

Jörg Meyer

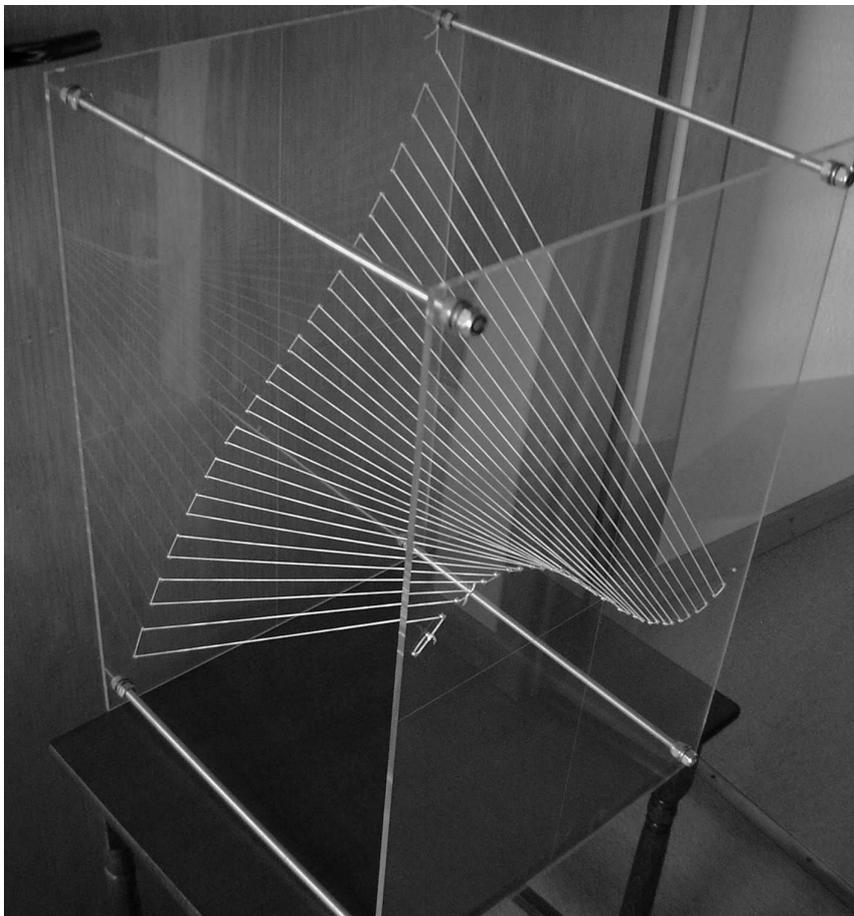
Von Parameterkurven zu Flächen

Fasst man die Funktionsvorschrift $z = f_y(x)$ einer parametrisierten Kurvenschar als $z = f(x, y)$ auf, hat man die Gleichung einer Fläche. In diesem Beitrag wird mit Hilfe von MuPad diejenige Fläche untersucht, die von der durch $f_y(x) = x^3 + y \cdot x$ gegebenen Schar kubischer Funktionen herrührt.

0. Zur Wahl des Werkzeugs

Warum MuPad? Es gibt doch schon so viele Computer-Algebra-Systeme, die eigentlich alles, was in der Schule vorkommen kann, abdecken. Der Grund für die Wahl von MuPad ist die ganz hervorragende Graphik, mit der man dreidimensionale Objekte „anfassen“ und drehen kann, ohne vorher den Augpunkt explizit angeben zu müssen. Selbst Realmodelle sind solchen Visualisierungen deutlich unterlegen. Dabei brauchen die dreidimensionalen Objekte keineswegs nur aus einem einzigen Funktionsterm herrühren, sondern können fast beliebig zusammengesetzt sein. Man kann in Echtzeit die Dicke oder die Farbe von Linien beeinflussen, man kann auch auf ganz einfache Art und Weise Animationen herstellen, und wenn man dann noch den sehr günstigen Preis berücksichtigt, dürfte die Entscheidung für MuPad leicht nachvollziehbar sein. Auch die kostenlose Verfügbarkeit vieler Materialien im Internet spricht für dieses CAS.

In diesem Aufsatz wird MuPad 3.1 verwendet. Wir werden sehen, dass es durch die gute Manipulierbarkeit der Graphiken erheblich bessere Einsichten vermittelt als ein (gleichwohl unverzichtbares) Realmodell.



1. Zur Wahl des Beispiels

Warum ausgerechnet die Fläche zu $z = x^3 + y \cdot x$? Warum keine Fläche mit quadratischen Termen?

1.1 Quadratisch oder kubisch?

Quadratische Flächen sind einfacher zu behandeln als kubische Flächen, und Phänomene wie der Pol-Polarenzusammenhang lassen sich bei quadratischen Flächen viel besser einführen. Natürlich haben quadratische und kubische Flächen auch viele Gemeinsamkeiten, bei denen es fast egal ist, bei welcher Art von Fläche man sie kennenlernt.

Die untersuchte Fläche sollte leicht zu motivieren sein (das ist bei quadratischen Flächen ebenso der Fall) und zu hinreichend interessanten neuen Phänomenen führen. Bezüglich der letzten Forderung ist die hier untersuchte kubische Fläche den quadratischen deutlich überlegen.

1.2 Warum gerade diese Fläche?

Fast jede kubische Fläche ist mathematisch interessanter als die hier untersuchte. Wir werden sehen, dass die Fläche zu $z = x^3 + y \cdot x$ aus Geraden besteht und mithin eine Regelfläche ist. Sie hat singuläre Punkte im Unendlichen und ist daher nicht glatt. Andererseits enthält jede glatte kubische Kurve genau 27 Geraden (die nicht alle reell oder verschieden sein müssen; ein Beweis steht etwa bei HILBERT / COHN-VOSSEN, S. 146 – 151), und dieses Phänomen hat Mathematiker schon seit 150 Jahren fasziniert. Mit einer so spektakulären Eigenschaft kann die in diesem Artikel untersuchte Fläche nicht auftrumpfen. Auf der Schule verbleibt allerdings das Problem der Motivation: Warum sollte man sich gerade mit einer solchen speziellen Fläche beschäftigen? Ebenso ungelöst ist das Problem der Anschlussfähigkeit auf Schulniveau: Welche bearbeitbaren (!) Folgerungen erwachsen aus der 27-Geraden-Eigenschaft?

Die Fläche zu $z = x^3 + y \cdot x$ hingegen lässt sich leicht motivieren, und während man sich näher mit ihr beschäftigt, kann man viele Dinge aus Analysis und Vektorgeometrie nicht nur wiederholen, sondern in einem neuen sinnstiftenden Kontext erkennen. Die Phänomene, zu denen die hier untersuchte Fläche auch führt, können mit geringem Aufwand weiter verfolgt werden. Die Probleme der Motivation und der Anschlussfähigkeit lassen sich mithin leicht lösen.

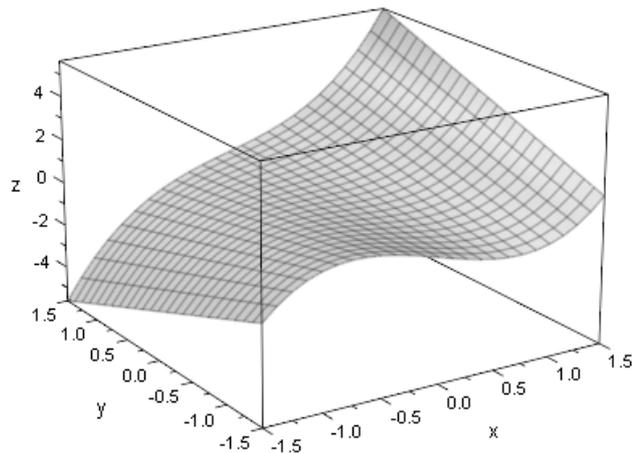
2. Gestalt der Fläche

Wie kann man MuPad veranlassen, die Fläche zu $z = x^3 + y \cdot x$ zu zeichnen? Dafür gibt es mehrere Möglichkeiten: 1. Angabe der expliziten Gleichung, 2. Angabe der impliziten Gleichung, 3. Angabe des allgemeinen Punktes. Obwohl im Folgenden nur die 3. Möglichkeit verwendet wird, sollen doch alle drei vorgestellt werden.

2.1 Angabe der expliziten Gleichung

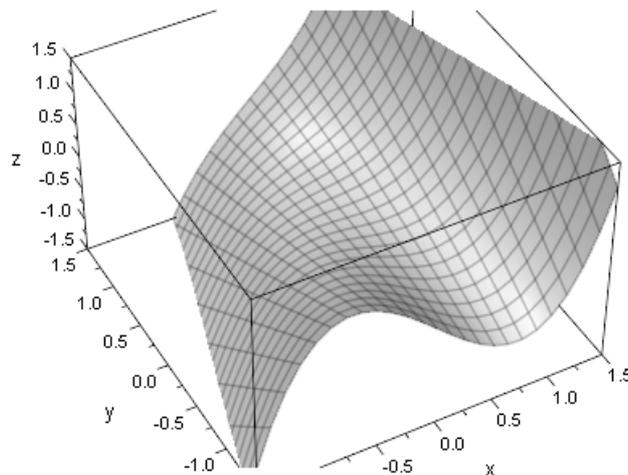
```
xx:=1.5: yy:=1.5: zz:=1.5:
zterm:=x^3+x*y:
plotfunc3d(zterm, x=-xx..xx, y=-yy..yy)
```

Die erste Zeile definiert den (auch für den Rest des Aufsatzes gültigen) Zeichenbereich, die zweite Zeile definiert den expliziten Funktionsterm (später wird z als Variable verwendet, daher steht hier nicht z , sondern $zterm$), und entscheidend ist die dritte Zeile.



Einen deutlicheren Effekt bekommt man durch eine geeignete Streckung in z-Richtung:

```
plotfunc3d(zterm, x=-xx..xx, y=-yy..yy, ZRange = -zz..zz)
```



Die Fläche hat offenbar eine *Falte*. Es handelt sich um die einfachste „Katastrophenfläche“; Näheres findet sich in Saunders oder in Thom; bei Thom gibt es auf S. 78 ein sehr eindrucksvolles Bild, das die Fläche mit dem Verhalten eines Hundes in Beziehung bringt. Eine Einführung der Fläche, die näher bei der Katastrophentheorie liegt, findet man etwa bei Bruce / Giblin, chapter 1.

2.2 Angabe der impliziten Gleichung

Alternativ bekommt man die Fläche auch durch die implizite Gleichung (was wir hier aber später nicht verwenden):

```
Glg:=z=zterm:
ppp:=plot::Implicit3d(Glg, x = -xx..xx, y = -yy..yy, z = -zz..zz):
plot(ppp)
```

Man beachte in der ersten Zeile, dass die Gleichung die Gestalt $z = zterm$ hat.

2.3 Angabe des allgemeinen Punktes

Schließlich kann man die Fläche auch durch einen allgemeinen Punkt beschreiben:

```
Fl:= plot::Surface([x, y, zterm], x=-xx..xx, y=-yy..yy):
Fl::Color:=RGB::Blue: Fl::ViewingBoxZRange=-zz..zz:
plot(Fl)
```

2.4 Übungen

Man experimentiere mit anderen Flächentermen, etwa mit $z = x^2 + y^2$, $z^2 = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z = x \cdot y$, $z = x^2 - y^2$, $z = y^2 - x^2$, $z = x^2$, $z = x^3 - 3 \cdot x \cdot y^2$. Man darf auch höhere Grade benutzen, und x oder y dürfen auch im Nenner stehen!

3. Tomographie

Eine Fläche mit dem Funktionsterm $z = f(x, y)$ kann man sich als Gebirge vorstellen: Zu jedem Punkt (x, y) der x - y -Koordinatenebene gibt es eine wohlbestimmte Höhe z . Geographen bilden ein Gebirge durch Höhenlinien ab; dabei handelt es sich um Schnitte des Gebirges mit Ebenen, die zur x - y -Koordinatenebene parallel sind. Allgemeiner bekommt man Aufschluss über die Gestalt eines dreidimensionalen Gebildes, wenn man es mit zueinander parallelen Ebenen schneidet und die Schnittkurven untersucht. Auch in der Computer-Tomographie wird dieses Verfahren angewendet; daher die Überschrift (richtiger wäre der – allerdings ungebräuchlich – Ausdruck Tomoskopie).

