Das Reflexionsgesetz an einer Ellipsenwand erhält man aus der Ellipsenkonstruktion mit Hilfe des Leitkreises.

2. Das einschalige Rotationshyperboloid wird durch Rotation einer Hyperbel um ihre Nebenachse erzeugt. Entstehung der Schatten auf der Abbildung: Den wahren Umriss erhält man durch die Berührpunkte der zueinander parallelen Sonnenstrahlen, d. h. ihre Gesamtheit liegt in der Polarebene zu einem Fernpunkt und ist deshalb eine Hyperbel, deren Bild den Schlagschatten ergibt. Das Ganze tritt auf bei Kühltürmen.

3. Wer einmal aus kongruenten Parabeln in parallelen Ebenen ein hyperbolisches Paraboloid gebastelt hat (siehe Abb. 26), wird nie mehr diese Schubfläche vergessen. In Näherung tritt dies beim Mahnmal von KENZO TANGE in Hiroshima auf (Abb. 27).

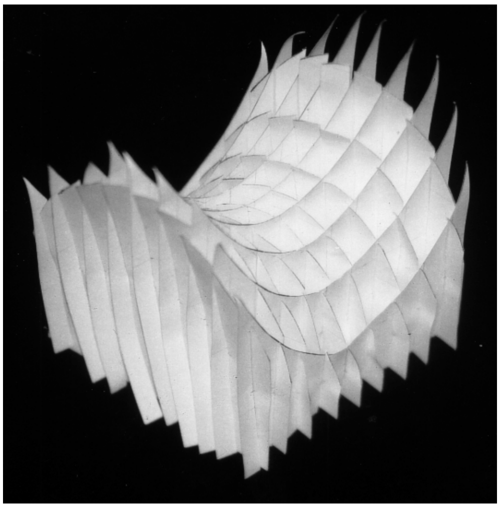

Abb. 26

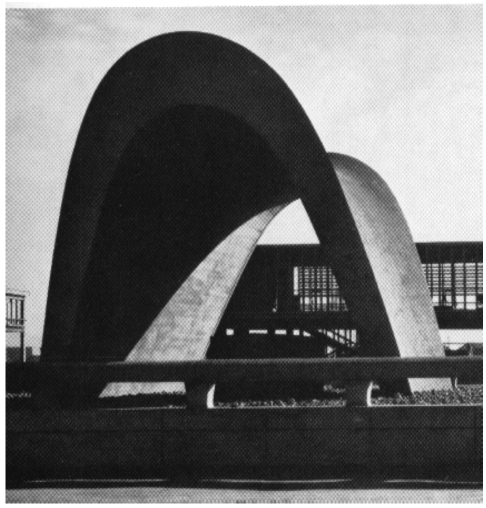

Abb. 27

4. Berechnung der Flächengleichung eines einschaligen Hyperboloids: Eine Hyperbel entsteht durch Rotation einer Geraden um eine zu ihr windschiefen Geraden. Es geht aber auch anders: Eine Hyperbel kann man um ihre Nebenachse so rotieren lassen, dass eine zusammenhängende Fläche, genannt **einschaliges Hyperboloid** entsteht. Wir überprüfen dies durch Rechnung mit Parametern:

   a) „Spielen mit dem Zeichengerät“ führt zu folgenden Beobachtungen: Der Abstand u (kürzeste Entfernung) steht zwischen zwei windschiefen Geraden seiner Lage nach auf beiden Geraden senkrecht; vergleiche Abbildung 28. So ist u senkrecht auf der z-Achse und auf der Geraden RP. Weil PQ parallel zur z-Achse gewählt werden kann, ist dann u Lot auf der Ebene PQR, d. h. dass sowohl RP wie auch w auf u senkrecht stehen. Die Gerade PR ist also bis auf Rotation um z festgelegt durch den Abstand u zur z-Achse und ihrem Neigungswinkel α zur x-y-Ebene.

   Wir lassen diese Gerade PR um die z-Achse rotieren. Jeder Punkt P auf ihr läuft dann längs eines Kreises mit der Gleichung $x^2 + y^2 = v^2$, wobei $v = \left|\overline{VP}\right| = \left|\overline{UQ}\right|$ gilt, da VPQU ein Rechteck ist.

