Jo Niemeyer und Hans Walser

Papierfalten, Seilspannen, Goldener Schnitt und Hundekurve

Zusammenfassung: Ausgehend von einem Legespiel mit durch Falten halbierten Blättern oder aber durch wiederholten Einsatz des von den Ägyptern her bekannten Knotenseils kommen wir zum Goldenen Schnitt. Eine Variation des Verfahrens führt im Grenzfall zur Traktrix.

1. Papierfalten

Wir halbieren drei rechteckige Papierblätter gleichen Formates höhenmäßig durch Falten. Dann legen wir die drei Blätter aus gemäß Abbildung 1.

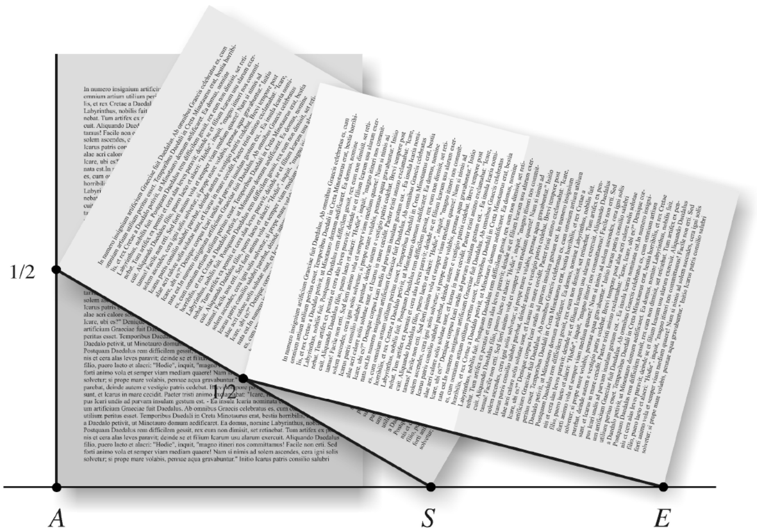


Abb. 1: Drei rechteckige Papierblätter

Aufgabe 1: In welchem Verhältnis teil der Punkt S die Strecke AE?

2. Seilspannen

Mit einem Knotenseil mit zwölf Knoten in gleichen Abständen kann das pythagoreische rechtwinklige Dreieck mit den Seitenlängen 3, 4 und 5 ausgespannt werden (Abb. 2, Schritt 1). Wir setzen nun weitere Knotenseile (mit denselben Knotenabständen) an und fragen nach dem entstehenden Teilverhältnis (Abb. 2, Schritte 2 und 3).

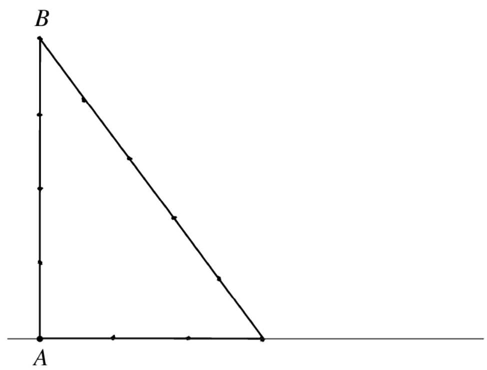
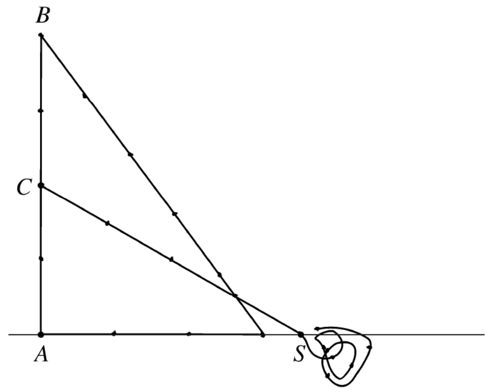
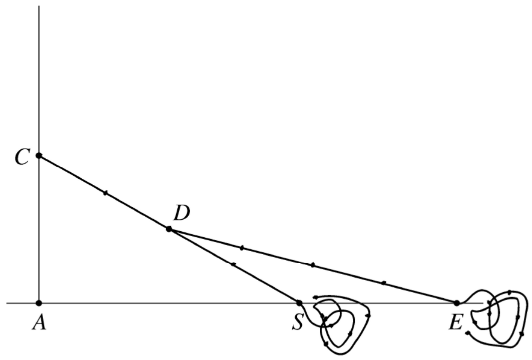