Hier soll die kubische Fläche geschnitten werden mit drei Scharen von Ebenen: 1. Parallelen zur x - y -Koordinatenebene, 2. Parallelen zur x - z -Koordinatenebene, 3. Parallelen zur y - z -Koordinatenebene. Bei anderen Flächen sind ggf. auch andere Schnittebenen sinnvoll.

3.1 Tomographie senkrecht zur x -Achse

Schneidet man die Fläche mit der zu $x = a$ gehörigen Ebene, so ergibt sich die Schnittkurve mit dem allgemei-

nen Punkt $\begin{pmatrix} a \\ y \\ a^3 + a \cdot y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ a^3 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$. Die Fläche besteht somit aus den Geraden $g_a : X = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ a^3 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$.

Der Code

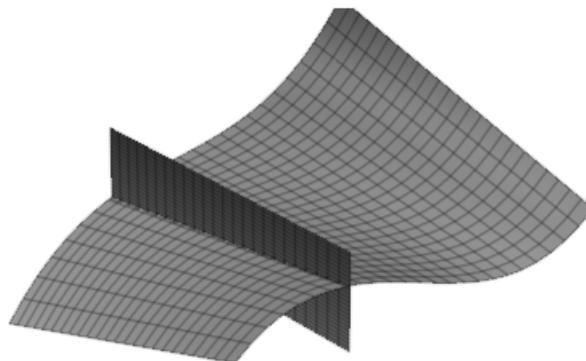
```
Fx:=a-> plot::Surface([a, y, z], y=-yy..yy, z=-2..2, Color=RGB::Blue):
```

liefert eine solche Schnittebene zu $x = a$.

Will man die Schnittebene sich bewegen lassen (Animation), kommt man mit

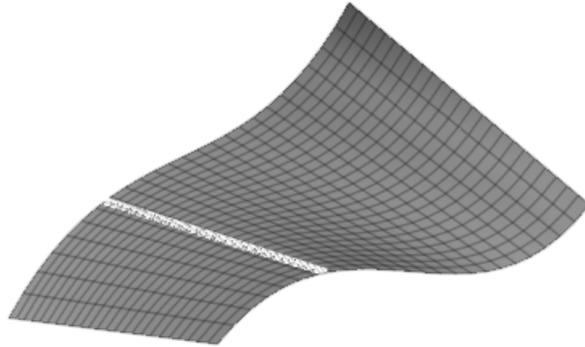
```
Fx_ani:=plot::Surface([a, y, z], y=-yy..yy, z=-2..2, a=-1..1,
  Color=RGB::Blue):
plot(Fl, Fx_ani, Axes=None)
```

zum Ziel.



Aus diesem Grunde lässt sich die Fläche durch *Fäden* veranschaulichen, die senkrecht zur x -Achse verlaufen:

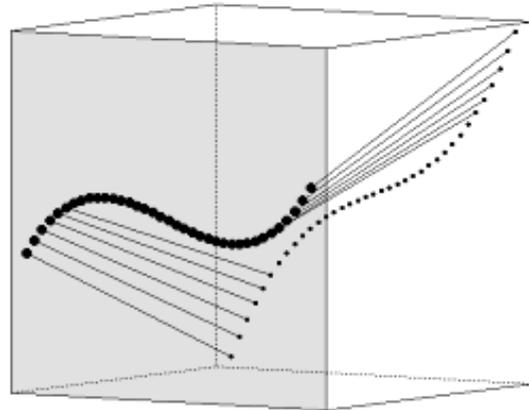
```
Faden_ani:=plot::Curve3d([a, y, a^3+a*y], y=-yy..yy, a=-1..1,
  LineWidth=1.4, Color=RGB::White):
plot(Fl, Faden_ani, Axes=None):
```



Man kann somit mit Plexiglas und Fäden ein Fadenmodell bauen (vgl. Kap. 0); siehe die nebenstehende Abbildung.

Diese Faden-Geraden sind alle windschief zueinander und selbstverständlich alle senkrecht zur x-Achse.

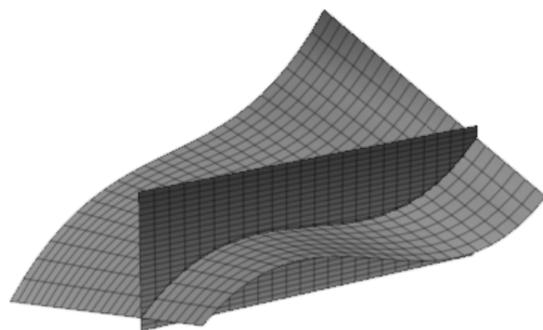
Die Fläche zu $z = x^3 + x \cdot y$ „besteht“ somit aus Geraden; solche Flächen nennt man Regelflächen. Auch Zylinder oder Kegel sind Regelflächen; ebenso das hyperbolische Paraboloid (Meyer [1]) oder das einschalige Hyperboloid (das etwa durch Rotation der Hyperbel mit $x^2 - y^2 = 1$ um die y-Achse entsteht).



3.2 Tomographie senkrecht zur y-Achse

Die Schnittkurve mit der zu $y = b$ gehörigen Ebene hat die Gleichung $z = x^3 + b \cdot x$; man bekommt die originalen Parameterkurven zurück. Dies lässt sich wieder durch Animation deutlich machen:

```
Fy_ani:=plot::Surface([x, b, z],
  x=-xx..xx, z=-2*zz..2*zz,
  b=-1..1,
  Color=RGB::Blue):
plot(Fl, Fy_ani, Axes=None):
```



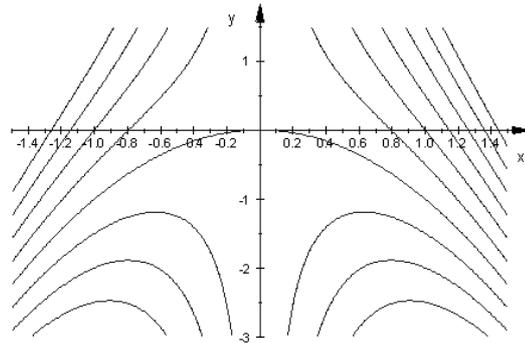
3.3 Tomographie senkrecht zur z-Achse

Die Schnittkurve mit der zu $z = c$ gehörigen Ebene hat die Gleichung $y = \frac{c}{x} - x^2$. Asymptoten sind die y-

Achse und die umgekehrte Normalparabel.

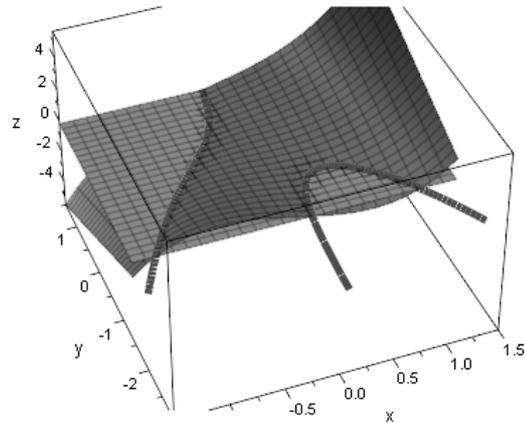
Diese Höhenlinien kann man in MuPad folgendermaßen sichtbar machen:

```
plot(plot::Implicit2d(x^3+x*y,
x=-1.5..1.5, y=-3..1.5,
  Contours=[-2, -1.5, -1, -.5,
0, .5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3]))
```



Den Zusammenhang zwischen der Fläche und den Höhenlinien sieht man am besten, wenn auch die schneidende Fläche mit eingezeichnet ist:

```
Hyp := c->plot::Curve3d([x,
c/x-x^2, c], x=-xx..xx,
LineWidth=1.4,
  Color=RGB::Blue):
Fz:=c->plot::Surface([x, y,
c], x=-xx..xx, y=-yy..yy,
  Color=RGB::Yellow):
plot(F1, Fz(-.2), Hyp(-.2))
```



Man kann den Informationsreichtum dieses Bildes viel besser auf dem Bildschirm würdigen.

3.4 Übungen

Man untersuche auf analoge Weise andere Flächen, etwa die in 2.4 genannten. Welche enthalten Geraden? Bei welchen bekommt man die Geraden durch Tomographie?

Das hyperbolische Paraboloid wurde in MEYER [1] untersucht, und zwar auch im Hinblick auf das folgende Kapitel.

4 Tangentialebenen

4.1 Zur Gleichung der Tangentialebene

Unsere kubische Fläche wird sicherlich überall Tangenten haben. Doch was soll eine Tangente eigentlich sein? Aufgrund der Vorerfahrungen mit Kurven wird man sagen: Eine Tangente in einem Kurvenpunkt P ist eine solche Gerade, die die Kurve in P (mindestens) zweifach schneidet. (Bei Kurven mit Doppelpunkten oder Spitzen muss man diese Definition etwas abändern; Einzelheiten etwa bei GIBSON, chapter 7 oder bei MEYER [3]) Außerdem weiß man von $y = x^3$, dass die Tangente die Kurve durchsetzen kann.

Analog kann man auch bei Flächen vorgehen (wenn sie hinreichend harmlos sind wie die hier untersuchte):

Eine Gerade durch $P = \begin{pmatrix} a \\ b \\ a^3 + a \cdot b \end{pmatrix}$ hat den allgemeinen Punkt $X(t) = P + t \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + t \cdot u \\ b + t \cdot v \\ a^3 + a \cdot b + t \cdot w \end{pmatrix}$.

Schneidet man sie mit der kubischen Fläche, bekommt man die *Schnittgleichung*

$$(a + t \cdot u)^3 + (a + t \cdot u) \cdot (b + t \cdot v) = a^3 + a \cdot b + t \cdot w. \quad (\text{S})$$

Diese hat natürlich die (zu P gehörige) Lösung $t = 0$.

Damit die Gerade Tangente ist, muss die Schnittgleichung (S) die Lösung $t = 0$ (mindestens) doppelt haben.

Bei der näheren Betrachtung von (S) könnte der Fall $u = 0$ Ärger machen; man kann diesen Fall jedoch ausschließen, da $u = 0$ die Gleichung $t \cdot (w - a \cdot v) = 0$ zur Folge hätte. Die in Rede stehende Gerade hätte dann die

Gestalt $X(t) = P + t \cdot v \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$, und es handelte sich dann um eine in 3.3 untersuchte Fadengerade. Diese ist sicherlich Tangente, da sie ganz innerhalb der Fläche liegt.

Eine Vereinfachung von (S) liefert

$$t \cdot (t^2 \cdot u^3 + t \cdot (3 \cdot a \cdot u^2 + u \cdot v) + 3 \cdot a^2 \cdot u + a \cdot v + b \cdot u - w) = 0. \quad (T)$$

Man sieht: $t = 0$ ist doppelte Lösung von (S) bzw. von (T), wenn $w = 3 \cdot a^2 \cdot u + a \cdot v + b \cdot u$ ist.

(Natürlich kann man alle diese Umformungen auch mit dem Computer-Algebra-System vornehmen; es geht aber viel schneller im Kopf!)

Nun kommt ein wichtiger Schritt: Die Gleichung $w = 3 \cdot a^2 \cdot u + a \cdot v + b \cdot u$ lässt sich auch schreiben als

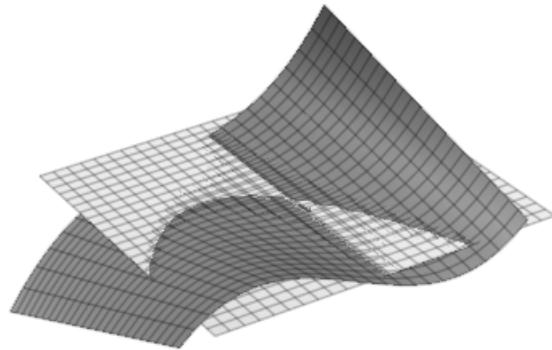
$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \cdot a^2 + b \\ a \\ -1 \end{pmatrix} = 0.$$

Das heißt aber: Alle Tangenten durch $P = \begin{pmatrix} a \\ b \\ a^3 + a \cdot b \end{pmatrix}$ liegen in einer Ebene mit der Gleichung

$$\boxed{X \cdot \begin{pmatrix} 3 \cdot a^2 + b \\ a \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \cdot a^3 + a \cdot b}. \text{ Dies ist die } \textit{Tangentialebene} \text{ zu } P = \begin{pmatrix} a \\ b \\ a^3 + a \cdot b \end{pmatrix}.$$

Die Tangentialebene *durchsetzt* die Fläche:

```
TF := (a, b)-
>plot::Surface([a+u, b+v,
a^3+a*b+u*(3*a^2+b)+v*a],
u=-1.5..1.5, v=-1.5..1.5,
Color=RGB::Yellow):
plot(Fl, TF(0.4, 0.2), Axes=
es=None)
```



Das Bild ist wiederum überzeugender, wenn man es nicht als Schwarzweißgraphik vor sich hat, sondern in manipulierbarer farbiger Gestalt auf dem Bildschirm.