   Nach Konstruktion gilt dann für jeden Punkt $P(x|y|z)$:

   $w = \dfrac{z}{\tan\alpha}$ und $u^2 + w^2 = v^2$. Andererseits läuft P auf einem Rotationskreis mit der Gleichung $x^2 + y^2 = v^2$. Setzt man in diese Gleichung die vorher abgeleiteten Beziehungen ein, so erhält man die Gleichung einer Fläche 2. Ordnung:

   $$x^2 + y^2 = u^2 + \frac{z^2}{\tan^2\alpha} \qquad (1)$$

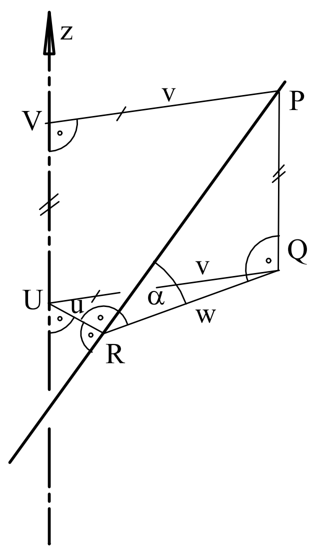

Abb. 28

b) Wir lassen die Hyperbel mit der Gleichung $\frac{y^2}{u^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$ um die z-Achse rotieren, so dass jeder Punkt $P(x\,|\,y\,|\,z)$ auf einem Kreis $x^2 + y^2 = v^2$ mit $\frac{y^2}{u^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$ also $v^2 = u^2 + \left(\frac{u}{b}\right)^2 z^2$ läuft. Setzt man dies ein, so erhält man $x^2 + y^2 = u^2 + \left(\frac{u}{b}\right)^2 z^2$. (2)

Wegen der Entstehungsgeschichte dieser Gleichung spricht man jetzt von der Gleichung eines einschaligen Rotationshyperboloids.

Offenbar gehen die Gleichungen (1) und (2) ineinander über, wenn man $b = u \cdot \tan\alpha$ setzt. Das bedeutet, dass das Hyperboloid eine Schar von Geraden trägt. Man kann mit derselben Methode leicht beweisen, dass es sogar eine 2. Schar von Geraden trägt, die gegenüber der x-y-Ebene ebenfalls den Winkel α haben.

5. Verschneidung zwischen Schraubregelfläche und Kegel: Auch Profisoftware, wie sie von Ingenieuren beim Konstruieren verwendet wird, „lügt“. Ich will an einem Beispiel auseinandersetzen, dass man beim Einsatz von CAD-Software aufpassen muss, was nur gelingt, wenn man über mathematische Erfahrungen verfügt, die meines Erachtens nicht im Hochschulbereich sondern bereits am Gymnasium erworben werden müssen:

