Torsten Fritzlar

Die „Matheasse“ in Jena – Erfahrungen zur Förderung mathematisch interessierter Grundschüler

Seit 1998 gibt es in Jena schulübergreifende Arbeitsgemeinschaften zur Förderung mathematisch interessierter und potenziell begabter (KÄPNICK [1]) Grundschüler[1] der Region. Über das Schuljahr hinweg veranstalten wir[2] wöchentlich zwei Förderzirkel, die sich hauptsächlich an Dritt- bzw. Viertklässler wenden. In diesem Artikel werden einige vorläufige Erfahrungen berichtet, die freilich auch vor einem bestimmten (ebenfalls zu skizzierenden) theoretischen Hintergrund zu sehen sind.

1. Einleitung

Begabungen, (mathematisch) begabte Kinder, Möglichkeiten und Bedingungen der Förderung – allein mit diesen Stichworten lässt sich ein vielfältiger Themenkomplex andeuten, der gerade in letzter Zeit auch hierzulande verstärkt diskutiert wird. Allerdings sollen an dieser Stelle auch Ausschnitte aktueller Diskussionen nicht wiedergegeben werden, ich möchte hier lediglich einige Konsequenzen für unsere Arbeit in Jena berichten.

Für mich unstrittig ist die Notwendigkeit der Förderung mathematisch interessierter und begabter Schüler, denn die Auffassung „Begabungen finden ihren Weg allein“ ist schlichtweg falsch. Dies zeigen nicht nur vielfältige Erfahrungen aus dem Schulalltag, es wird beispielsweise auch von neueren Ergebnissen der Neurobiologie und Psychologie (z. B. SINGER [2], SPITZER [1]) nahe gelegt. Dabei ist ganz nach SINGERS Forderung „In der Bildung gilt: Je früher, desto besser!“ (SINGER [1]) ein *möglichst früher Beginn* der Förderung angezeigt, um den Kindern schon frühzeitig (und nur so rechtzeitig) individuelles Lernen und Arbeiten gemäß ihren spezifischen Interessen und Fähigkeiten zu ermöglichen. Darüber hinaus deuten pädagogische Erfahrungen beispielsweise an, dass jüngere Kinder in ihrem Denken noch erheblich flexibler (als nach längerem Schulbesuch) und auch leichter für ungewohnte Situationen und Aufgaben zu motivieren sind (SOUTHWELL [1], ZIMMERMANN [1]). Daher sollte die Förderung mathematisch interessierter und potenziell begabter Schüler bereits im Grundschulalter einsetzen und *kontinuierlich und langfristig* fortgesetzt werden (vergleiche beispielsweise auch BAUERSFELD [2], KÄPNICK [1], NOLTE [1]).

Entsprechende Bemühungen müssen selbstverständlich im regulären Schulunterricht beginnen, dessen Hauptanliegen gerade in der Grundschule es ist, jeden Schüler nach seinen individuellen Voraussetzungen zu fördern. Diesem Anliegen sind allerdings auch aufgrund einer immer differenzierteren Schülerschaft Grenzen gesetzt – eine angemessene Förderung würde den Rahmen der üblichen inneren Differenzierung des Unterrichts häufig sprengen. Daher scheint mir eine (zusätzliche) Förderung mathematisch interessierter und potenziell begabter Grundschüler in außerunterrichtlichen Veranstaltungen geboten. Dabei kann dann das gemeinsame Lernen und Arbeiten mit Gleichinteressierten auch notwendige, in der Schule gelegentlich fehlende soziale Unterstützung bieten. (Diese war und ist gerade auch für besonders begabte Schüler in unseren Gruppen unerlässlich.)

Ausgehend von diesen Überlegungen und eigenen langjährigen Erfahrungen aus der Unterrichtspraxis gründeten Heidrun Ertel und ich im Schuljahr 1998/99 die Jenaer Arbeitsgemeinschaft „Matheasse“ für mathematisch interessierte Grundschüler der Region mit dem Ziel, mathematische Begabungen und Interessen zu erkennen, wach zu halten und weiter zu entwickeln. Dabei konnten wir von Beginn an auf ideelle und materielle Unterstützung (vor allem Stundenzuweisungen) durch die lokale Schulbehörde bauen, wofür wir uns an dieser Stelle noch einmal bedanken.

---

[1] Hier und im Weiteren sind stets Personen beiderlei Geschlechts gemeint, wenn aus stilistischen Gründen nur die männliche oder die weibliche Form gewählt wurde.

[2] Um die Förderung mathematisch interessierter Grundschüler in Jena bemühe ich mich gemeinsam mit den Grundschullehrerinnen Heidrun Ertel (außerdem Fachberaterin für Mathematik an Grundschulen), Elke Korn, Kerstin Reinhardt und Edith Jülich.

2. Konzeptionelle Überlegungen

Konzeption und Realisation einer nachhaltigen Förderung sind ohne hinreichende Erfahrung und (zumindest oder) geeignete Hintergrundtheorien nur schwer möglich. Im Folgenden sollen daher einige für unsere Arbeit grundlegende Aspekte insbesondere auch hinsichtlich der inhaltlichen und methodischen Gestaltung von Förderveranstaltungen teilweise anhand eines paradigmatischen Beispiels dargestellt werden.

