Hans Walser

Was war vor dem Startwert?

Das mathematische Analogon zur Frage, was vor Adam und Eva war, ist die Frage, ob und wie Folgen und mathematische Strukturen, welche einen „natürlichen“ Anfang haben, nach rückwärts in die „Vergangenheit“ fortgesetzt werden können.
Es wird gezeigt, wie sich durch diese Frage beim Pascal-Dreieck ein weites Aktivitätsfeld öffnet, das sogar einen ersten Zugang zur Taylor-Entwicklung enthält.

1. Pascal mit einer Spitze

Ein jedermann im Lande kennt, was man ein Pascal-Dreieck nennt:

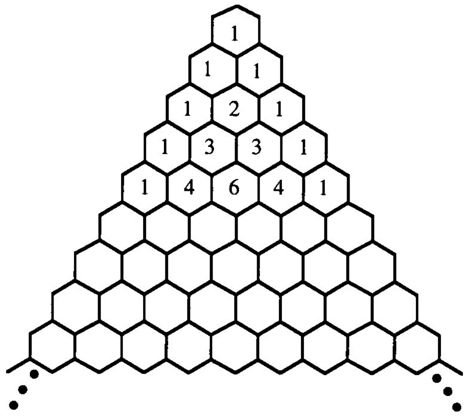


Abb. 1 Pascal-Dreieck

Aufgabe 1
Wie geht es weiter?

Aufgabe 2
Wie lässt sich das Rechenschema grafisch darstellen?

Aufgabe 3
Genügt die Angabe des Rechenschemas für die Berechnung des Pascal-Dreieckes?

Bei der Darstellung im Hexagonalmuster ist das Pascal-Dreieck ein gleichseitiges Dreieck, das aber nach unten ins Bodenlose geht.

Das Rechenschema (die Rekursion) besteht darin, dass jede Zahl die Summe der unmittelbar links oben und rechts oben stehenden Zahlen ist (vgl. Aufgabe 2). Das Rechenschema funktioniert auch an den Rändern, wenn das Hexagonalnetz weitergedacht wird, aber mit Nullen gefüllt. Einzige Ausnahme ist die Eins an der Spitze, die wie ein Deus ex Machina aus dem Nichts erscheint. Man spricht dann beschönigend von einem „Startwert“, so wie Adam und Eva die Startwerte der Menschheit waren.

Die Frage ist, ob und wie man diesen Schönheitsfehler vermeiden kann.

2. Fibonacci comes in

Die „Schrägzeilensummen“ im Pascal-Dreieck ergeben die Fibonacci-Zahlen.

So ist zum Beispiel: 34 = 1 + 7 + 15 + 10 + 1

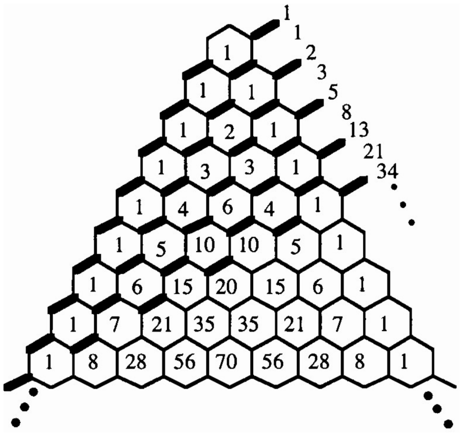


Abb. 2 Fibonacci-Zahlen

In der Abbildung 2 sind diese Schrägzeilen — es sind die Senkrechten auf die Dreiecksseite rechts — jeweils fett hervorgehoben.

Aufgabe 4
Wie geht es mit den Fibonacci-Zahlen weiter?

Aufgabe 5
Nach welcher Gesetzmäßigkeit lassen sich die Fibonacci-Zahlen bilden? Lässt sich diese Gesetzmäßigkeit aus dem Pascal-Dreieck ablesen?