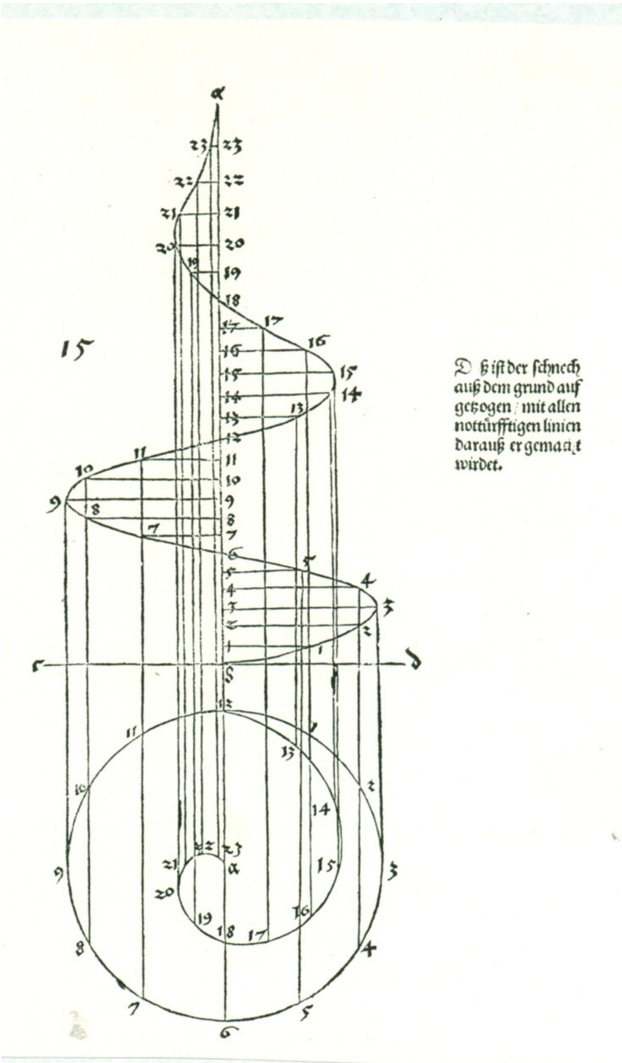

Abb. 29 ALBRECHT DÜRER

Zunächst findet man durch Betrachten zweier glatten sich schneidenden Flächen: Eine Verschneidungskurve zwischen zwei glatten, also differenzierbaren, Flächen hat in jedem ihrer Punkte eine Tangente, die demnach auch in den beiden Tangentialebenen der Flächen liegt, also Schnitt zweier Ebenen ist.

Da es in der Technik nicht möglich ist, eine Kegelspitze als mathematische Spitze zu erzeugen, kann man i. Allg. bei Ingenieursoftware nur Bilder von so genannten Kegeln bekommen, die an der Spitze eine Ausrundungskugel (u. U. mit sehr kleinem Radius), und deshalb z. B. bei senkrechter Kegelachse im obersten Punkt eine wohldefinierte waagrechte Tangentialebene haben. Verschneidet man nun diesen „Kegel" mit einer geschlossenen Schraubregelfläche, damit ein Korkenzieher entsteht, so hat dieser keine Spitze in Richtung der Achse, sondern eine Spitze senkrecht zur Achse, kann also als Korkenzieher nicht benutzt werden. Da war Albrecht Dürer [1] schon schlauer, wie Abbildung 29 zeigt.

2.3 Oberstufe

Nach den jüngsten Lehrplanänderungen wird noch im Oberstufenunterricht vor allem Vektorrechnung und Analysis gelehrt. Es ist bei diesen Änderungen bedauerlich, dass man einer Lehrergruppe nachgegeben hat, die schon seit langem auf den Vektorbegriff in der Mittelstufe verzichtet und alles vermieden hat, was sich nur in irgendeiner Form zur Analysis gehörig erwiesen hat. Zu letzterem sind vor allem Rechnungen mit Ungleichungen und Beträgen zu nennen, die durchaus im Algebraunterricht ab Klasse 7 ihren Platz haben, also ab dem Augenblick, wenn der Betrag und die Ungleichung eingeführt worden sind. Fehlen solche Vorerörterungen in der Mittelstufe wird der Einstieg in die Epsilontik der Analysis in der Oberstufe unnötig erschwert, da der Lehrer auf keine Vorerfahrungen mit Betragsungleichungen u. a. zurückgreifen kann.

Ähnlich verhält es sich mit der Vektorrechnung, die heute oft beim Skalarprodukt keine Verbindung zum Cosinussatz der Trigonometrie mehr herstellt, die vor allem aber im „Linearen" hängen bleibt, wenn es nur noch ums Verbinden und Schneiden von Punkten, Geraden und Ebenen geht, also man Probleme hat, die bis ins letzte Jahrhundert hinein ohne Vektoren mit linearen Gleichungssystemen gelöst worden sind. Der mathematische Laie hat dann den Eindruck, dass am Gymnasium in der Mathematik vor allem unnötig schwierige Schreibweisen eingeführt werden, die dazu dienen, Schülerinnen und Schülern das Leben schwer zu machen.

ZEITLER hat in den Achtzigern in Vorträgen des öfteren Differentialgeometrie in der Oberstufe postuliert, um diesem Trend ein Ende zu setzen. Was hat er gemeint? Was kann man darüber hinaus am Gymnasium realisieren?