Abb. 2: Vorgehen in drei Schritten (Schritt 1)



Schritt 2



Schritt 3

Abb. 2: Vorgehen in drei Schritten (Fortsetzung)

Aufgabe 2: In welchem Verhältnis teilt der Punkt S die Strecke AE?

3. Variationen

Die Figur lässt sich in die kanonische Rosettenfigur einbetten (Abb. 3).
Durch Einzeichnen eines gleichseitigen Dreiecks (Abb. 4) finden wir einen Zusammenhang zur Figur von ODOM (vgl. [1], S. 83).

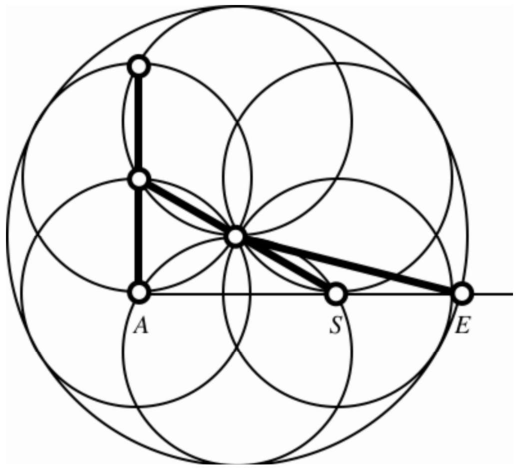


Abb. 3: Einbettung in Kreisrosette

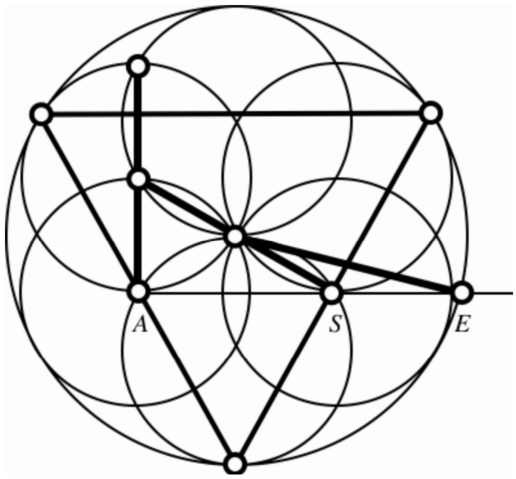


Abb. 4: Figur von ODOM

Unsere Ausgangsfigur lässt sich auch in ein Spiel mit Kreis, Quadrat und gleichseitigem Dreieck einpassen (Abb. 5).

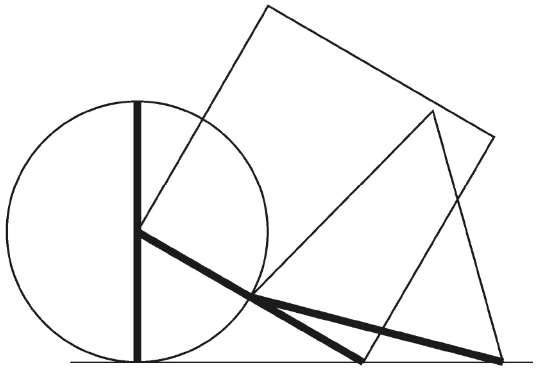


Abb. 5: Kreis, Quadrat und Dreieck

4. Wie geht es weiter?

Wir legen jeweils an den Mittelpunkt einer Strecke eine nachfolgende Strecke an. Die Abbildung 6 zeigt die ersten 7 Schritte.