3. Was war vor den Startwerten?

Aufgabe 6
Lässt sich die Fibonacci-Folge auch nach rückwärts laufen lassen?

Nun drängt sich die Frage auf: Wie kann das Pascal-Dreieck über seine Spitze mit der ominösen Eins hinaus so zurück verfolgt werden, dass die Sache kompatibel mit der ins Negative fortgesetzten Fibonacci-Folge ist?

Die Abbildung 3 zeigt eine mögliche Lösung (vgl. [1], S. 197, [2], S. 163).

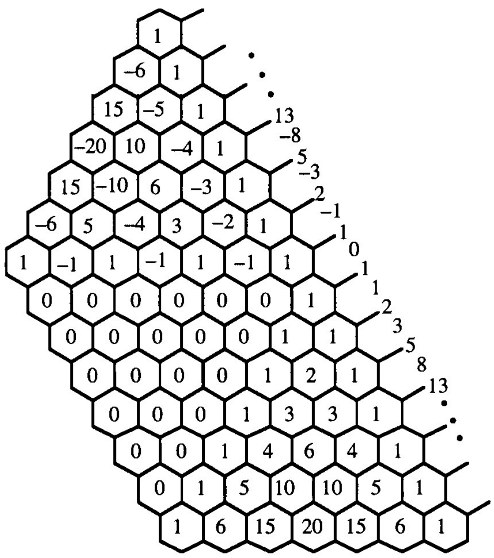


Abb. 3 Pascal und Fibonacci

Die neuen, von Null verschiedenen Zahlen sind auch Pascal-Zahlen, aber mit alternierenden Vorzeichen. In diesem neuen „Pascal-Dreieck“ besteht der untere Rand aus den Zahlen ± 1.

In der Abbildung 4 sind die Fibonacci-Zahlen weggelassen und nur noch die Pascal-Zahlen dieser Lösung angegeben; dafür wurde das Hexagonalschema nach rechts oben mit Nullen ergänzt.

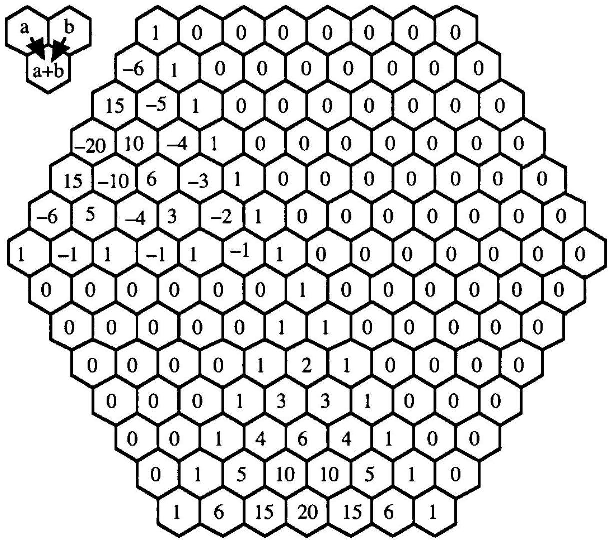


Abb. 4 Pascal

Nun ist das in allen Richtungen ins Unendliche fortgesetzte Hexagonalnetz so mit Zahlen gefüllt, dass überall, und insbesondere auch an der Spitze des ursprünglichen Pascal-Dreieckes, die Pascal-Rekursion spielt. Dabei ist zu beachten, dass die Pascal-Rekursion immer von oben nach unten arbeitet. Die Vergangenheit ist also oben und die Zukunft unten, wie im Weltbild der alten Römer.

4. Pascal-Ebenen

Eine Pascal-Ebene ist ein in allen Richtungen ins Unendliche fortgesetzte Hexagonalnetz, deren Hexagone so mit Zahlen gefüllt sind, dass überall die Pascal-Rekursion erfüllt ist. Wir haben oben ein Beispiel dazu. Ein triviales Beispiel besteht ausschließlich aus Nullen.