2.3.1 Krümmungen in der Ebene

Nordrhein-Westfalen und Niedersachsen haben in jüngsten Oberstufenreformen auf die Epsilontik vollends verzichtet. Bayern will dies zwar nicht, begnügt sich zukünftig aber mit der 1. Ableitung. Man kann dann noch bei algebraischen Funktionen zwischen Maxima und Minima via der Monotoniegesetze unterscheiden – wenn dies auch zum Teil einen erheblichen Rechenaufwand bedeutet – bei transzendenten Funktionen geht dies aber nicht mehr. Es werden noch Tangenten und Normalen an Graphen algebraischer Funktionen untersucht, Krümmungsradien- und Kreise gibt es schon lange nicht mehr. Ich halte dies für einen unnötigen Rückschritt, auch wenn die Formel des Krümmungsradius am Gymnasium meines Erachtens nie hergeleitet, sondern früher einer Formelsammlung entnommen worden ist. Warum sollte man das auch nicht? Fast alle Mathematikanwender arbeiten so; deren Belange will man aber offenbar nicht sehen.

Wie wichtig es ist, in der Technik Krümmungen zu untersuchen, will ich an einem Beispiel aus dem Bauwesen erklären:

Straßenkurven müssen überhöht werden, wobei die Überhöhung vom Radius des die Straße (3-punktig) berührenden Kreises und der Fahrgeschwindigkeit abhängt. Dank seiner Beobachtungen beim Autofahren ist jedem Schüler sofort klar, dass man deshalb keinem Kreisbogen einer Rechtskurve einen solchen einer Linkskurve folgen lassen kann, denn man müsste ja beim Übergang schlagartig die Wagenlenkung von rechts nach links reißen, was ja gefährlich ist. Außerdem würde die linksseitige Straßenüberhöhung ruckartig in eine rechtsseitige wechseln. Spielzeugeisenbahnfans wissen: Steckt man zwei Schienen entsprechend dem eben Gesagten zusammen, so wird der Zug entgleisen. Man muss also sowohl im Straßenbau wie auch beim Eisenbahnbau die Rechtskrümmung nach null in eine Gerade auslaufen lassen und dann in umgekehrter Form in die Linkskurve gehen. Man spricht bei dieser Straßenform von einer so genannten Clothoide, deren dritte Ableitung noch stetig sein soll, wie eine deutsche Bauvorschrift verlangt. In Abbildung 30 sind jeweils die Krümmungsmittelpunkte M_i angegeben, die zu den Kurvenstücken (Kreise) k_i gehören. Man kann hier auf den Zusammenhang Evolute (die Menge der M_i) und Evolvente (die Kurve der r_i) zu sprechen kommen und Parallelkurven derselben Evolute untersuchen, was ja bereits im Zusammenhang mit den Gleichdicken schon geschehen ist.

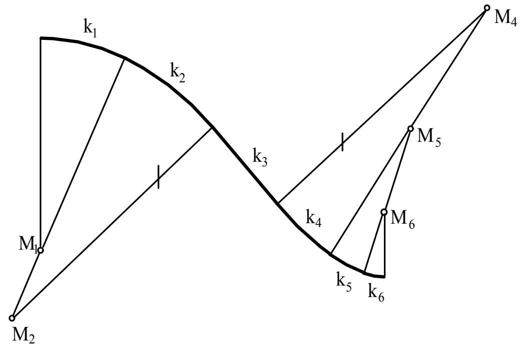

Abb. 30 Näherungsweise Clothoide

2.3.2 Anschauliche Differentialgeometrie

Wie in MEYER [4] berichtet wird, hat das Gymnasium Starnberg 1991 in seinem Mathematikseminar mit einer Gruppe aus interessierten Schülerinnen und Schülern der Jahrgangsstufen 9 mit 13 auf einer Klausurtagung anschauliche Differentialgeometrie gemacht. Es mag sein, dass wir dies den genannten Vorstellungen von ZEITLER entsprechend durchgeführt haben, wenngleich zugegeben werden muss, dass sich ZEITLER hierzu nach meinem Wissen nie genauer geäußert hat.

Das Hauptproblem des Schülerseminars ist das Einführen des Differenzierens gewesen, da den meisten Teilnehmern diese Technik nicht bekannt gewesen ist. Damals hat man den Weg der Algebra für die Ableitung algebraischer Funktionen gewählt (vgl. VAN DER WAERDEN [1] Seite 215 ff). Anschließend hat sich dann die erste Ableitung als Steigung der Tangente ergeben. Da sich der Pool der gebrochen algebraischen Funktionen als zu klein erwiesen hat, sind den Schülern die Ableitungen von Sinus und Cosinus mitgeteilt und auf den späteren Unterricht verwiesen worden. Diesen Weg kann ich heute nicht mehr empfehlen, da er auch für begabte Schüler recht langwierig ausfällt und man in der erforderlichen Zeit gleich die 1. Ableitung als Grenzwert einführen kann.

