Kommentar zur nachfolgenden Abhandlung

BORIS AVERBUKH und HEINO GÜNTHER unterbreiten der Lehrerschaft in der folgenden Abhandlung „Über die Potenzen und die Potenzfunktionen“ eine Methode, mit der man noch heute in Russland etwa 16-Jährigen die Potenzschreibweise beibringt. In erschreckendem Maße wird deutlich, welcher Ausbildungsunterschied in schulischer Mathematik zwischen uns und unseren östlichen Nachbarn seit langem existiert. Man kann also zunächst diese Veröffentlichung als herbe Kritik am westeuropäischen Schulsystem ansehen.

Andererseits wird in dieser Arbeit z. B. durch nicht unerhebliche Fallunterscheidungen, vor allem bei den Beweisen der Sätze 7 und 8 aber auch bei anderen deutlich, wie schwer es bei unserem Schülerklientel sein wird, solche Vorschläge zu realisieren. Hat man doch beim Lesen den Eindruck, dass in Russland offenbar ein viel kleinerer Bevölkerungs-Prozentsatz solches vermittelt bekommt als dies in unseren Schulen der Fall sein würde.

Gerade die eben zitierten Beweise zeigen aber auch, dass man hierzulande in den Fünfzigern des letzten Jahrhunderts seitens der Kultusbehörden eine weise Entscheidung getroffen hat, als man sich damals entschloss, die Wurzeldefinition im Reellen generell auf positive Radikanden auf dem Verordnungsweg zu beschränken. Die Güte dieser Entscheidung kann man z. B. daran erkennen, dass sich auch die universitäre Analysis und DIN (siehe DIN 1302 Mathematik 1994-04) bzw. ISO (siehe ISO 31-11) weitgehend dieser Gepflogenheit anschlossen, also diese Beschränkung überall in der reellen Analysis durchgezogen worden ist.

Das konnten damals die Gymnasien und die Universitäten guten Gewissens machen, da es bis in die 60er des vergangenen Jahrhunderts üblich war, an den Gymnasien, also auch an den humanistischen, über komplexe Zahlen zu reden. Folgende Stationen beherrschten den Unterricht:

Um eine allgemeine Lösung quadratischer Gleichungen zu erzwingen, wurde die imaginäre Einheit i als Lösung der speziellen Gleichung $x^2 = -1$ eingeführt. Die allgemeine Lösung einer quadratischen Gleichung auch mit komplexen Koeffizienten ergab sich dann als $z = x + iy$ mit reellen Werten x und y. Man führte die komplexen Zahlen in der GAUSS-Ebene mit verschiedenen Schreibweisen ein, z. B.: $z = x + iy = |z|(\cos\varphi + i \sin\varphi)$, wobei z als Betrag $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$ eine reelle Zahl hat und $\varphi = \arctan y/x$ ist.

Damals hatten die Lehrer auch noch im Fach Trigonometrie die Additionstheoreme gelehrt, konnten also ohne Probleme die Formel von MOIVRE beweisen (siehe auch MEYER [1] in diesem Heft):

Satz 1 von MOIVRE: Sind $z_1 = x_1 + iy_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ und $z_2 = x_2 + iy_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ zwei komplexe Zahlen, so ist $z = z_1 z_2 = x + iy = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ mit $|z| = |z_1||z_2|$, einer positiven reellen Zahl oder null, und $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$.

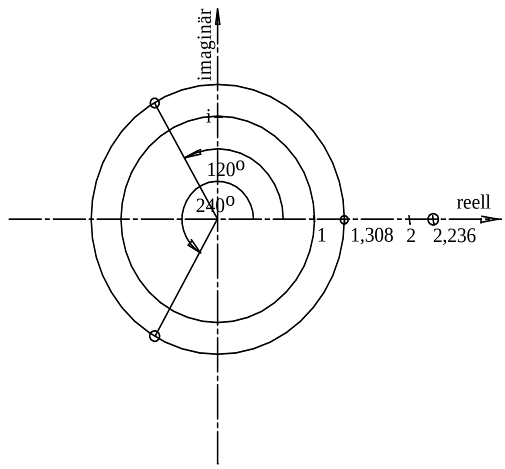
Die zeichnerische Realisierung der komplexen Zahlen in der GAUSS-Ebene ist leicht. Aus Satz 1 folgt das Potenzieren und als deren Umkehrung das Radizieren. Da aber das so genannte Argument φ nur bis auf mehrfache Umläufe um den Koordinatenursprung also modulo 2πk mit beliebigem ganzzahligen k bestimmt ist, führt das Radizieren auf mehrfache Lösungen φ_k gemäß:

Satz 2: $z = x + iy = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ hat für natürliche n die folgenden Wurzeln $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\varphi_k + i\cdot\sin\varphi_k\right)$ mit $\varphi_k = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}$ für k = 0, 1, 2, ... , n – 1.