Will man etwa zusätzlich den Normalenvektor der Tangentialebene sichtbar machen, gelingt das durch den fol-

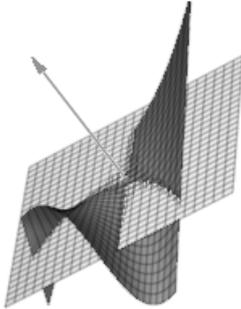
genden Code; die Anweisung für PPN spiegelt die Parameterform einer Geraden durch $GP = \begin{pmatrix} a \\ b \\ a^3 + a \cdot b \end{pmatrix}$ mit

dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 3 \cdot a^2 + b \\ a \\ -1 \end{pmatrix}$ wieder. Die Anweisung `Scaling = Constrained` verhindert unerwünschte Achsenverzerrungen.

```

GP:=(a, b)->matrix([a, b, a^3+a*b]):
NV:=(a, b)->matrix([3*a^2+b, a, -1]):
PPN:= (a, b, n)->plot::Arrow3d(GP(a, b), GP(a, b)+n*NV(a, b),
  Color=RGB::Green):
Fl1:= plot::Surface([x, y, zterm], x=-1..1, y=-.8..0.8,
  Color=RGB::Red):
a:=.2: b:=.5: plot(Fl1, TF(a, b), PPN(a, b, -2),
  Scaling = Constrained): delete a: delete b

```



Zu jedem (endlichen) Punkt $P = \begin{pmatrix} a \\ b \\ a^3 + a \cdot b \end{pmatrix}$ der Fläche lässt sich die

Tangentialebene aufstellen (eine analoge Aussage wäre für den Kegel falsch).

Da der Normalenvektor durch $\begin{pmatrix} 3 \cdot a^2 + b \\ a \\ -1 \end{pmatrix}$ gegeben ist, gilt:

- Tangentialebenen sind nie senkrecht zur x- oder zur y-Achse.
- Zwei Tangentialebenen stehen nie aufeinander senkrecht.
- Zwei Tangentialebenen sind nie zueinander parallel.

Nebenbemerkung: Der Normalenvektor $\begin{pmatrix} 3 \cdot x^2 + y \\ x \\ -1 \end{pmatrix}$ lässt sich schreiben als $P_y \times P_x$ mit

$$P_x := \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^3 + x \cdot y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \cdot x^2 + y \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad P_y := \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^3 + x \cdot y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ y \end{pmatrix}.$$

Beschreibt man den Kurvenpunkt allgemein durch $\begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{pmatrix}$, so ist der Normalenvektor durch $\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \\ -1 \end{pmatrix}$

gegeben.

4.2 Schnitt der Tangentialebene mit der Fläche

Offensichtlich ist die *Schnittkurve* von Tangentialebene $z = x \cdot (3 \cdot a^2 + b) + y \cdot a - (2 \cdot a^3 + a \cdot b)$ und Fläche

$z = x^3 + x \cdot y$ recht interessant. Hieraus folgt durch Elimination von z die Gleichung

$$(x - a) \cdot (y + x^2 + a \cdot x - 2 \cdot a^2 - b) = 0.$$

Für $x = a$ ist $z = a^3 + a \cdot y$; der allgemeine Punkt der Schnittkurve hat damit die Gestalt

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ y \\ a^3 + a \cdot y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ a^3 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} \quad \text{und liefert somit die schon bekannte Faden-Gerade.}$$

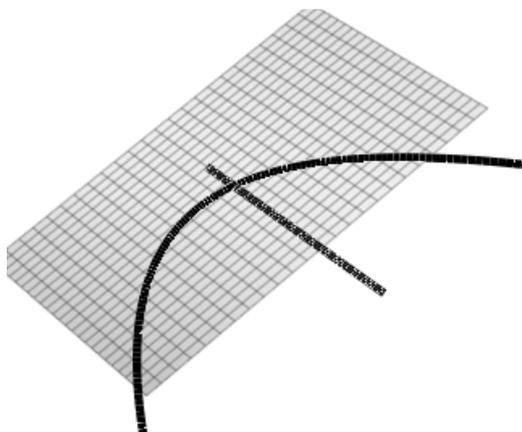
Für $y = -x^2 - a \cdot x + 2 \cdot a^2 + b$ (Parabelgleichung in der x - y -Ebene) bekommt man die Schnittkurve dadurch, dass man die Parabel in der x - y -Koordinatenebene auf die Tangentialebene projiziert; dadurch ändert sich nichts an der Parabeleigenschaft. Wegen $z = -a \cdot x^2 + 2 \cdot a^2 \cdot x + b \cdot x$ hat der allgemeine Punkt der Schnittkurve die

$$\text{Form} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x^2 - a \cdot x + 2 \cdot a^2 + b \\ -a \cdot x^2 + 2 \cdot a^2 \cdot x + b \cdot x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \cdot a^2 + b \\ 0 \end{pmatrix} + x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -a \\ 2 \cdot a^2 + b \end{pmatrix} + x^2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -a \end{pmatrix}.$$

```
Faden := a->plot::Curve3d([a, y,
a^3+a*y], y=-yy..2*yy,
  LineWidth=1.4, Color=RGB::Black):
```

```
Parabel:= (a, b)->plot::Curve3d([x,
2*a^2-a*x-x^2+b, 2*a^2*x-a*x^2+b*x],
  x=-xx..xx, LineWidth=1.4,
  Color=RGB::Black):
```

```
a:=.2: b:=1: plot(TF(a, b), Faden(a),
Parabel(a, b), Axes=None):
  delete(a): delete(b)
```



All das lässt sich mit einem Realmodell nicht offensichtlich machen!

4.3 Zum qualitativen Krümmungsverhalten

Man könnte anhand der Graphik den Eindruck haben, als würden immer Teile der Fläche ober- und andere Teile

unterhalb der Tangentialebene liegen. Ist das immer so? Wir fixieren dazu den Punkt $P = \begin{pmatrix} a \\ b \\ a^3 + a \cdot b \end{pmatrix}$ und be-

rechnen den Abstand des beliebigen Flächenpunktes $Q = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^3 + x \cdot y \end{pmatrix}$ zur Tangentialebene von P . Das geeignete

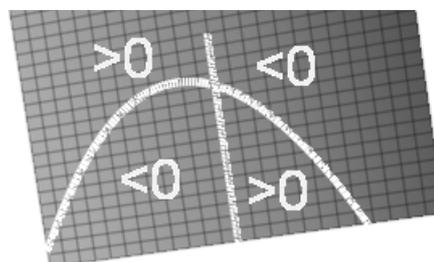
Werkzeug ist die Vorzeichen-sensitive HESSE'sche Normalform. Da es aber nur auf das Vorzeichen ankommt, sparen wir uns die Normierung des Normalenvektors; der entscheidende Term ist dann

$$(Q-P) \cdot \begin{pmatrix} 3 \cdot a^2 + b \\ a \\ -1 \end{pmatrix} = -(x-a) \cdot (y + x^2 + a \cdot x - 2 \cdot a^2 - b)$$

Wir haben schon untersucht, wo dieser Term verschwindet. Der Term zeigt aber noch mehr:

Rund um die Kreuzung von Gerade und Parabel wechseln sich positive und negative Vorzeichen ab; tatsächlich liegen immer Teile der Fläche ober- und andere unterhalb der Tangentialebene!

Punkte mit diesem Verhalten heißen hyperbolisch; sie unterscheiden sich grundsätzlich von Punkten einer Kugel (die elliptisch heißen) oder von (parabolisch genannten) Punkten eines Zylinders.



Das Krümmungsverhalten wird quantitativ in Kap. 10 näher untersucht.

4.4 Schmiegetangenten

In 4.1 spielte die Schnittgleichung (T) $t \cdot (t^2 \cdot u^3 + t \cdot u \cdot (3 \cdot a \cdot u + v) + 3 \cdot a^2 \cdot u + a \cdot v + b \cdot u - w) = 0$

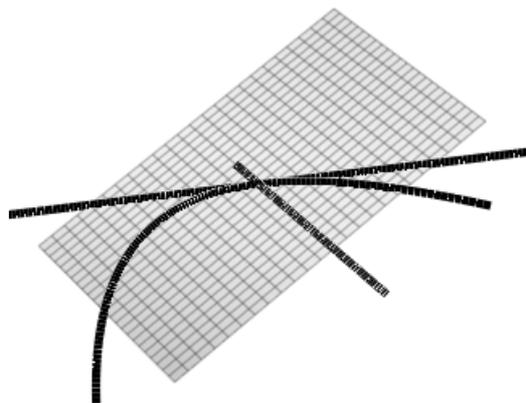
eine Rolle. Wenn $w = 3 \cdot a^2 \cdot u + a \cdot v + b \cdot u$ ist, hat (T) die doppelte Lösung $t = 0$.

Wenn sogar $3 \cdot a \cdot u + v = 0$ ist (den Fall $u = 0$ hatten wir ausgeschlossen), hat die Tangente mit der Fläche sogar einen dreifachen Schnittpunkt. Eine solche Tangente heißt *Schmiegetangente*.

Ganz offensichtlich gibt es zu jedem (endlichen) Flächenpunkt eine Schmiegetangente. Bei kubischen Funktionen hat nur die Wendepunkt-Tangente die Eigenschaft, dass sie die Kurve dort dreifach schneidet.

Die Schmiegetangente zu $P = \begin{pmatrix} a \\ b \\ a^3 + a \cdot b \end{pmatrix}$ hat also den allgemeinen Punkt $X(t) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ a^3 + a \cdot b \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \cdot a \\ b \end{pmatrix}$.

```
SchmTang := (a, b) -> plot::Curve3d([a+t, b-3*a*t, a^3+a*b+t*b],
    t=-1.5..1.5, LineWidth=1.4, Color=RGB::Black):
a:=.5: b:=1: plot(TF(a, b), Faden(a), Parabel(a, b),
    SchmTang(a, b), Axes=None): delete(a): delete(b):
```



Man überlegt sich leicht, dass die Schmiegetangente Tangente an die Schnittparabel ist. Da der Richtungsvektor der Schmiegetangente

durch $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \cdot a \\ b \end{pmatrix}$ gegeben ist, gilt:

- Schmiegetangenten sind nie senkrecht zur x-Achse.
- Zwei Schmiegetangenten stehen nie aufeinander senkrecht.

Zwei Schmiegetangenten sind nie zueinander parallel.

4.5 Übungen

Man bestimme die Tangentialebenen anderer Flächen, etwa der in 2.4 genannten. Welche enthalten Schmiegetangenten? Welches Krümmungsverhalten zeigen die anderen Flächen? Gibt es auch Flächen, die sowohl hyperbolische als auch elliptische als auch parabolische Punkte enthalten?

Man untersuche insbesondere auch die beiden folgenden Flächen auf die verschiedenen Punktarten:

- den Torus
- die Rotationsfläche, die entsteht, wenn die aus der Stochastik bekannte GAUß'sche Glockenkurve um ihre Achse gedreht wird.

5. Die NEIL'sche Parabel

5.1 Vorbemerkung

In den bisherigen Kapiteln wurde i. w. die kubische Fläche in Beziehung zu bereits bekanntem Stoff gebracht; dass dabei der „bekannte“ Stoff z. T. neue Facetten zeigte, unterstreicht den methodischen Wert dieses Beispiels.

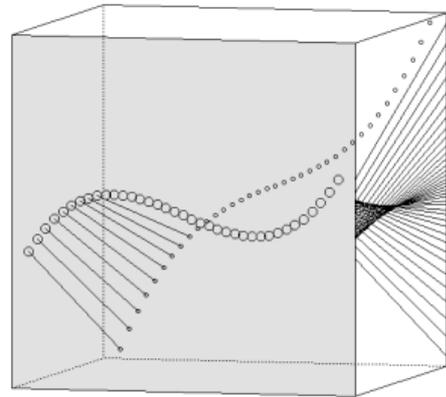
In diesem und in den sich anschließenden Kapiteln wird erläutert, wie die kubische Fläche zum Studium neuer Objekte einlädt.