Kenntnisse über Vektoren sind damals in Bayern noch aus der Mittelstufe bekannt gewesen. Viel Zeit hat man für die GAUßsche Parameterdarstellung von Kurven und Flächen aufgewendet. Die Punkte der so definierten Kurven und Flächen wurden als finite Elemente dreidimensionaler Koordinaten in Schrägbilder oder auch in Modelle übertragen; heute ginge dies an der Schule auch mit dem PC. Schwierigkeiten hat u. a. der Parameterwechsel bereitet, wenn er Kurven bzw. Flächen unverändert lässt.

Gemäß dem Thema dieses Vortrages will ich mich auf einige Bemerkungen zum Zusammenhang *Beobachten – Auswerten* beschränken:

Zuerst ist vor den Schülerinnen und Schülern ein Draht verbogen worden. Man fragte sie, was sich an seiner Länge geändert habe.

Dann haben mehrere Schülerinnen und Schüler Drähte derselben Länge bekommen mit der Aufgabe, Vereinbarungen untereinander so zu treffen, um jeden Draht in die gleiche ebene Kurve zu verbiegen.

Überraschenderweise haben alle Schüler das Problem zunächst mit Koordinaten lösen wollen. Es wäre interessant, diesen Weg einmal genauer zu analysieren, weil auch immer wieder Ingenieure ihn zu gehen versuchen. Das Verhalten der Schüler wird wohl dadurch hervorgerufen, dass im Unterricht immer wieder Koordinaten unkritisch benutzt werden. Es ist gelungen, die Schüler davon mit dem Hinweis abzubringen, dass die zu konstruierende Kurve durch Daten *an der Kurve selbst*, also unabhängig von ihrer Lage zu einem Koordinatensystem, festzulegen sei. Biegung – Krümmung – haben dann die Schüler als Richtungsänderung aufgefasst und als Winkel in Abhängigkeit von der Drahtlänge angegeben. Mathematisch ausgedrückt entspricht das Vorgehen finiten Elementen. Die Schüler haben es dahingehend ausgebaut, dass die Kurve als Hüllgebilde approximierender Kreise festgelegt worden ist. Man hat notiert, an welcher Drahtstelle welcher Radius erforderlich gewesen ist und so gefunden:

Satz: Zu jeder ebenen Kurve gibt es in jedem Punkt Tangente, Normale und Krümmung, falls die Kurve und der Graph der Ableitung in dem Punkt „glatt“ sind.

„Glatt“ bedeutet, dass der Kurvenpunkt eine Tangente hat, also mindestens einmal differenzierbar ist.

Die Krümmung κ wurde als der Kehrwert des Krümmungskreisradius definiert, wobei der Kreis die Kurve dreipunktig berühren sollte. Legt man die Kurvenpunkte in Abhängigkeit eines Parameters fest, so war eigentlich allen Schülerinnen und Schülern klar, dass κ eine Funktion des Parameters t war und allein $\kappa(t)$ bis auf Bewegung in der Ebene die Kurve darstellte.

Satz: $\kappa(s)$ allein legt eine ebene Kurve fest, wenn der Parameter s die Bogenlänge der Kurve ist.

Ein Draht wird zur Kurve gebogen. Man *erkennt durch Beobachtung*: Wenn man die untersuchte Kurve in eine andere im Raum „verwandeln“ will, muss man den Draht aus der Ebene „herausbiegen“. Dieses zweite Maß in Abhängigkeit vom Kurvenparameter t nennt man Torsion $\tau(t)$. Damit steht aber auch fest:

Satz: Eine Kurve ist im Raum durch die Funktionen κ und τ festgelegt, wenn man hinreichende „Glattheit“ voraussetzen kann.

Drei Punkte der Kurve legen eine Ebene und einen Kreis in ihr fest. Fallen diese drei Punkte zusammen, so erhält man die Schmiegebene und den Schmiegkreis in ihr.