Aufgabe 3: Wie lautet die Rekursionsformel für die Punkte auf der horizontalen Achse?

In unserem Beispiel haben wir die neuen Strecken jeweils in der Mitte der vorangehenden Strecken angesetzt. Wir können sie aber auch zum Beispiel im obersten Viertel ansetzen (Abb. 7).

Beim Papierfalten (vgl. Abb. 1) müssen wir die rechteckigen Papiere noch ein zweites Mal falten, um sie höhenmäßig zu vierteln. Beim Seilspannen (vgl. Abb. 2) haben wir direkt einen passenden Knoten zur Verfügung.

Aufgabe 4: In welchem Verhältnis teilt jetzt der Punkt S die Strecke AE?

Natürlich können wir auch hier die Konstruktionsschritte iterieren. Die Abbildung 8 zeigt die Situation für die ersten 10 Schritte.

Aufgabe 5: Die Abbildung 8 suggeriert, dass der dritte Punkt auf der x-Achse die x-Koordinate 1 hat. Stimmt das?

Aufgabe 6: Wie groß sind die fortlaufenden Teilverhältnisse auf der x-Achse?

Natürlich können wir noch näher an den oberen Punkt herangehen. In der Abbildung 9 sind die neuen Strecken jeweils beim obersten Sechzehntel der alten Strecke angesetzt. Es sind die ersten 50 Schritte dargestellt. Die Frage ist, welche Kontur sich ergibt, wenn wir sukzessive näher an den oberen Punkt herangehen. Darüber im nächsten Abschnitt.

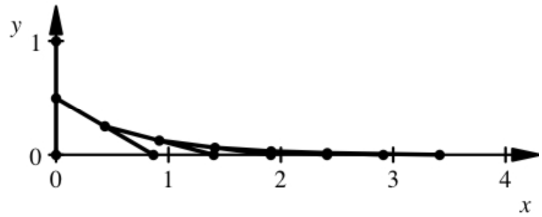


Abb. 6: So geht es weiter

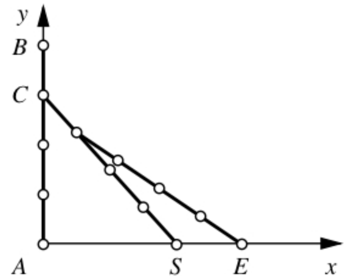


Abb. 7: Ansetzen im obersten Viertel

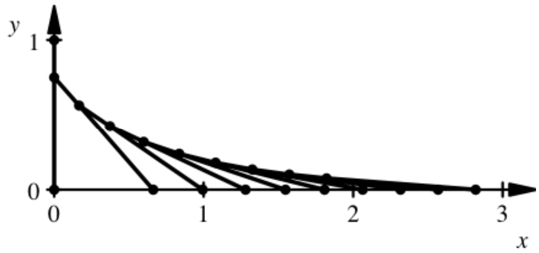


Abb. 8: Die ersten zehn Schritte

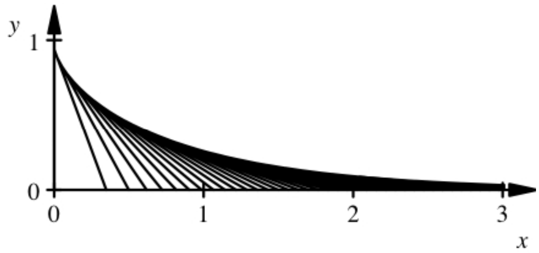


Abb. 9: Ansetzen beim obersten Sechzehntel

5. Die Traktrix

Unter der Traktrix (Schleppkurve oder Hundekurve) versteht man die Kurve, welche ein Punkt B beschreibt, der an einer Leine der Länge 1 von einem Punkt A am anderen Ende der Leine gezogen wird. In der Ausgangslage soll sich A im Koordinatenursprung befinden und B in der Position $(0|1)$. Dann bewegt sich A auf der x-Achse nach rechts.