Aufgabe 7
Wer findet weitere Beispiele? Dazu kann das leere Hexagonalnetz (Abb. 5) als Vorlage verwendet werden.

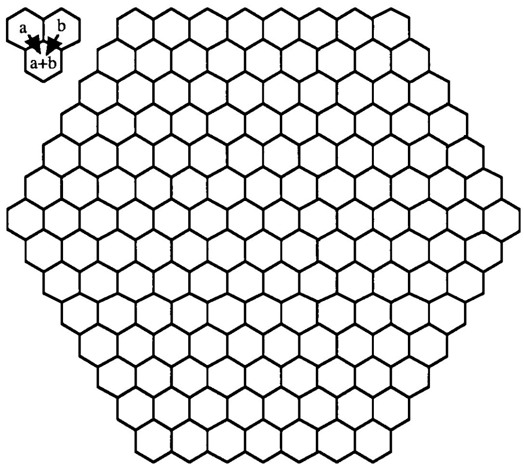


Abb. 5 Hexagonalnetz

5. Binomialkoeffizienten

Für die Pascal-Zahlen wird in der Regel die folgende tabellarische Darstellung und Symbolik verwendet.

$$
\begin{array}{cccccc}
1 & & & & & \\
1 & 1 & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccccc}
\binom{0}{0} & & & & & \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & \\
\binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5}
\end{array}
$$

Für die Berechnung gilt die Formel:

$$\binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot \cdots \cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot \cdots \cdot k}$$

Wegen

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

gilt aber auch:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot \cdots \cdot(n-(n-k)+1)}{1\cdot 2\cdot \cdots \cdot(n-k)} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot \cdots \cdot(k+1)}{1\cdot 2\cdot \cdots \cdot(n-k)}$$

Exemplarisch:

$$\binom{5}{3} = \binom{5}{2} = \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2} = 10$$

Wir haben oben und unten gleich viele Faktoren, nämlich $(n-k)$. Oben fängt es mit dem Faktor n an und geht $(n-k)$ Schritte runter, unten fängt es mit dem Faktor 1 an und geht $(n-k)$ Schritte rauf. Für $k = n$ versagt die Regel, hier wird $\binom{n}{n} = 1$ definiert.

Diese Regeln sind auf die Verallgemeinerung der Abbildung 4 übertragbar. Die tabellarische Darstellung in senkrechten Spalten und waagerechten Zeilen ergibt:

$$
\begin{array}{cccccccccc}
1 & & & & & & & & & \\
-4 & 1 & & & & & & & & \\
6 & -3 & 1 & & & & & & & \\
-4 & 3 & -2 & 1 & & & & & & \\
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & & & & & \\
 & & & & & 1 & & & & \\
 & & & & & 1 & 1 & & & \\
 & & & & & 1 & 2 & 1 & & \\
 & & & & & 1 & 3 & 3 & 1 & \\
 & & & & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1
\end{array}
$$

oder symbolisch:

$$
\begin{array}{llllllllll}
\binom{-5}{-5} & & & & & & & & & \\
\binom{-4}{-5} & \binom{-4}{-4} & & & & & & & & \\
\binom{-3}{-5} & \binom{-3}{-4} & \binom{-3}{-3} & & & & & & & \\
\binom{-2}{-5} & \binom{-2}{-4} & \binom{-2}{-3} & \binom{-2}{-2} & & & & & & \\
\binom{-1}{-5} & \binom{-1}{-4} & \binom{-1}{-3} & \binom{-1}{-2} & \binom{-1}{-1} & & & & & \\
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & & & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & \\
 & & & & & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & \\
 & & & & & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & \\
 & & & & & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4}
\end{array}
$$

Die Rechenregel $\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot (k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (n-k)}$ gilt auch im negativen Fall:

$$\binom{-n}{-k} = \frac{(-n) \cdot (-n-1) \cdot \cdots \cdot (-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (-n+k)}$$

Aufgabe 8

Exemplarische Kontrolle der Rechenregel $\binom{-n}{-k} = \frac{(-n) \cdot (-n-1) \cdot \cdots \cdot (-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (-n+k)}$.