Diese Überlegungen müssen hier nicht weiter ausgeführt werden. Es soll nur noch eine Bemerkung über die Krümmung von glatten Flächen angefügt werden:

Allen Beteiligten haben an Kartoffelschnitten beobachtet, dass die Krümmung von Flächen aus der Krümmung von Schnittkurven festzulegen ist, aber in einem Flächenpunkt äußerst unterschiedliche Krümmungen zu beobachten sind, je nachdem unter welchem Winkel man die Fläche anschneidet. Als wir dann einen Motorradhelm zu Hilfe genommen haben, war „klar“, zunächst einmal nur Normalschnitte zu betrachten. Sehr schnell haben dann die Schüler erkannt, dass es in jedem Flächenpunkt eine minimale und eine maximale Normalkrümmung gibt, die offenbar stets aufeinander senkrecht stehen.

Wiederum an einem Apfel – besser an einer Kugel – ist anschließend der Satz von MEUSNIER untersucht worden, der zeigt, wie die Normalschnitte längs einer Flächentangente mit den schiefen Schnitten zusammenhängen.

Es wird nur erwähnt, dass die gefundenen Zusammenhänge ! so weit möglich ! formelmäßig erfasst worden sind.

3. Resümee

Gerade der letzte Abschnitt macht deutlich, dass es im vorliegenden Vortrag nicht darum geht, Vorlesungen der Hochschule ans Gymnasium zu holen, die dann alles bis ins letzte möglichst allgemein erklären und aufbauen. Bekanntermaßen leiden ja Hochschulvorlesungen daran, dass die Studenten den Wald vor Bäumen nicht sehen und häufig keinen Bezug zur Realität mehr herstellen können. Das sollte aber der Mathematik-Anwender stets. Vielleicht wird die Absicht am besten deutlich, wenn eine junge Kollegin zitiert wird, die 1991 das Schülerseminar über Differentialgeometrie besucht hat: „Jetzt verstehe ich endlich, was die zweisemestrige vierstündige Vorlesung mit Übungen in Differentialgeometrie in meinem Studium eigentlich beabsichtigt hat.“

Die vorgestellten Beispiele *können* durch andere ersetzt werden, ja ich möchte geradezu dieses Ersetzen als Unterrichtsziel ansehen. Ganz wichtig ist für einen solchen Unterricht, dass der Lehrer selbst ein „*Auge für diese Problematik*“ bekommt und in der Lage ist, solche Beispiele selbstständig zu *finden*, um den Schüler durch selbst gefundene Beispiele an die Mathematik heranzuführen. Auch muss es durchaus nicht so sein, dass man jedem Schüler im vorgeführten Umfang solche Beispiele an die Hand gibt. Fest steht nur, dass man endlich anfangen muss, überhaupt in diese Richtung zu gehen. Es bleiben die Bedenken vieler Kolleginnen und Kollegen, wann der Unterricht hierfür Zeit lässt, dies alles zu machen und vorzubereiten. In einem wöchentlich dreistündigen oder auch vierstündigen Mathematik-Unterricht in einer heute üblichen Gymnasialklasse schafft man das Dargestellte sicher nicht.
Damit reichen aber auch die Vorkenntnisse, die ein Gymnasialabsolvent ins Studium mitbringt, für ein Mathematik anwendendes Studium nicht mehr. Die Universitäten sind deshalb gut beraten, zukünftig Aufnahmeprüfungen zu verlangen.

Schülerinnen und Schüler, die durch außerschulischen Unterricht mehr Können erwerben als andere, werden zukünftig noch viel mehr Vorteile als schon jetzt haben. Wir werden deshalb eigene Nachmittagsschulen einrichten müssen, in denen man nicht nur Nachhilfe bekommt, sondern sich auch weiterbilden kann.

Die Bundesländer haben mit der Umstellung auf ein achtjähriges Gymnasium zum Teil einen anderen Weg vorgeschlagen: Wöchentlich erhält jeder Schüler zusätzlich zum Normalunterricht so genannte Intensivierungsstunden, die der Verein Begabtenförderung Mathematik e. V. seit 1996 als Zusatzunterricht oder Ergänzungsunterricht gefordert hat.

Der vor allem süddeutsche Vorschlag will in diesen Intensivierungsstunden die Klassen nach Können teilen: Das untere Drittel bekommt Nachhilfe im unterrichteten Stoff, das obere Drittel sollte jedenfalls weiter geführt werden, um die Bedürfnisse der Mathematik anwendenden Studienfächer wie Ingenieurwesen, Naturwissenschaften, Medizin, Betriebswirtschaft u. a. für die Studienanfänger abzudecken. Nur wenn man wieder den Unternehmen für die nächsten 20 Jahre einen geeigneten Nachwuchs mit gutem Gewissen mindestens in derselben Form wie die Volksrepublik China garantieren kann, wird man den High-Tech-Standort Mitteleuropa erhalten können.