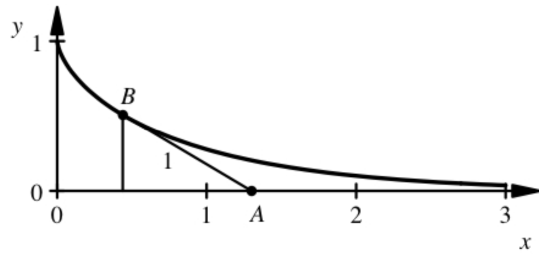


Abb. 10: Traktrix

Die Abbildung 10 zeigt die entstehende Traktrix. Aus der Vorstellung, dass der Punkt B ein angeleinter Hund sei, der vom Hundehalter A gezogen wird, ergibt sich die Bezeichnung *Hundekurve*. Eine Parameterdarstellung der Traktrix finden wir so: Aus dem in der Abbildung 10 eingezeichneten Stützdreieck lesen wir ab:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$$

Diese Differenzialgleichung lösen wir mit Separation der Variablen. Zunächst ist:

$$\int \mathrm{d}x = -\int \frac{\sqrt{1-y^2}}{y}\mathrm{d}y$$

Zur Lösung des Integrals rechts verwenden wir die Substitution $y(t) = \frac{1}{\cosh(t)}$. Damit wird:

$$\mathrm{d}y = -\frac{\sinh(t)}{\cosh^2(t)}\mathrm{d}t \qquad \text{und} \qquad \sqrt{1-y^2} = \frac{\sinh(t)}{\cosh(t)}$$

Durch Einsetzen ergibt sich:

$$\int \mathrm{d}x = -\int \frac{\sqrt{1-y^2}}{y}\mathrm{d}y = \int \frac{\sinh^2(t)}{\cosh^2(t)}\mathrm{d}t = \int \left(1 - \frac{1}{\cosh^2(t)}\right)\mathrm{d}t$$

$$x(t) = t - \tanh(t) + C$$

Aus der Anfangsbedingung $\big(x(0) \big| y(0)\big) = (0|1)$ finden wir $C = 0$. Somit haben wir für unsere Traktrix die Parameterdarstellung:

$$x(t) = t - \tanh(t) \qquad\qquad y(t) = \frac{1}{\cosh(t)}$$

Die Traktrix hat also folgende Eigenschaft: Der Tangentenabschnitt von einem beliebigen Kurvenpunkt zur horizontalen x-Achse hat immer die gleiche Länge 1. Der Tangentenabschnitt ist die Hundeleine.

Aufgabe 7: Man zeige diesen Sachverhalt rechnerisch als Verifikation der Lösung der Differenzialgleichung. Welche geometrische Bedeutung hat der Parameter t der Parameterdarstellung?

Wenn wir nun bei unseren Strecken den Ansatzpunkt immer näher am oberen Ende wählen, nähert sich die Kontur der Traktrix an. Wir haben also ein Approximationsverfahren zur Konstruktion einer Traktrix gefunden.

Wird die Traktrix um die horizontale Achse gedreht, hat die entstehende Rotationsfläche eine konstante negative GAUßsche Krümmung. Sie realisiert einen Ausschnitt der so genannten *hyperbolischen (nicht-euklidischen) Geometrie*. Die posaunenförmige Rotationsfläche wird als *Pseudosphäre* bezeichnet (Abb. 11).

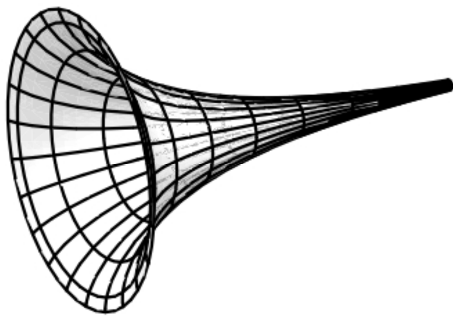


Abb. 11: Pseudosphäre

6. Lösungen

Zu Aufgabe 1: Wir ergänzen die Figur gemäß Abbildung 12. Gesucht ist das Verhältnis $\frac{SE}{AS}$.