Aufgabe 9

Wie können die Zahlen des „negativen“ Pascal-Dreieckes auch über die gewöhnlichen Pascal-Zahlen berechnet werden?

Aufgabe 10

Leider funktioniert die im klassischen Pascal-Dreieck vorhandene Symmetrie $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ im „negativen“ Pascal-Dreieck nicht mehr. Was lässt sich davon retten?

6. Binomische Formel

In einem pragmatischen Schulunterricht wird das Pascal-Dreieck über die binomische Formel eingeführt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} a^{n-k} b^k$$

Eigentlich könnten wir wegen $\binom{n}{r} = 0$ für $n > 0$ und $r < 0$ auch schreiben:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{n-k} a^{n-k} b^k$$

Nun wird es spannend.

Aufgabe 11

Was ist $(a+b)^{-3}$? Lässt sich das Ergebnis kontrollieren?

7. Taylor-Entwicklung

Wir erhielten im Abschnitt 6 die verallgemeinerte Binomische Formel:

$$(a+b)^{-3} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-3}{-3-k} a^{-3-k} b^k = a^{-3} - 3a^{-4}b + 6a^{-5}b^2 - 10a^{-6}b^3 + 15a^{-7}b^4 - 21a^{-8}b^5 \pm \cdots$$

Insbesondere ist

$$(1+x)^{-3} = 1 - 3x + 6x^2 - 10x^3 + 15x^4 - 21x^5 \pm \cdots$$

Das ist aber genau die Taylor-Entwicklung der Funktion $f(x) = (1+x)^{-3}$ an der Stelle $x_0 = 0$.

Aufgabe 12
Plotten Sie die Funktion $f(x) = (1+x)^{-3}$ und die Approximation 5. Grades:
$p(x) = 1 - 3x + 6x^2 - 10x^3 + 15x^4 - 21x^5$

8. Lösungshinweise zu den Aufgaben

Aufgabe 1

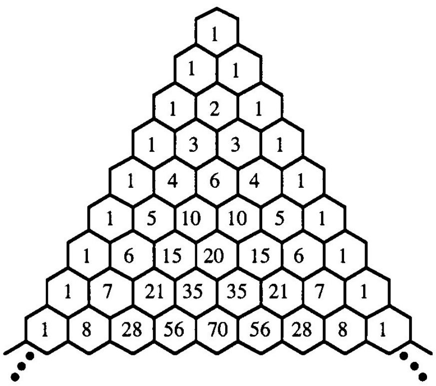


Abb. 6 Pascal-Dreieck

Aufgabe 2

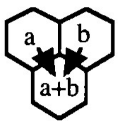


Abb. 7 Rechenschema

Dieses Rechenschema bezeichnen wir als Pascal-Rekursion. Allgemein ist eine Rekursion ein Rechenschema, bei welchem eine neue Zahl aus bisherigen Zahlen berechnet wird.

Aufgabe 3
Das Rechenschema allein genügt nicht. Wir brauchen als Startwerte die Einsen am linken und rechten Rand sowie an der Spitze.

Aufgabe 4
Es sei f_n die n-te Fibonacci-Zahl. Damit ist:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	$\cdots$
f_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987	$\cdots$

Aufgabe 5

Es gilt das Bildungsgesetz (Rekursionsformel): $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ mit den Startwerten $f_1 = 1$ und $f_2 = 1$.