5.2 Ein Algorithmus zur Bestimmung von Hüllkurven

Projiziert man die Faden-Geraden

$$g_a : X = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ a^3 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} \text{ senkrecht auf die } y\text{-}z\text{-Koordinatenebene, erhält man } h_a : z = a^3 + a \cdot y. \text{ Diese Geraden hüllen eine Kurve ein; im Bild liegen die Geraden in der rechten Fläche.}$$

Ein 3D-Diagramm zeigt ein rechteckiges Koordinatensystem. In der rechten vertikalen Ebene sind mehrere Geraden gezeichnet, die von links nach rechts verlaufen. Diese Geraden sind so positioniert, dass sie eine wellenförmige Kurve in der y-z-Ebene umhüllen. Die Kurve ist durch eine Reihe von kleinen Kreisen dargestellt, die die Punkte der Kurve markieren. Die Geraden scheinen als Projektionen von Fäden in den Raum zu sein.



Um welche Kurve handelt es sich? Für gewöhnlich behandelt man die Aufgabe, wie man bei einer gegebenen Kurve in jedem Kurvenpunkt die Tangente berechnet. Eine Kurve wird dabei aufgefasst als Menge von Punkten; gesucht ist dann die Menge der Berührgeraden.

Dualisiert man diese Fragestellung, so ist eine Kurve aufzufassen als Hüllkurve von Tangenten; gesucht ist dann die Menge der Kurvenpunkte. Die Aufgabe besteht also darin, zu einer beliebigen Tangente den Berührungspunkt mit der Kurve zu finden.

Da das neue Problem zum alten dual ist, sollte auch die neue Lösung zur alten dual sein. Wie geht man bei der Lösung des alten Problems vor?

Statt der gesuchten Tangente t_P in einem Kurvenpunkt P berechnet man zunächst die Sekante PQ mit einem zweiten beliebigen Kurvenpunkt Q . Die Tangente in P erklärt man dann als die Grenzgerade der Sekante für $Q \rightarrow P$: Es ist $t_P = \lim_{Q \rightarrow P} PQ$.

Diese Vorgehensweise lässt sich vollständig dualisieren:

Statt des gesuchten Berührungspunkts B_g für eine Tangente g berechnet man zunächst den Schnittpunkt $g \cap h$ mit einer zweiten beliebigen Tangente h . Den Berührungspunkt von g erklärt man dann als den Grenzpunkt des Schnittpunkts für $h \rightarrow g$: Es ist $B_g = \lim_{h \rightarrow g} g \cap h$.

Viele Beispiele für diese Vorgehensweise findet man in MEYER [2].

5.3 Zur NEIL'schen Parabel als Hüllkurve

Gegeben sind ihre Tangenten mit der Gleichung $h_a : z = a^3 + a \cdot y$. Zwei Tangenten (zu den Parametern a und b) schneiden einander in $S = \begin{pmatrix} -a^2 - a \cdot b - b^2 \\ -a^2 \cdot b - a \cdot b^2 \end{pmatrix}$. Für $b \rightarrow a$ bekommt man den Berührungspunkt $\begin{pmatrix} -3 \cdot a^2 \\ -2 \cdot a^3 \end{pmatrix}$. Die Kurve hat somit die Gleichung $\left(\frac{-y}{3}\right)^3 = \left(\frac{z}{2}\right)^2$. Es handelt sich um die *NEIL'sche Parabel*.

5.4 Ein alternativer Weg zur NEIL'schen Parabel

Eine beliebige Gerade, die zur z -Achse parallel ist, hat den allgemeinen Punkt $\begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ t \end{pmatrix}$; sie schneidet die kubische Fläche für $t = u^3 + u \cdot v$, also stets genau einmal.

Eine beliebige Gerade, die zur y -Achse parallel ist, hat den allgemeinen Punkt $\begin{pmatrix} u \\ 0 \\ w \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ t \\ w \end{pmatrix}$; sie schneidet die kubische Fläche für $w = u^3 + u \cdot t$. Für $u \neq 0$ gibt es also stets einen Schnittpunkt. Falls $u = 0$ ist, ist auch $w = 0$ und die Gerade mit dem allgemeinen Punkt $\begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$ verläuft ganz innerhalb der Fläche.

Viel interessanter ist die analoge Frage nach den Geraden, die zur x -Achse parallel sind. Sie haben den allgemeinen Punkt $\begin{pmatrix} 0 \\ v \\ w \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ v \\ w \end{pmatrix}$. Schneidet man sie mit der Fläche, erhält man die Schnittgleichung $t^3 + t \cdot v - w = 0$; diese hat eine, zwei oder drei Lösungen.

Wir fragen, unter welchen Umständen die Gleichung drei reelle Lösungen hat, die nicht alle verschieden sind.

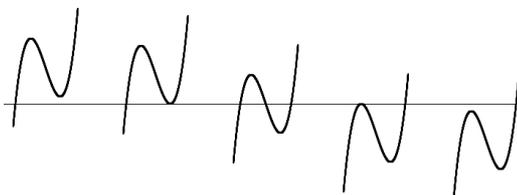
Zur Schnittgleichung gehört die Funktion $y = x^3 + v \cdot x - w$.

Man sieht sofort: Für $v > 0$ gibt es stets genau eine reelle (einfache) Nullstelle.

Für $v = 0$ gibt es genau dann eine mehrfache reelle Lösung, wenn $u = 0$ ist.

Für $v < 0$ können 5 Fälle – siehe nebenstehen – auftreten.

Man erkennt: Es gibt genau dann zusammenfallende reelle Nullstellen, wenn das Produkt der Extremwertordinaten verschwindet.



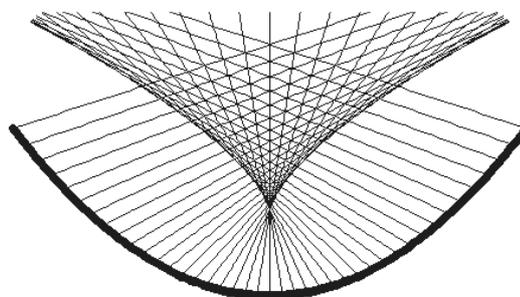
Man rechnet schnell nach, dass die Extremwertabszissen durch $\pm\sqrt{-\frac{v}{3}}$ und die Extremwertordinaten durch $\pm\frac{2\cdot v}{3}\cdot\sqrt{-\frac{v}{3}}-w$ gegeben sind; das in Rede stehende Produkt hat folglich den Wert $w^2 + \frac{4}{27}\cdot v^3$.

Daraus folgt das Ergebnis: Die obige Schnittgleichung hat genau dann mehrfache Lösungen, wenn $\left(\frac{w}{2}\right)^2 + \left(\frac{v}{3}\right)^3 = 0$ ist. Diese Gleichung beschreibt die gleiche NEIL'sche Parabel wie die oben aus der Hüllkurveneigenschaft hergeleitete.

5.5 Übungen

Die NEIL'sche Parabel hat schöne mathematische Eigenschaften und mehrere Beziehungen zur gewöhnlichen quadratischen Parabel. Man informiere sich darüber im Internet oder in MEYER [2] und MEYER [5]. Insbesondere liegen die Mittelpunkte aller Krümmungskreise einer quadratischen Parabel auf einer NEIL'schen Parabel. Man bekommt dieselbe Kurve auch als Hüllkurve aller Parabelnormalen.

```
fff:=plot::Function2d(x^2, x=-1..1,
LineWidth=2):
Normale:=a->plot::Curve2d([a+t*(-
2*a)/sqrt(1+4*a^2),
a^2+t*1/sqrt(1+4*a^2)], t=0..2,
LineWidth=.1):
vieleNormalen:=a.j:=Normale(j/20) $j=-
20..20:
plot(fff, vieleNormalen, Axes=None)
```



6. Kurven auf der Fläche

Wir haben schon gesehen, dass auf der Fläche mit der Gleichung $z = x^3 + x \cdot y$ unterschiedliche Kurven liegen:

- die Faden-Geraden $g_a : z = a^3 + a \cdot y$ (in der Ebene mit $x = a$),
- die kubischen Parabeln mit der Gleichung $z = x^3 + b \cdot x$ (in der Ebene mit $y = b$),
- die kubischen Kurven mit der Gleichung $y = \frac{c}{x} - x^2$ (in der Ebene mit $z = c$),
- die Parabeln mit dem allgemeinen Punkt $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \cdot a^2 + b \\ 0 \end{pmatrix} + x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -a \\ 2 \cdot a^2 + b \end{pmatrix} + x^2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -a \end{pmatrix}$ (in der Tangentialebene zu

$$P = \begin{pmatrix} a \\ b \\ a^3 + a \cdot b \end{pmatrix}.$$

Diese Kurven sind alle eben. Aber selbstverständlich gibt es auch räumliche Kurven auf der Fläche; diese werden zum Beispiel geliefert durch das Folgende:

6.1 Extrema der kubischen Parabeln

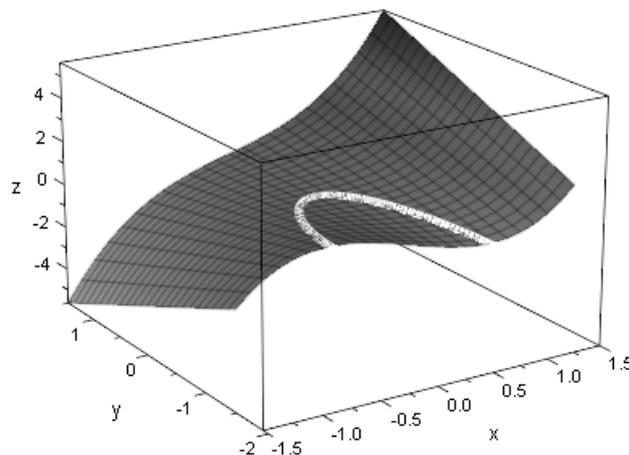
Die kubische Parabel mit der Gleichung $z = x^3 + b \cdot x$ hat für $b < 0$ ein *Extremum* bei $x = \pm \sqrt{\frac{-b}{3}}$. Mit

$u := \sqrt{\frac{-b}{3}}$ gilt: Das Extremum ist $\begin{pmatrix} \pm u \\ -3 \cdot u^2 \\ \mp 2 \cdot u^3 \end{pmatrix}$; das obere Zeichen gehört zum Minimum; das untere zum

Maximum. Alle Extrema liegen auf der *räumlichen Parabel* mit dem allgemeinen Punkt

$$\begin{pmatrix} k \\ -3 \cdot k^2 \\ -2 \cdot k^3 \end{pmatrix}.$$

```
Extr:=plot::Curve3d([k,
  -3*k^2, -2*k^3],
  k=-0.8..0.8,
  LineWidth=1.4,
  Color=RGB::White):
plot(Fl, Extr)
```



6.2 Alternative Gewinnung der Extremkurve als Striktionslinie

Zwei Faden-Geraden $g_a : X = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ a^3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$ und $g_b : X = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ b^3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$ sind zueinander windschief. Wir

wollen ihren kürzesten Abstand berechnen.

Das Abstandsquadrat zweier beliebiger Punkte auf g_a und g_b ist gegeben durch

$$\theta := (a-b)^2 + (\lambda-\mu)^2 + (a^3 - b^3 + \lambda \cdot a - \mu \cdot b)^2;$$

dieser Ausdruck soll minimal werden. Das führt zur Bedingung $\lambda = \mu$ und damit zu

$$\theta = (a-b)^2 + (a-b)^2 \cdot (a^2 + a \cdot b + b^2 + \lambda)^2.$$

Man sieht, dass θ minimal wird für

$$\lambda = -(a^2 + a \cdot b + b^2).$$

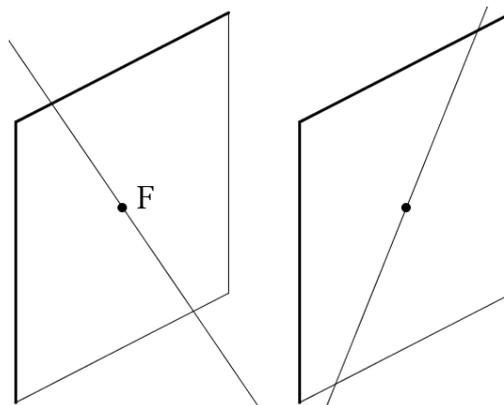
Der kürzeste Abstand ist somit so groß wie $a - b$.