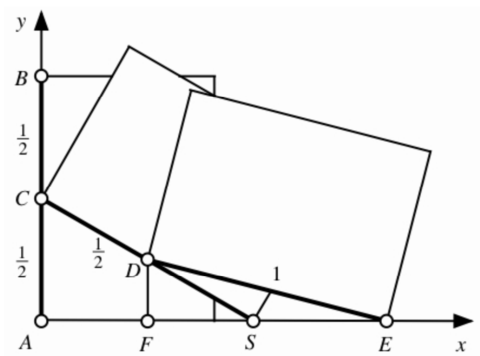


Abb. 12: Koordinatensystem und zusätzliche Punkte

Die Länge der Strecke AB normieren wir auf 1. Damit erhalten wir für die Strecke AS mit PYTHAGORAS die Länge $AS = \frac{\sqrt{3}}{2}$, für den Punkt D die Koordinaten $D\left(\frac{\sqrt{3}}{4} \middle| \frac{1}{4}\right)$ und für den Punkt F die Koordinaten $F\left(\frac{\sqrt{3}}{4} \middle| 0\right)$. Die Strecke FE hat nach PYTHAGORAS die Länge $FE = \frac{\sqrt{15}}{4}$, die Strecke AE die Länge:

$$AE = AF + FE = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\sqrt{5}\right)$$

Für die Strecke *SE* erhalten wir daraus die Länge $SE = AE - AS = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\sqrt{5}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(-1+\sqrt{5}\right)$. Damit ist:

$$\frac{SE}{AS} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}\left(-1+\sqrt{5}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0.6180339887$$

Das ist der so genannte *Goldene Schnitt* [1].

Zu Aufgabe 2: Diese Aufgabe ist im Prinzip gleich Aufgabe 1. Das Teilverhältnis ist wiederum der Goldene Schnitt.

Zu Aufgabe 3: Die Endpunkte der neuen Strecken können iterativ mit PYTHAGORAS berechnet werden. Wir bezeichnen die Strecken durch $A_n B_n$ mit den Koordinaten $A_n\left(x_{A_n} \middle| y_{A_n}\right)$ und $B_n\left(x_{B_n} \middle| y_{B_n}\right)$. Im Vergleich mit den bisherigen Bezeichnungen ist $A_1 = A$, $A_2 = S$, $A_3 = E$ sowie $B_1 = B$, $B_2 = D$.

Für $n = 1$ haben wir die Startwerte: $x_{A_1} = 0,\ y_{A_1} = 0,\ x_{B_1} = 0,\ y_{B_1} = 1$

Dann gilt die Rekursion:

$$x_{B_{n+1}} = \tfrac{1}{2}\left(x_{A_n} + x_{B_n}\right) \qquad y_{B_{n+1}} = \tfrac{1}{2}\left(y_{A_n} + y_{B_n}\right)$$

$$x_{A_{n+1}} = x_{B_{n+1}} + \sqrt{1 - y_{B_{n+1}}^2} \qquad y_{A_{n+1}} = 0$$

Für die Verhältnisse $\frac{x_{A_{n+2}} - x_{A_{n+1}}}{x_{A_{n+1}} - x_{A_n}}$ aufeinander folgender Abschnitte auf der horizontalen Achse ergibt sich der Reihe nach:

```
0.6180339887
0.9491823104
0.9880574285
0.9970566257
0.9992667273
0.9998168414
```

Zu Beginn haben wir den schon berechneten Goldenen Schnitt. Anschließend nähern sich die Verhältnisse sehr rasch dem Wert 1 an, was ja auch aus geometrischen Gründen klar ist.

Zu Aufgabe 4: Mit einer zur Aufgabe 1 analogen Rechnung ergibt sich:

$$\frac{SE}{AS} = \frac{\frac{1}{8}\sqrt{7}}{\frac{1}{4}\sqrt{7}} = \frac{1}{2}$$

Interessant ist, dass wir eine schöne rationale Zahl erhalten, wogegen der Goldene Schnitt der Aufgabe 1 das Paradebeispiel einer irrationalen Zahl ist.