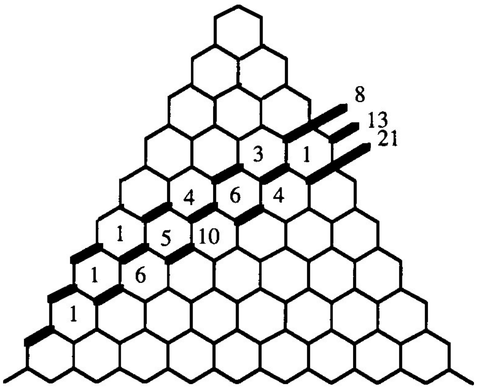


Abb. 8 Herleitung der Rekursion

Exemplarische Herleitung der Fibonacci-Rekursion: Die Zahl 21 setzt sich aus Zahlen zusammen, welche ihrerseits die Summe von Zahlen sind, aus denen sich die Zahlen 8 und 13 zusammensetzen:

$$21 = 1 + 6 + 10 + 4 = (0+1) + (1+5) + (4+6) + (3+1) = (0+1+4+3) + (1+5+6+1) = 8 + 13$$

Aufgabe 6
Wir können die Fibonacci-Folge problemlos auch nach rückwärts laufen lassen:

n	…	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6	…
f_n	…	–8	5	–3	2	–1	1	0	1	1	2	3	5	8	…

Es erscheinen zunächst die Null und dann spiegelbildlich die schon bekannten Fibonacci-Zahlen, aber mit alternierenden Vorzeichen. Wir müssen also nicht zwingend mit den beiden Startwerten $f_1 = 1$ und $f_2 = 1$ arbeiten.

Aufgabe 7
Es handelt sich um eine offene Aufgabe mit unendliche vielen Lösungen. Im Folgenden einige Beispiele.

Unsystematisches Beispiel
In diesem Beispiel haben wir Einsen in einer Diagonalen, rechts oben davon Nullen, und links unten Zahlen, welche bald einmal keine Gesetzmäßigkeit mehr erkennen lassen. Es wurde in Schrägen parallel zu den Einsen gearbeitet und in jeder Schräge willkürlich eine Null gesetzt.

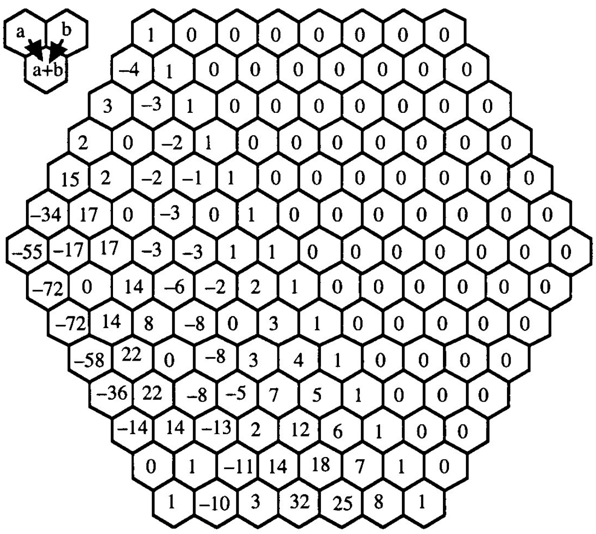


Abb. 9 Wilde Zahlen

Zweierpotenzen
Ein simples Beispiel, das aber Brüche benötigt, besteht aus Potenzen der Zahl 2.