Der Fußpunkt der Lotverbindung ist

$$F_{a,b} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ a^3 \end{pmatrix} - (a^2 + a \cdot b + b^2) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -(a^2 + a \cdot b + b^2) \\ -(a^2 \cdot b + a \cdot b^2) \end{pmatrix}; \text{ für } b \rightarrow a \text{ bekommt man den } \textit{Kehlpunkt}$$

$$K_a = \begin{pmatrix} a \\ -3 \cdot a^2 \\ -2 \cdot a^3 \end{pmatrix}.$$

Die *Striktionslinie* ist nun die Kurve alle Kehlpunkte; sie stimmt mit der Extremkurve in 6.1 überein. Das ist natürlich nicht für alle Flächen der Fall.

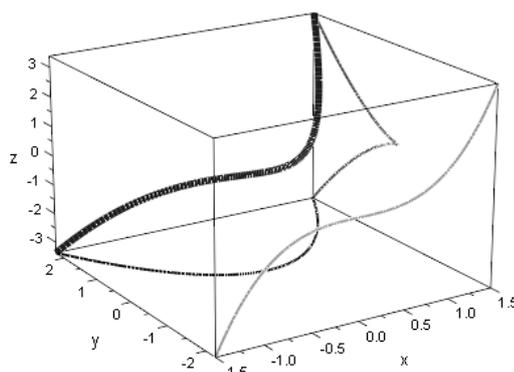


7. Die räumliche Parabel

7.1 Allgemeine Eigenschaften

Ein allgemeiner Punkt auf der räumlichen Parabel hat die Form $\begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$.

```
tt:=1.5:
RP:=plot::Curve3d([t, t^2, t^3],
t=-tt..tt, LineWidth=1.4,
Color=RGB::Blue):
RPx:=plot::Curve3d([tt, t^2,
t^3], t=-tt..tt, LineWidth=.5,
Color=RGB::Red):
RPy:=plot::Curve3d([t, -tt^2,
t^3], t=-tt..tt, LineWidth=.5,
Color=RGB::Green):
RPz:=plot::Curve3d([t, t^2, -
tt^3], t=-tt..tt, LineWidth=.5,
Color=RGB::Black):
plot(RP, RPx, RPy, RPz)
```



Eine *Tangente* hat mit der räumlichen Parabel einen (mindestens) doppelten Schnittpunkt.

Der allgemeine Punkt der Tangente für $t = a$ hat mithin die Form $\begin{pmatrix} a \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \cdot a \\ 3 \cdot a^2 \end{pmatrix}$.

Mit dem Code

```
Tan_ani:=plot::Curve3d([a+s, a^2+s*2*a, a^3+s*3*a^2], s=-2..2,
a=-2..2, LineWidth=.5, Color=RGB::Red):
plot(RP, Tan_ani, Axes=None):
kann man die Tangente an der Kurve entlang wandern lassen.
```

Eine *Schmiegungeebene* hat mit der räumlichen Parabel einen dreifachen Schnittpunkt.

Es sei $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix}$ die Gleichung einer Ebene durch $P = \begin{pmatrix} a \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}$. Schneidet man sie mit der Kurve, so

erhält man die Schnittgleichung $\begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix}$. Die Schnittgleichung hat natürlich die Lösung $t = a$.

Sie soll diese Lösung dreifach haben; dazu muss $v = 3 \cdot a$ und $u = 3 \cdot a^2$ sein.

Mithin hat die *Schmiegungeebene* zu $t = a$ die Gleichung $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \cdot a^2 \\ -3 \cdot a \\ 1 \end{pmatrix} = a^3$.

Mit dem Code

```
SchmEb_ani := plot::Surface([a+u, a^2+a*2*u+2*v,
a^3+3*a^2*u+6*a*v], u=-1.5..1.5, v=-1.5..1.5, a=-2..2,
Color=RGB::Yellow):
plot(RP, Tan_ani, SchmEb_ani, Axes=None)
```

wandern Tangente und Schmiegungeebene an der Kurve entlang. Auf ein statisches Bild wird hier verzichtet, da

das dynamische Wandern viel instruktiver ist.

Auch die Schmiegungeebene durchsetzt die Kurve!

Nebenbemerkung: Der Normalenvektor $\begin{pmatrix} 3 \cdot a^2 \\ -3 \cdot a \\ 1 \end{pmatrix}$ der Schmiegungeebene ist parallel zu

$$\left(\frac{d}{da} \begin{pmatrix} a \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} \right) \times \left(\frac{d^2}{da^2} \begin{pmatrix} a \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} \right).$$

Die räumliche Parabel wurde in Meyer [5] näher untersucht; dort finden sich auch allgemeine Betrachtungen zur Krümmung von Raumkurven.

7.2 Übungen

Man besichtige andere Raumkurven mit MuPad und stelle Tangenten und Schmiegungeebenen auf. Gibt es auch Raumkurven, die nicht überall Tangenten oder Schmiegungeebenen haben?

Das erste Bild in 7.1 zeigt Projektionen der Raumkurve. Andere Projektionen führen zu anderen ebenen Kurven!

Wenn man mag, kann man auch diejenige (recht komplizierte) Fläche untersuchen, die von allen Tangenten der räumlichen Parabel gebildet wird:

```
Tan:=a->plot::Curve3d([a+s, a^2+s*2*a, a^3+s*3*a^2], s=-2..2,
    LineWidth=.5, Color=RGB::Red):
vieleTang := (a.j := Tan(j/20)) $ j=-30..30:
plot(RP, vieleTang, Axes=None)
```

8. Unendlich ferne Punkte

8.1 Unendlich ferne Punkte im Zweidimensionalen

Kurven und Flächen zeigen in den „unendlich fernen“ Punkten mitunter ein ganz überraschendes Verhalten. Um dem auf die Spur zu kommen, muss man vom affinen Punkten und Geraden zu projektiven Punkten und Geraden übergehen. Das geschieht in fünf Schritten:

5. Alle „bisherigen“ Punkte $P = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ der affinen (endlichen) Ebene werden nun als Punkte im Raum be-

trachtet, die in der Ebene mit $z = 1$ liegen; P hat dann die Koordinaten $P = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$.

5. Zu jedem affinen Punkt $P = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$ gibt es eine Ursprungsgerade. Diese heißt *projektiver Punkt*. Die pro-

jektiven Punkte $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \lambda \cdot a \\ \lambda \cdot b \\ \lambda \cdot c \end{pmatrix}$ (für $\lambda \neq 0$) werden als gleich angesehen, da sie zur gleichen Ur-

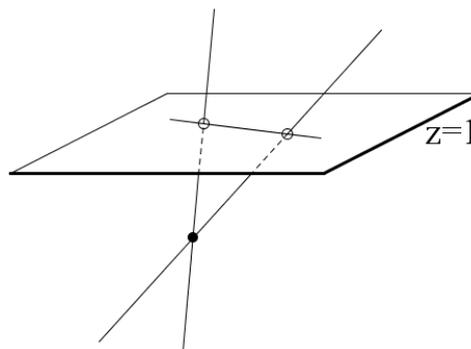
sprungsgeraden gehören; wir schreiben sie als $(a : b : c)$. Insbesondere sind die Koordinaten eines projektiven Punktes *homogen*.

5. Nun kommt die Vervollständigung bezüglich der Punkte: *Jede* Ursprungsgerade wird projektiver Punkt genannt, auch wenn sie die Ebene mit $z = 1$ gar nicht schneidet. So bekommt man die „unendlich fernen Punkte“; sie sind dadurch gekennzeichnet, dass ihre z -Koordinate verschwindet.

Was kann man über die „Lage“ des unendlich fernen Punkts $(u : v : 0)$ sagen? Betrachten wir dazu die affine

Gerade mit dem allgemeinen Punkt $\begin{pmatrix} \lambda \cdot u \\ \lambda \cdot v \end{pmatrix} \square \begin{pmatrix} u \\ v \\ \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}$. Für $\lambda \rightarrow \infty$ bekommt man $(u : v : 0)$.

4. Zu jeder affinen Gerade in der Ebene mit $z = 1$ gibt es eine Ursprungsebene. Diese heißt *projektive Gerade*.
5. Nun kommt die Vervollständigung bezüglich der Geraden: *Jede* Ursprungsebene wird projektive Gerade genannt, und zwar auch dann, wenn sie die Ebene mit $z = 1$ gar nicht schneidet. Dies ist genau für die Ursprungsebene mit $z = 0$ der Fall. Auf dieser *Ferngeraden* liegen alle unendlich fernen Punkte.



Man bekommt die affinen Punkte bzw. Geraden zurück, indem man die projektiven Punkte bzw. Geraden mit der Ebene zu $z = 1$ schneidet.

Man überzeugt sich nun leicht davon, dass zwei projektive Geraden stets einen projektiven Schnittpunkt haben.

Umgekehrt gehört zu zwei projektiven Punkten $(a_0 : b_0 : c_0)$ und $(a_1 : b_1 : c_1)$ eine projektive Gerade, die gegeben ist durch den allgemeinen Punkt

$$(a_0 + a_1 \cdot t : b_0 + b_1 \cdot t : c_0 + c_1 \cdot t) = \begin{matrix} t=1 \\ s \end{matrix} (a_0 \cdot s + a_1 : b_0 \cdot s + b_1 : c_0 \cdot s + c_1);$$

für $t=0$ bekommt man $(a_0 : b_0 : c_0)$, und für $t = \infty$ bzw. $s = 0$ erhält man $(a_1 : b_1 : c_1)$. Die Zwei-Punkte-Form einer projektiven Geraden ist also einfacher als bei affinen Geraden.

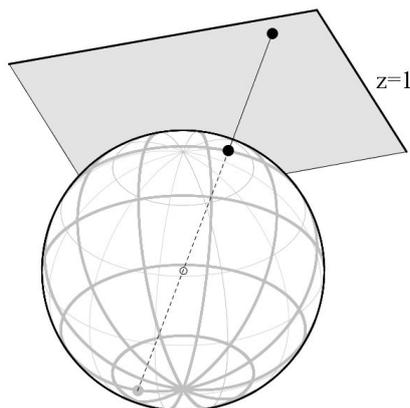
Man würde sich die Ferngerade gerne genauer ansehen. Um dies zu erreichen, projizieren wir die projektiven Punkte und Geraden auf eine Kugel mit der Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Verbindet man $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ mit $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, gelangt man zu

den beiden Kugelpunkten

$\pm \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$. Die Ferngerade wird auf

den Äquator abgebildet.



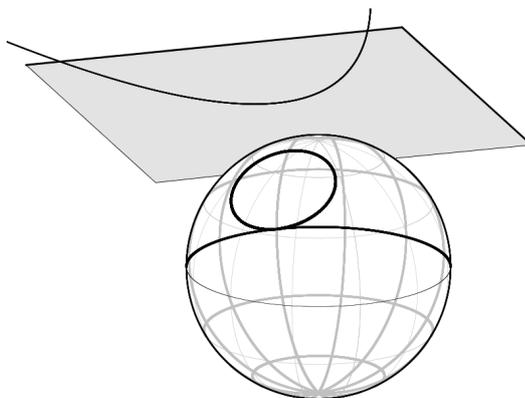
Der Nutzen dieser Projektion wird bei den folgenden Beispielen offensichtlich, die sich mit der Bestimmung der unendlich fernen Punkte einer Kurve befassen. Bei den folgenden Kugelbildern beschränken wir uns auf die Vorderansicht.

Beispiel 1: Parabel mit $y = x^2$ bzw. $\begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$. Der

allgemeine Punkt ist

$$\begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \hat{=} (t : t^2 : 1) \stackrel{t=\frac{1}{s}}{=} (s : 1 : s^2)$$

, und für $s = 0$ bekommt man den (doppelten!) Fernpunkt $(0 : 1 : 0)$.



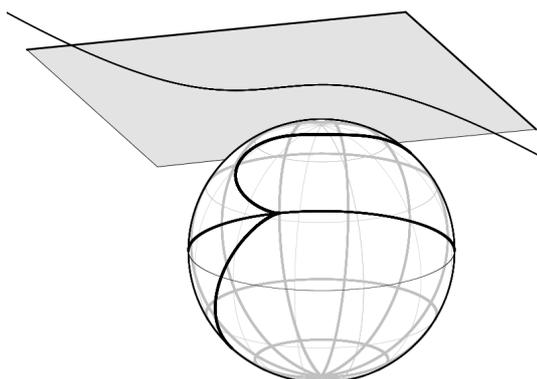
Alternativ kann man auch so vorgehen: Die homogenen Koordinaten der Parabelpunkte erfüllen die Gleichung $y \cdot z = x^2$. Der Schnitt mit der Ferngerade liefert $x = 0$ (doppelt!) und damit den Fernpunkt $(0 : 1 : 0)$.