Zu Aufgabe 5: Für den dritten Punkt auf der *x*-Achse erhalten wir die *x*-Koordinate $\frac{3}{8}\sqrt{7} \approx 0.992 \neq 1$.

Zu Aufgabe 6: Mit einem zur Aufgabe 3 analogen Vorgehen ergibt sich der Reihe nach:

```
0.5
0.8664640249
0.9374546074
0.9677409705
0.9826535505
0.9904770352
```

Zu Aufgabe 7: Wir arbeiten mit der Parameterdarstellung:

$$x(t) = t - \tanh(t) = t - \frac{\sinh(t)}{\cosh(t)} \qquad y(t) = \frac{1}{\cosh(t)}$$

Der zum Parameter t gehörende Kurvenpunkt B_t hat also die Koordinaten $B_t\left(t-\frac{\sinh(t)}{\cosh(t)}\middle|\frac{1}{\cosh(t)}\right)$. Für den Tangentialvektor erhalten wir durch Ableiten:

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{dt}\left(t-\frac{\sinh(t)}{\cosh(t)}\right) \\ \frac{d}{dt}\frac{1}{\cosh(t)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{\cosh^2(t)} \\ \frac{-\sinh(t)}{\cosh^2(t)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sinh^2(t)}{\cosh^2(t)} \\ \frac{-\sinh(t)}{\cosh^2(t)} \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich für die Tangente im Punkt B_t die Parameterdarstellung (mit dem Parameter s):

$$x_t(s) = t-\frac{\sinh(t)}{\cosh(t)}+s\frac{\sinh^2(t)}{\cosh^2(t)} \qquad y_t(s) = \frac{1}{\cosh(t)}-s\frac{\sinh(t)}{\cosh^2(t)}$$

Für den Schnittpunkt A_t der Tangente mit der x-Achse haben wir die Bedingung:

$$y_t(s) = \frac{1}{\cosh(t)}-s\frac{\sinh(t)}{\cosh^2(t)} \overset{!}{=} 0 \qquad \Rightarrow \qquad s = \frac{\cosh(t)}{\sinh(t)}$$

Wegen

$$x_t\left(\frac{\cosh(t)}{\sinh(t)}\right) = t-\frac{\sinh(t)}{\cosh(t)}+\frac{\cosh(t)}{\sinh(t)}\frac{\sinh^2(t)}{\cosh^2(t)} = t$$

erhalten wir für A_t die sehr einfachen Koordinaten $A_t(t|0)$. Der Parameter t gibt den vom Hundehalter zurückgelegten Weg an. Für die Länge des Tangentenabschnittes B_tA_t ergibt sich:

$$\sqrt{\left(t-\left(t-\frac{\sinh(t)}{\cosh(t)}\right)\right)^2+\left(0-\frac{1}{\cosh(t)}\right)^2} = \sqrt{\frac{\sinh^2(t)}{\cosh^2(t)}+\frac{1}{\cosh^2(t)}} = \sqrt{\frac{\cosh^2(t)}{\cosh^2(t)}} = 1$$

Der Tangentenabschnitt hat also unabhängig vom Parameter t die konstante Länge 1.

Literatur

Walser, Hans [1] Der Goldene Schnitt. 5., bearbeitete und erweiterte Auflage. Edition am Gutenbergplatz, Leipzig 2009. ISBN 978-3-937219-98-1

Jo Niemeyer
Birkenweg 6
D-79859 Schluchsee
e-mail: jo@niemeyer.com
www.jo.niemeyer.com

Dr. Hans Walser
Mathematisches Institut der Universität Basel
Rheinsprung 21
CH-4051 Basel
e-mail: hwalser@bluewin.ch
www.math.unibas.ch/~walser/

Eingereicht am 22. Juli 2011, angenommen am 1. August 2011.