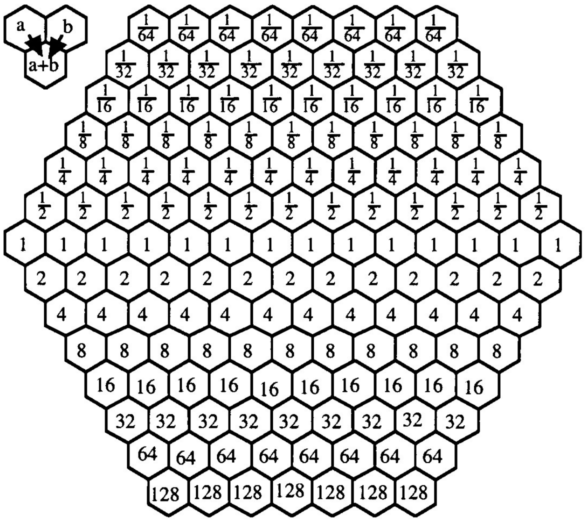


Abb. 10 Zweierpotenzen

Zwei Dreiecke und viele Nullen

Sobald sich eine Reihe mit alternierend entgegengesetzt gleichen Zahlen ergibt, gibt es darunter nur noch Nullen. Im folgenden Beispiel erkennen wir wieder die Pascal-Zahlen mit alternierendem Vorzeichen.

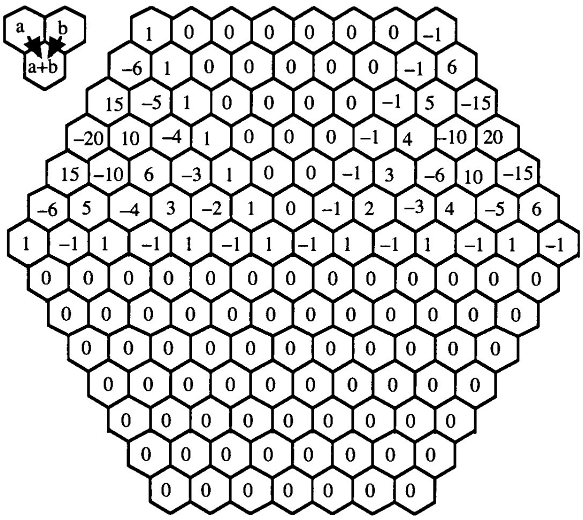
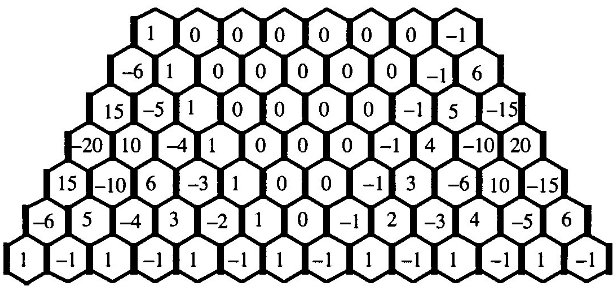


Abb. 11 Halbebene

Wir bilden nun in diesem Beispiel die Spaltensummen, das heißt, wir addieren jeweils die Zahlen, welche senkrecht übereinander stehen. Die untere Halbebene mit den Nullen können wir weglassen.



• • • 1 0 –1 –1 0 1 1 0 –1 –1 0 1 1 0 –1 • • •

Abb. 12 Spaltensummen

Die Spaltensummen ergeben die Folge:

n	...	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6	...
f_n	...	–1	–1	0	1	1	0	–1	–1	0	1	1	0	...

Diese Folge ist periodisch mit der Periodenlänge 6 und der Antiperiodenlänge 3. Sie ergibt sich aus den Startwerten $f_1 = 1$ und $f_2 = 1$ und der Rekursion: $f_n = f_{n-1} - f_{n-2}$

Die Folge ist also eine nur geringfügige Modifikation der Fibonacci-Folge.

„Aufgabe in der Aufgabe“: Was ergibt sich bei anderen Startwerten?
Mit den allgemeinen Starterwerten $f_1 = a$ und $f_2 = b$ erhalten wir:

n	...	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6	...
f_n	...	a	b	b–a	–a	–b	–b+a	a	b	b–a	–a	–b	–b+a	...

Auch im allgemeinen Fall ist die Folge periodisch mit der Periodenlänge 6 und der Antiperiodenlänge 3.

Ändern der Vorzeichen
Nun ändern wir im Dreieck rechts alle Vorzeichen. Dann ergibt sich die folgende achsensymmetrische Figur mit drei Dreiecken (vgl. [1], S. 197, [2], S. 163).