Beispiel 2: Kubische Parabel mit $y = x^3$ bzw.

$\begin{pmatrix} t \\ t^3 \end{pmatrix}$. Der allgemeine Punkt ist

$$\begin{pmatrix} t \\ t^3 \end{pmatrix} \hat{=} (t : t^3 : 1) \stackrel{t=\frac{1}{s}}{=} (s^2 : 1 : s^3),$$

und für $s = 0$ bekommt man den (dreifachen!) Fernpunkt $(0 : 1 : 0)$.

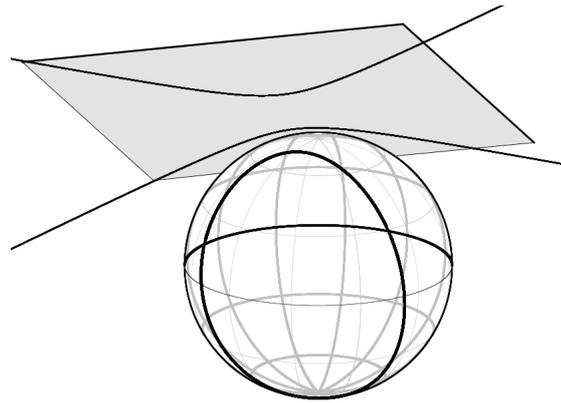


Beispiel 3: Hyperbel mit $y = \frac{1}{x}$ bzw. $\begin{pmatrix} t \\ 1/t \end{pmatrix}$. Der allgemeine Punkt ist

$$\begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{t} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 \\ 1 \\ t \end{pmatrix} \stackrel{t=1/s}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ s^2 \\ s \end{pmatrix}.$$

Für $t=0$ bekommt man den Fernpunkt

$(0 : 1 : 0)$, und für $s=0$ bekommt man den zweiten Fernpunkt $(1 : 0 : 0)$.



Auch hier sei der alternative Weg kurz angedeutet: Die zu den homogenen Koordinaten gehörige Gleichung lautet $x \cdot y = z^2$. Der Schnitt mit der Ferngeraden liefert $x=0$ oder $y=0$ bzw. die Fernpunkte $(0 : 1 : 0)$ und $(1 : 0 : 0)$.

Übrigens: Die Asymptoten sind die Tangenten in den Fernpunkten; auch hieran sieht man, dass die Einführung des Unendlichen keine bloße Spielerei ist.

Aufgrund von $\begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{t} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$ sind Hyperbel und quadratische Parabel projektiv miteinander verwandt.

8.2 Unendlich ferne Punkte im Dreidimensionalen

Im Dreidimensionalen geht alles so wie im Zweidimensionalen; der einzige Unterschied ist nur, dass man sich nichts mehr vorstellen kann. Wir müssen also rein formal und syntaktisch argumentieren (dass das sinnvoll ist und gut geht, wird in Büchern über projektive Geometrie bewiesen).

Aus einem affinen Punkt $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ wird der projektive Punkt $(x : y : z : 1)$ (mit homogenen Koordinaten).

Da Geraden durch zwei Punkte und Ebenen durch drei Punkte bestimmt sind, braucht man sich bei deren projektive Einbettung keine Sorgen zu machen. Die unendlich fernen Punkte liegen nicht mehr auf einer Geraden, sondern in einer Ebene; diese Fernebene enthält die drei Punkte $(1 : 0 : 0 : 0)$, $(0 : 1 : 0 : 0)$ und $(0 : 0 : 1 : 0)$.

Betrachten wir nun unsere kubische Fläche mit dem allgemeinen Punkt $\begin{pmatrix} a \\ b \\ a^3 + a \cdot b \end{pmatrix}$, so wird daraus der projektive

ve Punkt $(a : b : a^3 + a \cdot b : 1) \stackrel{c=1/a}{=} \begin{pmatrix} c^2 \\ b \cdot c^3 \\ 1 + b \cdot c^2 \\ c^3 \end{pmatrix}$; für $c=0$ bekommt man mithin den (dreifachen) Fernpunkt $(0 : 0 : 1 : 0)$.

Außerdem ist $(a : b : a^3 + a \cdot b : 1) \stackrel{d=1/b}{=} \begin{pmatrix} a \cdot d \\ 1 \\ a^3 \cdot d + a \\ d \end{pmatrix}$; für $d=0$ erhält man somit den Fernpunkt $(0 : 1 : a : 0)$. Man sieht, dass alle Fernpunkte auf derjenigen Geraden liegen, die durch die Punkte $(0 : 1 : 0 : 0)$ und $(0 : 0 : 1 : 0)$ geht; sie hat den allgemeinen Punkt $(0 : \beta : \gamma : 0)$.

Leider kann man nicht mehr so schöne Bilder wie bei den Kurven herstellen.

8.3 Tangenten in den Fernpunkten

Wir wollen nun die Tangentialebene zu dem allgemeinen Fernpunkt $(0 : \beta : \gamma : 0)$ bestimmen und gehen vor wie oben in Kap. 4.1.

Eine Gerade durch $(0 : \beta : \gamma : 0)$ hat den allgemeinen Punkt $(0+t\cdot\kappa : \beta+t\cdot\lambda : \gamma+t\cdot\mu : 0+t\cdot\nu)$.

Die kubische Fläche mit dem allgemeinen Punkt $(a : b : a^3 + a\cdot b : 1)$ hat die Gleichung $z\cdot w^2 = x^3 + y\cdot x\cdot w$; dabei ist w die 4. Koordinate.

Dies führt zur Schnittgleichung $(\gamma+t\cdot\mu)\cdot(t\cdot\nu)^2 = (t\cdot\kappa)^3 + (\beta+t\cdot\lambda)\cdot(t\cdot\kappa)\cdot(t\cdot\nu)$ bzw.

$t^2\cdot(t\cdot(\mu\cdot\nu^2 - \kappa^3 - \lambda\cdot\kappa\cdot\nu) + \gamma\cdot\nu^2 - \beta\cdot\kappa\cdot\nu) = 0$, die die Lösung $t=0$ sogar doppelt hat. *Jede* Gerade durch $(0 : \beta : \gamma : 0)$ schneidet die Fläche dort mithin zweifach.

Ein ähnliches Phänomen hat man bei der NEIL'schen Parabel mit der Gleichung $y^2 = x^3$ und dem allgemeinen Punkt $\begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$: *Jede* Ursprungsgerade hat mit der Kurve im Ursprung einen doppelten Schnittpunkt. Tangente wird man dann diejenige Gerade nennen, die im Ursprung die Kurve sogar dreifach schneidet (das Ergebnis ist die x -Achse).

So machen wir es auch hier: Für $\gamma\cdot\nu^2 - \beta\cdot\kappa\cdot\nu = \nu\cdot(\gamma\cdot\nu - \beta\cdot\kappa) = 0$ soll eine Tangente vorliegen. Das ist der Fall für $\nu=0$ und für $\gamma\cdot\nu^2 = \beta\cdot\kappa$.

Schon der erste Fall macht Schwierigkeiten: Der allgemeine Tangentenpunkt ist durch

$$(t\cdot\kappa : \beta+t\cdot\lambda : \gamma+t\cdot\mu : 0) \stackrel{t=\frac{1}{s}}{=} (\kappa : s\cdot\beta+\lambda : s\cdot\gamma+\mu : 0)$$

gegeben, und man sieht: Jede Gerade mit dem Richtungsvektor $(\kappa : \lambda : \mu : 0)$ ist Tangente. Von einer Tangentialebene kann keine Rede sein.

8.4 Projektive Verwandtschaften

Wir haben in 8.1 gesehen, dass Hyperbel und Parabel miteinander verwandt sind. Nun ist auch klar, wie man analoge Verwandtschaften zur kubischen Fläche herstellen kann:

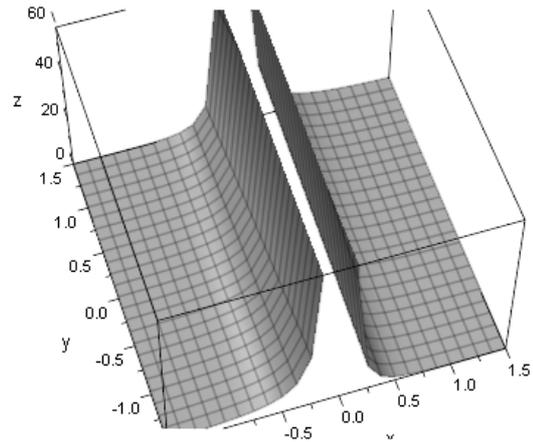
$$\text{Wegen } (a : b : a^3 + a\cdot b : 1) \stackrel{c=\frac{1}{a}}{=} (c^2 : b\cdot c^3 : 1+b\cdot c^2 : c^3) = \left(1 : b\cdot c : \frac{1}{c^2} + b : c\right)$$

kann man die Fläche mit dem allgemeinen affinen

$$\text{Punkt} \begin{pmatrix} b \cdot c \\ b + 1/c^2 \\ c \end{pmatrix} \hat{=} \begin{pmatrix} c \\ b \cdot c \\ b + 1/c^2 \end{pmatrix} \hat{=} \begin{pmatrix} x \\ y \\ y/x + 1/x^2 \end{pmatrix}$$

betrachten mit dem Ergebnis

```
F11:= plot::Surface([x, y,
y/x+1/x^2], x=-xx..xx, y=-
YY..YY):
plot(F11)
```



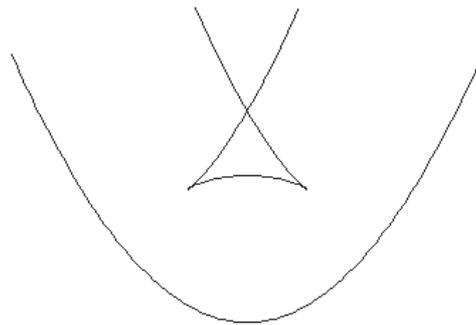
8.5 Übungen

Man untersuche weitere Flächen, die mit $z = x^3 + x \cdot y$ projektiv verwandt sind.

9. Parallel- und andere Flächen

9.1 Paralleflächen

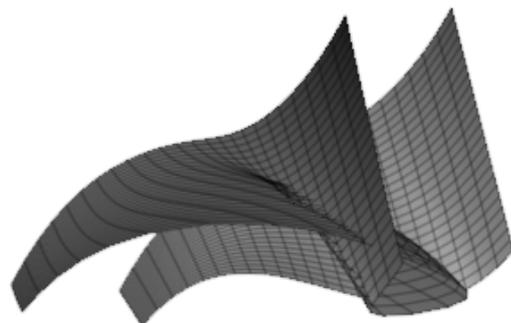
Aus Kurven kann man neue machen! So ist bei der Normalparabel die Frage fruchtbar, welche Kurve man erhält, wenn man in jedem Parabelpunkt a Einheiten senkrecht zur Kurve geht. Für hinreichend große a bekommt man auf diese Weise hinreichend interessante Parallelkurven (vgl. MEYER [6], wo auch andere Ausgangskurven verwendet werden):



```
tt:=1.5:
ParabelPunkt:=t->matrix([t, t^2]):
Parabel:=plot::Curve2d(ParabelPunkt(t), t=-tt..tt):
NormalenVektor:=t->matrix([2*t, -1])/sqrt(4*t^2+1):
ParallelKurvenPunkt:=(t, a)->ParabelPunkt(t)+a*NormalenVektor(t):
ParallelKurve:=a->plot::Curve2d(ParallelKurvenPunkt(t, a),
t=-tt..tt):
ParallelKurve_ani:=plot::Curve2d(ParallelKurvenPunkt(t, a),
t=-tt..tt, a=-2..0.5):
plot(Parabel, ParallelKurve_ani, Axes=None)
```

Eine analoge Vorgehensweise bietet sich auch bei unserer kubischen Fläche an: Zu jedem Kurvenpunkt geht man a Einheiten in Richtung des jeweiligen Normalenvektors:

```
xx:=1.5: yy:=1.5:
FlP:=(x, y)->matrix([x, y,
x^3+x*y]):
Fl:= plot::Surface(FlP(x, y),
x=-xx..xx, y=-yy..yy,
Color=RGB::Red):
NV:=(x, y)->matrix([3*x^2+y, x, -1])/sqrt((3*x^2+y)^2+x^2+1):
PF1P:=(x, y, a)->FlP(x, y)+a*NV(x, y):
```



```
Pf1:=a->plot::Surface(Pf1P(x, y, a), x=-xx..xx, y=-yy..yy,
  Color=RGB::Blue):
plot(Fl, Pf1(-1), Axes=None)
```

Hier zeigen sich „räumliche Fischschwänze“; einen deutlicheren Eindruck bekommt man durch den Anblick der Originalgraphik am Rechner.