Aus diesem Satz heraus wurden dann in der GAUSS-Ebene der komplexen Zahlen die Einheitswurzeln abgeleitet. Ohne Probleme erhielt man:

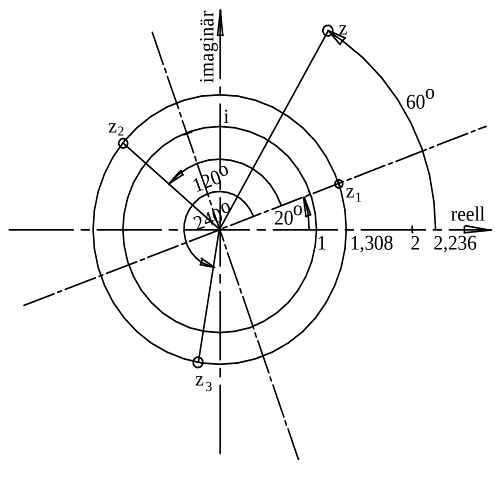
Satz 3: $z = x + iy = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ hat $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\cdot\sqrt[n]{\cos\varphi + i\sin\varphi}$ als Wurzeln. $\sqrt[n]{|z|}$ ist die bereits im Reellen kennen gelernte Wurzel aus einem positiven Radikanden oder aus null; $\sqrt[n]{\cos\varphi + i\sin\varphi}$ sind für alle k (siehe oben) endlich viele verschiedene Einheitswurzeln, d. h. die alle auf einem Kreis um den Ursprung der GAUSS-Ebene mit Radius 1 liegen.

Ist z eine reelle Zahl und n ungerade, z. B. n = 3, so zieht man die Wurzel a = $\sqrt[3]{|z|} = \sqrt[6]{z\bar{z}}$, wobei $z\bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$ mit $\bar{z} = x - iy$ ist. Hieraus erhält man dann die dritten Wurzeln, wenn man diese reelle Zahl a jeweils mit den dritten Einheitswurzeln e_k multipliziert. Siehe die nebenstehende Zeichnung.



Im Einzelnen: Nebenstehend werden die dritten Wurzeln aus der reellen Zahl $\sqrt{5} \approx 2{,}236..$ untersucht. Die dritten Wurzeln liegen deshalb auf einem Kreis um den Ursprung mit Radius $r = \sqrt[3]{\sqrt{z\bar{z}}} = \sqrt[6]{5} \approx 1{,}308$. Weil die Ausgangszahl $\varphi = 0^o$ hat, ergeben sich für die Wurzeln $\varphi_1 = 0^o$, $\varphi_2 = 120^o$ und $\varphi_3 = 240^o$.

Im Fall einer nicht reellen Zahl z verfährt man genauso: Für n = 3 und $\sqrt[3]{|z|} = \sqrt[6]{z\bar{z}} = \sqrt[6]{5}$ muss dann nur obige Zeichnung um $\varphi/3$ im mathematischen Uhrzeigersinn im Koordinatensystem gedreht werden.



Im Einzelnen: Nebenstehend werden die dritten Wurzeln aus der komplexen Zahl $z = \sqrt{3} + i\sqrt{2}$ untersucht. Die dritten Wurzeln liegen wiederum auf einem Kreis um den Ursprung mit dem Radius $r = \sqrt[3]{\sqrt{z\bar{z}}} = \sqrt[6]{5} \approx 1{,}308$. Weil die Ausgangszahl z das Argument $\varphi = 60^o$ hat, ergeben sich für die dritten Wurzeln die folgenden Argumente:
$\varphi_1 = 20^o$, $\varphi_2 = 140^o$ und $\varphi_3 = 260^o$.

Das Obige zeigt, wie notwendig heute ein Ergänzungsunterricht in komplexen Zahlen vor der Reifeprüfung wäre. Die Herausgeber der Mathematikinformation haben deshalb schon seit langem einen Autor gebeten, hierüber ausführlich zu schreiben.

Der von BORIS AVERBUKH und HEINO GÜNTHER vorgelegte Artikel kann ebenfalls für einen Ergänzungsunterricht genutzt werden.

Sollte beides nicht möglich sein, so kann der geschickte Lehrer immer noch durch Betonung der „Ausgangssituation“ bei der Wurzeldefinition Probleme seiner Schülerinnen und Schüler vermeiden, wenn er daran erinnert, dass ja die Wurzel jeweils eine Lösung einer Gleichung $x^n = a$ ist und eben z. B. die dritte Potenz einer negativen Zahl negativ ist.

Herausgeber
Dr. Karlhorst Meyer