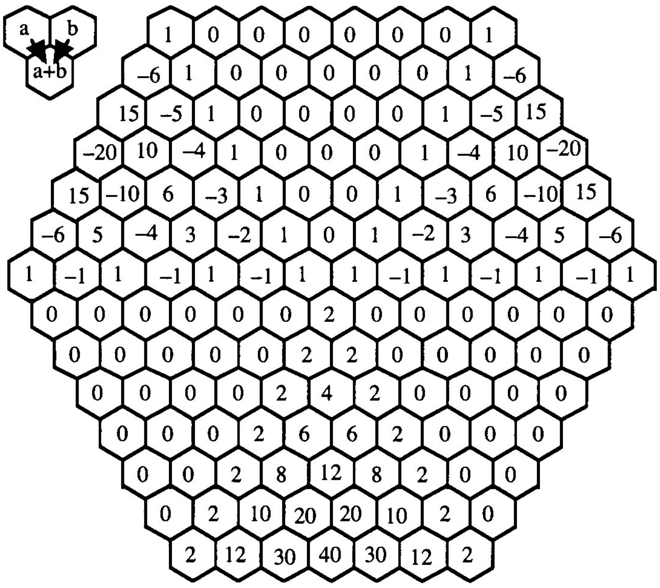


Abb. 13 Drei Dreiecke

Wir erkennen unten ein Dreieck mit den doppelten Pascal-Zahlen.

Null in der Mitte
Wir schieben die beiden oberen symmetrischen Dreiecke um eine Einheit auseinander (Abb. 14).

Dann ergibt sich unten das ursprüngliche Pascal-Dreieck, aber ohne die ominöse Eins an der Spitze. Eine Art Götterdämmerung.

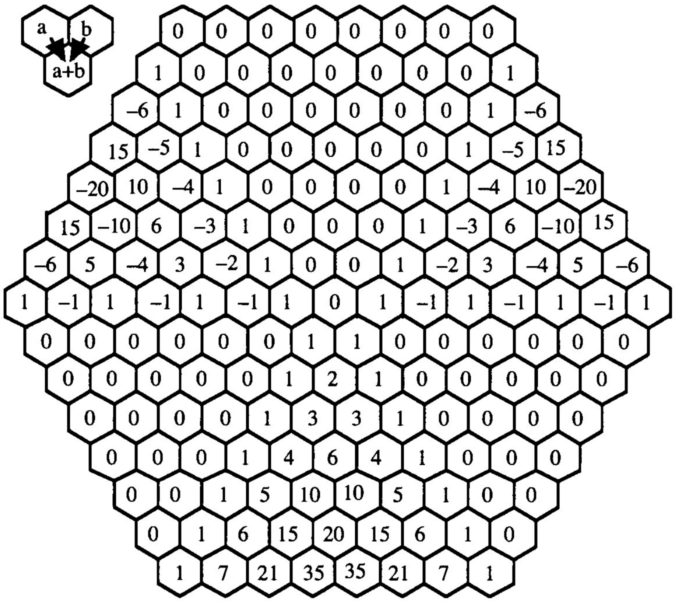


Abb. 14 Null in der Mitte

Aufgabe 8
Kontrolle an Rechenbeispielen:

$$\binom{-4}{-5} = \frac{(-4)}{1} = -4$$

$$\binom{-3}{-5} = \frac{(-3)\cdot(-4)}{1\cdot 2} = 6$$

$$\binom{-1}{-5} = \frac{(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot(-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 1$$

$$\binom{-5}{-5} = 1 \quad \text{(Definition für } k = n\text{)}$$

Aufgabe 9
Natürlich können die Zahlen des „negativen“ Pascal-Dreieckes auch über die gewöhnlichen Pascal-Zahlen berechnet werden:

$$\binom{-n}{-k} = (-1)^{(n+k)}\binom{k-1}{n-1}$$

Aufgabe 10
Im „negativen“ Pascal-Dreieck gilt spaltenweise eine vertikale Symmetrie, bei der auch noch mit wechselnden Vorzeichen gerechnet werden muss:

$$\binom{-n}{-k} = (-1)^{k+1}\binom{n-k-1}{-k} \quad \text{für} \quad n, k \in \mathbb{N}$$