Die animierte Fassung bekommt man durch

```
Pf1_ani:=plot::Surface(Pf1P(x, y, a), x=-xx..xx, y=-yy..yy,
  a=-3..0, Color=RGB::Blue):
plot(Pf1_ani, Axes=None)
```

Hier lässt sich fragen: Für welche Werte von a tritt dieser Fischschwanz-Effekt überhaupt auf?

9.2 Spiegelflächen

Mit Parabeln kann man noch viel mehr machen (siehe MEYER [4]):

Man spiegle die Gerade $g: y = v$ punktweise an der Normalparabel. Wie macht man das? Zum Beispiel so:

Von jedem Punkt $P = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$ der Normalparabel wird die Normale mit dem allgemeinen Punkt

$X(s) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \cdot t \\ 1 \end{pmatrix}$ gebildet; diese schneidet die Gerade g für $s = v - t^2$ in

$X(v - t^2) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} + (v - t^2) \cdot \begin{pmatrix} -2 \cdot t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ v \end{pmatrix}$.

Dann gilt für den gespiegelten Punkt C die Beschreibung $C(t) = X(-v + t^2)$, also ist

$$C(t) = \begin{pmatrix} t \cdot (1 + 2 \cdot v) - 2 \cdot t^3 \\ 2 \cdot t^2 - v \end{pmatrix}.$$

Dies alles kann man wörtlich in MuPad übernehmen:

```
tt:=1.5:
P:=t->matrix([t, t^2]):
Parabel:=plot::Curve2d(P(t), t=-
tt..tt, LineWidth=1):
C:=(t, v)->matrix([t*(1+2*v)-2*t^3,
2*t^2-v]):
SpiegelKurve_ani:=plot::Curve2d(C(t,
v), t=-tt..tt, v=-2..2):
plot(Parabel, SpiegelKurve_ani,
Axes=None)
```

Für unterschiedliche Werte von v gibt es unterschiedliche Kurvenformen!



Wiederum lässt sich alles auch für die kubische Fläche mit $z = x^3 + x \cdot y$ durchführen:

Man spiegele die Ebene $E : z = v$ punktweise an der Fläche. Von jedem Flächenpunkt $P = \begin{pmatrix} a \\ b \\ a^3 + a \cdot b \end{pmatrix}$ wird

die Normale mit dem allgemeinen Punkt $X(s) = P = \begin{pmatrix} a \\ b \\ a^3 + a \cdot b \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \cdot a^2 + b \\ a \\ -1 \end{pmatrix}$ gebildet; diese schneidet die

Ebene E für $s = a^3 + a \cdot b - v$ in $X(a^3 + a \cdot b - v) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ a^3 + a \cdot b \end{pmatrix} + (a^3 + a \cdot b - v) \cdot \begin{pmatrix} 3 \cdot a^2 + b \\ a \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ v \end{pmatrix}$.

Dann gilt für den gespiegelten Punkt C die Beschreibung

$$C(a, b) = X\left(v - (a^3 + a \cdot b)\right) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ a^3 + a \cdot b \end{pmatrix} - (a^3 + a \cdot b - v) \cdot \begin{pmatrix} 3 \cdot a^2 + b \\ a \\ -1 \end{pmatrix}.$$

In MuPad erzeugt man die animierte Fläche so:

```
xx:=1.5: yy:=3:
FLP:=(x, y)->matrix([x, y, x^3+x*y]):
NV:=(x, y)->matrix([3*x^2+y, x, -1]):
SpiegelFlaechenPunkt:=(x, y, v)->FLP(x, y)-(x^3+x*y-v)*NV(x, y):
SpiegelFlaechen_ani:=plot::Surface(SpiegelFlaechenPunkt(x, y, v),
    x=-xx..xx, y=-yy..yy, v=-2..2):
plot(SpiegelFlaechen_ani, Axes=None)
```

Auf die Abbildung der entstehenden Flächen soll hier verzichtet werden, weil keine zweidimensionale Darstellung die entstehende Gestalt angemessen wiedergeben kann.

10. Quantitative Krümmung

Bisher wurde die Krümmung in Kap. 4.3 nur qualitativ behandelt; nunmehr soll ihr genauer Wert bestimmt werden.

Die Grundgedanken der in der Differentialgeometrie üblichen Vorgehensweise werden etwa bei HILBERT / COHN-VOSSEN, Kap. 4 recht anschaulich erläutert; die dort beschriebene allgemeine Methode wird hier konkret ausgeführt.

Da die Krümmung in einem Flächenpunkt auf die Krümmung einer ebenen Kurve zurückgeführt wird, müssen wir etwas ausholen:

10.1 Krümmung einer ebenen Kurve, deren Punkte explizit gegeben sind

Als Vorbereitung sehen wir uns zunächst einmal das Verhalten einer Kurve in der zweidimensionalen Ebene an. Man erhält den zu $X(t)$ gehörigen Krümmungskreismittelpunkt $M(t)$, indem man die Normale zu $X(t)$ mit der Normalen zu $X(t+h)$ schneidet und im Schnittpunkt h gegen Null gehen lässt. Am besten kann man Geraden miteinander schneiden, wenn die eine in Parameterform und die andere in Normalenform gegeben ist. Für die Normalenform braucht man einen zum Tangentenrichtungsvektor $X'(t)$ orthogonalen Vektor; dieser sei mit $X'(t)^\perp$ bezeichnet. (Zwar ist $X'(t)^\perp$ nicht eindeutig; die damit verbundene Unbestimmtheit wird sich aber wegekürzen.) Für die allgemeinen Punkte Y der erwähnten Normalen gilt dann:

$$Y = X(t) + s \cdot X'(t)^\perp \quad (\text{Normale zu } t) \text{ und}$$

$$Y \cdot X'(t+h) = X(t+h) \cdot X'(t+h) \quad (\text{Normale zu } t+h).$$

Die Schnittpunktsbestimmung führt auf

$$s = \frac{(X(t+h) - X(t)) \cdot X'(t+h)}{X'(t)^\perp \cdot X'(t+h)} = \frac{\frac{X(t+h) - X(t)}{h} \cdot X'(t+h)}{X'(t)^\perp \cdot \frac{X'(t+h) - X'(t)}{h}}$$

(man beachte im letzten Nenner, dass stets $X'(t)^\perp \cdot X'(t) = 0$ gilt); für $h \rightarrow 0$ bekommt man den Term

$$\frac{X'(t) \cdot X'(t)}{X'(t)^\perp \cdot X''(t)}. \text{ Daher ist } M(t) = X(t) + \frac{X'(t) \cdot X'(t)}{X'(t)^\perp \cdot X''(t)} \cdot X'(t)^\perp; \text{ die Krümmung als reziproker Krümmungs-}$$

$$\text{kreisradius ist } \kappa(t) = \frac{X'(t)^\perp \cdot X''(t)}{|X'(t)|^3}.$$

(Bei diesen Betrachtungen ist $X'(t) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ vorausgesetzt. Für $X'(t)^\perp \cdot X''(t) = 0$ ist zwar der Begriff des Krümmungskreises nicht mehr sinnvoll, wohl aber der Begriff der Krümmung.)

Als Anwendung berechnen wir die Krümmung einer Parabel mit $y = a \cdot x^2$ im Ursprung: Der allgemeine Kurvenpunkt ist $X(t) = \begin{pmatrix} t \\ a \cdot t^2 \end{pmatrix}$, also $X'(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X'(0)^\perp = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X''(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \cdot a \end{pmatrix}$ und $\kappa(0) = 2 \cdot a$. Für $a = 0$ liegt eine Gerade mit $\kappa(0) = 0$ vor.

Für Funktionsgraphen mit $X(x) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $X'(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ y' \end{pmatrix}$, $X'^\perp(x) = \begin{pmatrix} -y' \\ 1 \end{pmatrix}$ und $X''(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ y'' \end{pmatrix}$ ist die Krümmung

$$\text{gegeben durch } \kappa(x) = \frac{y''}{(1+(y')^2)^{3/2}}.$$

10.2 Krümmung von einigen ebenen Kurven in impliziter Gestalt

Wir werden bald den Fall behandeln müssen, dass die Kurvengleichung nur implizit gegeben ist. Es würde zwar nicht weiter schwierig sein, aus den impliziten Gleichungen (die hier samt und sonders Kegelschnitte sein werden) jeweils eine Parameterdarstellung zu entwickeln; es erscheint aber als eleganter, diesen Umweg zu vermeiden.

Zunächst müssen wir uns um die implizite Differentiation kümmern; wir erläutern die Vorgehensweise zunächst am Beispiel des Kreises mit $x^2 + y^2 = 1$.

Für jeden Kreisbogen P kann man in einer Umgebung von P den Kreis durch $y = \varphi(x)$ beschreiben. Für die weitere Vorgehensweise muss man φ gar nicht kennen.

Die Kreisgleichung lautet nun $x^2 + (\varphi(x))^2 = 1$. Leitet man nach x ab, so folgt mit $\varphi(x) = y$ unter Beachtung der Kettenregel das Ergebnis $x + y \cdot y' = 0$ bzw. $y' = -\frac{x}{y}$. (Die Tangente steht also auf dem Radius senkrecht.)

Eine weitere Differentiation liefert $1 + (y')^2 + y \cdot y'' = 0$ und damit $y'' = -\frac{1 + (y')^2}{y} = -\frac{x^2 + y^2}{y^3} = -\frac{1}{y^3}$.

Die Krümmung in einem beliebigen Punkt beträgt daher erwartungsgemäß $\kappa(x) = \frac{y''}{(1 + (y')^2)^{3/2}} = -1$ (wenn man sich um das Vorzeichen nicht kümmert).

Die Vorgehensweise lässt sich verallgemeinern; wir brauchen allerdings nicht den allgemeinsten Fall, sondern können uns auf Kurven mit der Gleichung $\Phi(x, y) := A \cdot x^2 + B \cdot x \cdot y + C \cdot y^2 + D \cdot y = 0$ an der Stelle $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ beschränken.

Die erste Ableitung nach x ergibt $2 \cdot A \cdot x + B \cdot (y + x \cdot y') + 2 \cdot C \cdot y \cdot y' + D \cdot y' = 0$ und daher $y' = 0$ im Ursprung.

Nochmaliges Ableiten liefert $2 \cdot A + B \cdot (2 \cdot y' + x \cdot y'') + 2 \cdot C \cdot ((y')^2 + y \cdot y'') + D \cdot y'' = 0$ und deswegen $y'' = -\frac{2 \cdot A}{D}$ im Ursprung.

Setzt man alles in die Krümmungsformel ein, so erhält man $\kappa(0) = -\frac{2 \cdot A}{D}$.

10.3 Anwendung auf die Flächenkrümmung im Ursprung

Der Ursprung $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ liegt auf der kubischen Fläche mit $z = x^3 + x \cdot y$; die zugehörige Tangentialebene hat den

Normalenvektor $N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Nun betrachten wir eine Ebene E , die durch den Ursprung verläuft und N als einen

Richtungsvektor hat. E soll sich also um den Normalenvektor drehen.

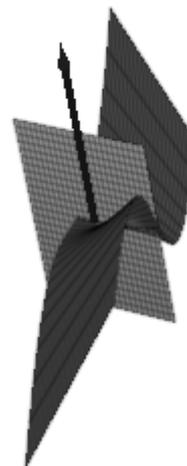
Die Drehebene lässt sich gut in animierter Form visualisieren:

```
GP:=(a, b)->matrix([a, b, a^3+a*b]):
NV:=(a, b)->matrix([3*a^2+b, a, -1]):
RV:=(a, b, w)->matrix([cos(w), sin(w), (3*a^2+b)*cos(w)+a*sin(w)]):
X:=(a, b, u, v, w)->GP(a, b)+u*NV(a, b)+v*RV(a, b, w):
RotE_ani:=(a, b)->plot::Surface(X(a, b, u, v, w), u=-1.5..1.5,
    v=-1.5..1.5, w=-PI/2..PI/2, Color=RGB::Yellow):
zterm:=x^3+x*y:
Fl:= plot::Surface([x, y, zterm], x=-1.5..1.5,
    y=-1..1, Color=RGB::Red):
```

```

PPN:= (a, b, n)-
>plot::Arrow3d(GP(a, b), GP(a,
b)+n*NV(a, b),
      Color=RGB::Blue):
a:=.3: b:=.6: plot(Fl, PPN(a,
b, -3), RotE_ani(a, b), Ax-
es=None,
      Scaling=Constrained): de-
lete a: delete b

```



Dabei ist GP der in der Fläche gelegene Grundpunkt P, NV gibt die Richtung der Normalen N der Tangentialebene an, RV ein zu N senkrechter Vektor und X ein Punkt der sich drehenden Ebene. Mit PPN wird der Vektor von P in Richtung N erzeugt.