Freilich – und das muss hier zugegeben werden – noch hat man gerade in Bayern für die Intensivierungsstunden kein Personal; auch scheint die Ausbildung der Lehrer in Mathematik nicht so zu sein, dass Lehrer einfach anfangen können, in den Intensivierungsstunden ein höheres Niveau zu erreichen. Sie sind wahrscheinlich auf einschlägige Lehrbücher angewiesen, die es nicht gibt und auch nicht klar ist, wer sie schreiben soll und kann. Aus diesem Grund gibt der Verein Begabtenförderung Mathematik e. V. die Zeitschrift „Mathematikinformation“ heraus, in der man immer wieder geeignete Vorschläge auch mit vielen Aufgaben samt Lösungen finden kann. Hinsichtlich der großen Reformaufgabe an allen Gymnasien in Mitteleuropa reicht das alles bis jetzt nicht. Deshalb der Aufruf: Fangen auch Sie an, sich Gedanken zu machen, helfen Sie mit. Gute Vorschläge werden gern in der zitierten Zeitschrift veröffentlicht.

Literatur

Dieudonné, Jean [1]: Cours d'analyse, Herrmann Paris

Dürer, Albrecht [1]: Unterweysung der messung/mit dem Zirkel un richtscheyt/ in Linien ebenen und gantzen corporen/ durch Albrecht Dürer zusamen getzoge und zu nutz alle kunstlieb habenden mit zu gehörigen figuren/ in Druck gebracht/ im jahr M.D.X.X.V. Nachdruck Verlag Walter Uhl, Unterschneidheim 1972

Hilbert, D. und Cohn-Vassen, S. [1]: Anschauliche Geometrie, Springer Berlin 1932

Jaglom, I. M., Boltjanski, W. G. [1]: Konvexe Figuren, Springer Berlin 1956

Krämer, A. [1]: Kreiskonstruktionen, Mathematikinformation Nr. 26 (1. 3. 1996, Seiten 33 - 40

Krüger Katja [1]: Erziehung zum funktionalen Denken – Zur Begriffsbildung eines didaktischen Prinzips, Logos Verlag Berlin 2000, 1999 Dissertation

Kruppa, E. [1]: Analytische und konstruktive Differentialgeometrie, Springer Wien 1957

Meyer, Karlhorst [1]: Kreise, Mathematikinformation Nr. 12 (10. 1. 1984)

[2]: Geometrische Örter oder Gerüste?, Mathematikinformation Nr. 34 Seiten 17 bis 30

[3]: Anwendungsaufgaben im Mathematikunterricht: Algebra und Geometrie, Hirschgraben Frankfurt 1980

[4]: Klassische Differentialgeometrie im Mathematikseminar des Gymnasiums, aus Förderung von Jugendlichen in der Mathematik (Herausgeber Wambach, Langmann) K. H. Bock-Verlag Bad Honnef 1993

[5]: Kegelschnitte II, Mathematikinformation Nr. 34 (2001), Seiten 5 - 16

Meyer, Karlhorst u. a. [1]: Brennpunkt Mathematik 6, Schroedel Schulbuchverlag GmbH Hannover 1989

Pfeiffer, Friedrich [1]: Schulmathematik aus Sicht des Ingenieurwesens, Mathematikinformation Nr. 34 (2001), Seiten 33 bis 35

Rademacher, H., Toeplitz, O.[1]: Von Zahlen und Figuren, Springer Berlin 1968

Reuleaux, F. [1]:	Die praktischen Beziehungen der Kinematik zur Geometrie und Mechanik, Vieweg Sohn Braunschweig 1900
van der Waerden, B. L.:	Algebra 1, Springer Berlin, Göttingen, Heidelberg, 4. Auflage 1955
Zeitler, H. [1]:	Über Gleichdicke, Didaktik der Mathematik, bsv München, Heft 4 1981 Seiten 250 bis 275.

Anschrift des Autors:
Dr. Karlhorst Meyer
Kyffhäuserstraße 20
85579 Neubiberg
e-mail: meyer@bfmathematik.info