Aufgabe 11
Es ergibt sich:

$$(a+b)^{-3} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-3}{-3-k}a^{-3-k}b^{k}$$

also:

$$(a+b)^{-3} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-3}{-3-k}a^{-3-k}b^{k} = a^{-3} - 3a^{-4}b + 6a^{-5}b^{2} - 10a^{-6}b^{3} + 15a^{-7}b^{4} - 21a^{-8}b^{5} \pm \ldots$$

Wir erhalten eine Reihe.

Kontrollüberlegung: Wenn wir mit $(a+b)^{+3}$, also mit $\left(a^{3} + 3a^{2}b + 3ab^{2} + b^{3}\right)$ multiplizieren, sollten wir 1 erhalten. Tatsächlich ergibt sich:

$$
\begin{array}{lllllll}
\multicolumn{7}{l}{\left(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\right)\left(a^{-3}-3a^{-4}b+6a^{-5}b^2-10a^{-6}b^3+15a^{-7}b^4-21a^{-8}b^5\pm\ldots\right)} \\
=1 & -3a^{-1}b & 6a^{-2}b^2 & -10a^{-3}b^3 & +15a^{-4}b^4 & -21a^{-5}b^5 & \pm\ldots \\
 & +3a^{-1}b & -9a^{-2}b^2 & +18a^{-3}b^3 & -30a^{-4}b^4 & +45a^{-5}b^5 & -63a^{-6}b^6 \\
 & & 3a^{-2}b^2 & -9a^{-3}b^3 & +18a^{-4}b^4 & -30a^{-5}b^5 & +45a^{-6}b^6 \\
 & & & +a^{-3}b^3 & -3a^{-4}b^4 & +6a^{-5}b^5 & -10a^{-6}b^6 \\
\hline
=1 & +0 & +0 & +0 & +0 & +0 & +\ldots
\end{array}
$$

Aufgabe 12
Wir erhalten:

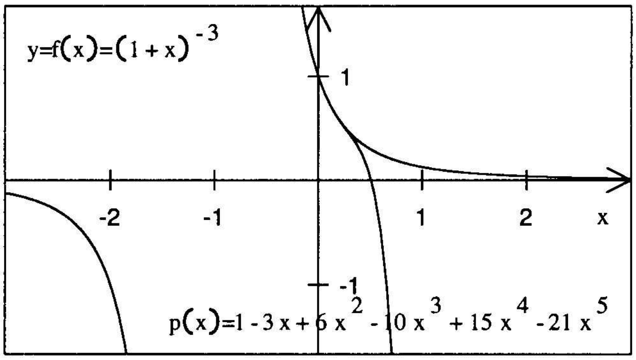


Abb. 15 Funktion und Taylor-Approximation

Wir sehen, dass die Approximation 5. Grades nur in einer kleinen Umgebung von $x_0 = 0$ etwas taugt.

Literatur

Hilton, Peter / Holton, Derek / Pedersen, Jean [1]: Mathematical Reflections: In a Room with Many Mirrors. 2nd printing. New York: Springer 1998.

Hilton, Peter / Holton, Derek / Pedersen, Jean [2]: Mathematical Vistas: From a Room with Many Mirrors. New York: Springer 2002

DR. HANS WALSER
Mathematisches Institut der Uni Basel
Rheinsprung 21
CH-4051 Basel

Email: hwalser@bluewin.ch
http://www.math.unibas.ch/~walser/