E hat mit der Fläche eine Schnittkurve; wir betrachten die möglichen Krümmungen dieser Schnittkurven im Ursprung.

Ein allgemeiner Punkt auf E hat die Form $X = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \cdot \cos \varphi \\ \mu \cdot \sin \varphi \\ \lambda \end{pmatrix}$. Dabei sind λ und μ lokale Ko-

ordinaten der Ebene E; die beiden Richtungsvektoren von E sind orthonormal.. Schneidet man E mit der kubischen Fläche, so erhält man die Schnittgleichung

$$\lambda = \mu^3 \cdot \cos^3 \varphi + \mu^2 \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi.$$

Diese Gleichung beschreibt die Schnittkurve, und zwar in den lokalen Koordinaten λ und μ .

Nun kommt eine entscheidende Einsicht: Wir interessieren uns für die Krümmung in $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, und um die

Krümmung zu bestimmen, brauchen wir nur eine quadratische Annäherung an die Originalkurve (rechentech- nisch sieht man das daran, dass in die Krümmungsformel nur die beiden ersten Ableitungen eingehen).

Wir brauchen also nur die Krümmung der Kurve mit

$$\lambda = \mu^2 \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi = \frac{\sin(2 \cdot \varphi)}{2} \cdot \mu^2$$

im Punkt $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ zu betrachten. Diese quadratische Kurve ist eine Parabel mit der Scheitelpunktskrümmung

$$\kappa = \sin(2 \cdot \varphi) \quad (\text{vgl. 10.1}).$$

Hieran erkennt man: Je nach Einstellung des Winkels φ liegt die Krümmung zwischen 1 ($\varphi = 45^\circ$) und -1 ($\varphi = -45^\circ$).

Für $\varphi = 0^\circ$ und $\varphi = 90^\circ$ verschwindet die Krümmung. Für $\varphi = 0^\circ$ hat E den allgemeinen Punkt

$X = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und daher die Gleichung $y = 0$; die Schnittkurve $z = x^3$ hat tatsächlich im Ursprung eine

Wendetangente und daher verschwindende Krümmung. Für $\varphi = 90^\circ$ hat E den allgemeinen Punkt

$X = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und somit die Gleichung $x = 0$; die Schnittkurve ist eine Gerade.

10.4 Anwendung auf die Flächenkrümmung irgendwo

Die Vorgehensweise des letzten Unterkapitels lässt sich verallgemeinern.

Um die Bezeichnungen übersichtlich zu halten, nennen wir

$$P^0 := \frac{P}{|P|} \text{ für jeden Punkt (oder Vektor) } P,$$

$$c := a^3 + a \cdot b,$$

$$d := 3 \cdot a^2 + b.$$

Wir betrachten den Flächenpunkt $P = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ mit dem zugehörigen Normalenvektor $N = \begin{pmatrix} d \\ a \\ -1 \end{pmatrix}$ der Tangentialebe-

ne. Senkrecht zu N verläuft der Vektor $R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ d \cdot \cos \varphi + a \cdot \sin \varphi \end{pmatrix}$. Die sich um den Normalenvektor drehende

Ebene E hat den allgemeinen Punkt $X = P + \sigma \cdot N + \tau \cdot R_\varphi$.

Allerdings bilden N und R_φ zwar ein Orthogonalsystem, aber noch kein Orthonormalsystem. Dieser Mangel lässt sich durch Normierung leicht beheben:

$$X = P + \lambda \cdot N^0 + \mu \cdot R_\varphi^0 \text{ mit } \lambda = \sigma \cdot |N| \text{ und } \mu = \tau \cdot |R_\varphi|.$$

Nun stellen λ und μ die lokalen Koordinaten in einem Orthonormalsystem von E dar.

Die Berechnung der Schnittgleichung ($X = P + \sigma \cdot N + \tau \cdot R_\varphi$ mit $z = x^3 + x \cdot y$) überlasse man ggf. einem Computer-Algebra-System (allerdings tut sich MuPad 3.1 mit griechischen Buchstaben schwer). Entfernt man die Terme mit σ^3 , $\sigma^2 \cdot \tau$, $\sigma \cdot \tau^2$, τ^3 , so bekommt man die Gleichung

$$A \cdot \tau^2 + B \cdot \tau \cdot \sigma + C \cdot \sigma^2 + D \cdot \sigma = 0 \quad (\text{KS})$$

mit

$$A = \cos \varphi \cdot (3 \cdot a \cdot \cos \varphi + \sin \varphi), \quad B = a \cdot (6 \cdot d + 1) \cdot \cos \varphi + d \cdot \sin \varphi, \quad C = a \cdot d \cdot (3 \cdot d + 1), \quad D = d^2 + a^2 + 1 = |N|^2.$$

Die durch KS gegebene Kurve stellt einen Kegelschnitt (Ellipse oder Parabel oder Hyperbel) dar. Um welche Art von Kegelschnitt es sich dabei handelt, kann man gut mit den Methoden von Kap. 8.1 ermitteln:

In projektiven Koordinaten ($\sigma : \tau : \rho$) hat (KS) die Gleichung $A \cdot \tau^2 + B \cdot \tau \cdot \sigma + C \cdot \sigma^2 + D \cdot \sigma \cdot \rho = 0$.

Der Schnitt mit der Ferngeraden ($\rho = 0$) liefert $A \cdot \tau^2 + B \cdot \tau \cdot \sigma + C \cdot \sigma^2 = 0$. Diese quadratische Gleichung hat keine Lösung (Ellipse) oder zwei verschiedene (Hyperbel) oder zwei zusammenfallende (Parabel).

Statt der Entscheidung nachzugehen, um welchen Kegelschnitt es sich dabei handelt, interessieren wir uns für

die Krümmung in $\begin{pmatrix} \sigma \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Dazu allerdings muss (KS) in den orthonormalen Koordinaten λ und μ ausgedrückt werden; man erhält wegen $\lambda = \sigma \cdot |N|$ und $\mu = \tau \cdot |R_\varphi|$ die Gleichung

$$\frac{A}{|R_\varphi|^2} \cdot \mu^2 + \frac{B}{|R_\varphi| \cdot |N|} \cdot \mu \cdot \lambda + \frac{C}{|N|^2} \cdot \lambda^2 + \frac{D}{|N|} \cdot \lambda = 0.$$

Wendet man nun die Formeln aus 10.2 an, so ergibt sich

$$\kappa = -\frac{2}{|N|} \cdot \frac{\cos \varphi \cdot (3 \cdot a \cdot \cos \varphi + \sin \varphi)}{1 + (d \cdot \cos \varphi + a \cdot \sin \varphi)^2}.$$

Für die weitere Verarbeitung stößt auch ein CAS wie MuPad schnell an seine Grenzen – hier ist etwas Köpfchen effektiver:

Um den eingekastelten Ausdruck der Rechnung zugänglicher zu machen, kürzen wir mit $\cos^2 \varphi$ und erhalten

$$\text{mit } m := \tan \varphi \text{ die Beziehung } \kappa = -\frac{2}{|N|} \cdot \frac{3 \cdot a + m}{\frac{1}{\cos^2 \varphi} + (d + a \cdot m)^2} = -\frac{2}{|N|} \cdot \frac{3 \cdot a + m}{1 + m^2 + (d + a \cdot m)^2}.$$

Der Ausdruck wird noch einfacher, wenn man $n := 3 \cdot a + m$ setzt; man bekommt

$$\kappa = -\frac{2}{|N|} \cdot \frac{n}{1 + m^2 + (b + a \cdot n)^2}.$$

Da der Nenner stets positiv ist und wegen $m' = n' = 1 + m^2$ gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d\kappa}{d\varphi} = 0 &\Leftrightarrow n \cdot (2 \cdot m \cdot m' + 2 \cdot (b + a \cdot n) \cdot a \cdot m') = m' \cdot (1 + m^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot n + a^2 \cdot n^2) \\ &\Leftrightarrow 2 \cdot n \cdot m + a^2 \cdot n^2 = 1 + m^2 + b^2 \\ &\Leftrightarrow n^2 + a^2 \cdot n^2 = 1 + 9 \cdot a^2 + b^2 \\ &\Leftrightarrow n^2 = \frac{1 + 9 \cdot a^2 + b^2}{1 + a^2} \end{aligned}$$

Die extremalen Krümmungen sind daher durch $n = \pm \sqrt{\frac{1 + 9 \cdot a^2 + b^2}{1 + a^2}}$ charakterisiert.

Die zu den extremalen Werten gehörigen Richtungsvektoren R_φ sind gegeben durch $\begin{pmatrix} 1 \\ m \\ d + a \cdot m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ n - 3 \cdot a \\ b + a \cdot n \end{pmatrix}$

und $\begin{pmatrix} 1 \\ -n - 3 \cdot a \\ b - a \cdot n \end{pmatrix}$. Sie stehen genau dann aufeinander senkrecht, wenn $n^2 = \frac{1 + 9 \cdot a^2 + b^2}{1 + a^2}$ ist.

Somit gilt:

Die zu den extremalen Krümmungen gehörigen Drehebene stehen stets aufeinander senkrecht. Die beiden extremalen Krümmungen haben stets unterschiedliches Vorzeichen, so dass tatsächlich jeder Punkt auf der Fläche hyperbolisch ist.

In den Büchern über Differentialgeometrie wird üblicherweise ein ganz anderer Weg zu den Flächenkrümmungen eingeschlagen, und zwar einer, der begrifflich komplizierter ist und nicht zum Nachvollzug der Rechnungen an konkreten Beispielen einlädt.

Ein anderer Zugang zum Krümmungsverhalten, der ohne den üblichen technischen Apparat auskommt, findet sich etwa in ROVENSKI, S. 252.

11. Schlussbemerkung

Natürlich kann man weitergehende Untersuchungen anstellen, etwa: Wie misst man Längen auf der Fläche? Allerdings sind diese Fragen allein mit den Methoden der Schulanalysis nur mit größerem Aufwand zu bearbeiten. Außerdem muss ein Artikel wie dieser auch irgendwo sein Ende haben.

Literatur

- Bruce, J. W. / Giblin, P. J.: Curves and Singularities. ²1992 Cambridge: Cambridge University Press.
- Gibson, Chris G.: Elementary geometry of differentiable curves. 2001 Cambridge: Cambridge University Press.
- Hilbert, D. / Cohn-Vossen, St.: Anschauliche Geometrie. ²1996 Berlin: Springer.
- Meyer, Jörg [1]: Die Sattelfläche im Grundkurs. In: Praxis der Mathematik **37** (6), S. 250 – 255 (1995).
- Meyer, Jörg [2]: Hüllkurven (Teil 1). In: Praxis der Mathematik **39** (3), S. 107 – 116 (1997).
- Meyer, Jörg [3]: Hüllkurven (Teil 2). In: Praxis der Mathematik **39** (4), S. 170 – 173 (1997).
- Meyer, Jörg [4]: Von der Normalparabel zu kubischen Kurven. In: mathematica didactica **21** (2), S. 84 – 108 (1998).
- Meyer, Jörg [5]: Die räumliche Parabel mit dem allgemeinen Punkt $(t \mid t^2 \mid t^3)$. In: The Teaching of Mathematics **6** (1); S. 49 – 66 (2003). Online verfügbar unter http://www.komunikacija.org.yu/komunikacija/casopisi/teaching/VI_1/index_e
- Meyer, Jörg [6]: Spielereien mit der Parabel. In: Mathematik lehren **130**, S. 55 – 58 (Juni 2005).
- Rovenski, Vladimir: Geometry of curves and surfaces with Maple. 2000 Boston: Birkhäuser.
- Saunders, Peter Timothy: Katastrophentheorie. 1986 Braunschweig: Vieweg.
- Thom, René: Paraboles et catastrophes. 1983 Paris: Flammarion.

Anschrift des Autors:

Dr. Jörg Meyer
 Schäfertrift 16
 31789 Hameln
 J.M.Meyer@t-online.de