„Gerade die Spitzenförderung von Begabungen setzt eine hinreichende Breitenförderung voraus.“ (BAUERSFELD [2], S. 6) Wir führen daher in Jena eine für alle interessierten Dritt- und Viertklässler (in Ausnahmefällen auch für jüngere Schüler) offene Arbeitsgemeinschaft, die auf Zugangstests verzichtet und eine breite Förderung nach dem Motto „Fördern auf Verdacht“ bietet. Nach den ersten „Schnupper“-Veranstaltungen bei den „Matheassen“ können die Schüler eigenverantwortlich entscheiden, ob sie unsere Arbeitsgemeinschaft über das gesamte Schuljahr hinweg besuchen möchten. Nur auf Wunsch sprechen die Unterrichtenden eine Empfehlung aus und so gibt es auch bei uns leistungsheterogene Teilnehmergruppen. Mit dieser Offenheit unseres Angebotes konnten wir bisher gute Erfahrungen sammeln: Zum einen laufen wir kaum Gefahr, interessierte oder (potenziell) begabte Schüler zu verlieren oder durch Eingangstests abzuschrecken. Zum anderen unterstützt sie soziale Beziehungen der Teilnehmer und trägt dazu bei, dass möglichst viele interessierte Schüler gegebenenfalls gemeinsam mit Freunden und Klassenkameraden zu uns kommen. Und darüber hinaus sind die in den Schülerveranstaltungen zu bearbeitenden Materialien so konzipiert, dass sich auch stark geforderte Teilnehmer immer wieder mit Erfolg einbringen können.
Für weitere konzeptionelle Überlegungen kann eine detailliertere Ausarbeitung möglicher Ziele von Förderbemühungen nützlich sein. Für unsere Arbeit in Jena sehe ich insbesondere die folgenden:

- Das Interesse der Kinder an Mathematik und deren Freude an der Beschäftigung mit herausfordernden mathematischen Problemen soll erhalten und verstärkt werden.
- Die Schüler sollen produktiv und kreativ mathematisch tätig sein, dabei ihre Kenntnisse anwenden, neue erwerben und ihre mathematischen (auch heuristischen) Kompetenzen erweitern.
- Den Schülern sollen Gelegenheiten gegeben werden, Fähigkeiten und Haltungen zu verstärken, die ein selbstständiges Mathematiktreiben unterstützen.
- Dabei soll auch die Entwicklung sozialer Kompetenzen der Schüler unterstützt werden.

Wie lassen sich diese Ziele erreichen?

In einer Veranstaltung im November 2003 haben sich unsere damaligen Viertklässler mit dem folgenden Problemfeld (Verbund thematisch eng zusammenhängender Probleme; zu den Begriffen „Problem“ und „Problemfeld“ vergleiche beispielsweise PEHKONEN [1], ZIMMERMANN [2], aus psychologischer Sicht DÖRNER [1], FUNKE [1]) auseinander gesetzt:

Summenzahlen

Eine Zahl heißt *Summenzahl*, wenn sie als Summe aufeinander folgender Zahlen aufgeschrieben werden kann.
5 ist eine Summenzahl, denn 5 = 2+3.
6 ist eine Summenzahl, denn 6 = 1+2+3.
13 ist eine Summenzahl, denn ...

Überprüfe, ob folgende Zahlen Summenzahlen sind: 7, 15, 8, 9, 12, 4!
Finde noch andere Summenzahlen!
Finde noch andere Zahlen, die keine Summenzahlen sind!

Finde Zahlen, die sich auf zwei (noch schwerer: drei oder vier) verschiedene Arten als Summe aufeinander folgender Zahlen aufschreiben lassen!
Gibt es Regeln dafür, welche Zahlen Summenzahlen sind und welche nicht?

Denke dir selbst weitere Aufgaben zu diesem Thema aus und bearbeite sie mit deinen Tischnachbarn![3]

Offenbar ist jede ungerade Zahl eine Summenzahl. Außerdem liefert jeder echte ungerade Teiler größer 1 eine (weitere) Darstellung als Summenzahl, denn ist s = a · b mit dem ungeraden Teiler b, so gilt

$$(a-\left[\frac{b}{2}\right])+(a-\left[\frac{b}{2}\right]+1)+\ldots\ a+\ldots+(a+\left[\frac{b}{2}\right]-1)+(a+\left[\frac{b}{2}\right])=s,$$

wenn man unter [x] das größte Ganze der natürlichen Zahl x versteht.

Dabei steht auf der linken Seite der Gleichung eine Summe aufeinander folgender Zahlen, in der sich gegebenenfalls negative Zahlen mit ihrer entgegengesetzten jeweils zu null ergänzen. Man macht sich darüber hinaus leicht klar, dass verschiedene Teilerpaare a, b zu unterschiedlichen größten Summanden und damit zu unterschiedlichen Zerlegungen führen.

Lässt sich umgekehrt s als Summe aufeinander folgender Zahlen darstellen, so hat diese Summe obige Form oder lässt sich zu dieser (durch Anfügen ungerade vieler Summanden) ergänzen. Mithin gibt die Anzahl der ungeraden, von 1 verschiedenen Teiler einer Zahl s genau die Anzahl der Möglichkeiten an, s als Summe aufeinander folgender Zahlen darzustellen.

Welche Inhalte werden von den „Matheassen“ bearbeitet? Bei der inhaltlichen Gestaltung der Förderveranstaltungen verfolgen wir ein „enrichment“-Programm, das wesentliche Inhalte des Unterrichtsstoffes der Grundschule vertieft (nicht nur durch das Aufwerfen schwierigerer Fragestellungen, sondern beispielsweise auch durch Verknüpfung verschiedener Teilgebiete des Unterrichtsstoffes untereinander) und durch Themen anreichert, die nicht dem üblichen Stoffkanon angehören. Dies scheint notwendig, da eine Vorwegnahme von Unterrichtsinhalten zu einer noch größeren Diskrepanz zwischen Unterrichtsstand und Wissensstand bei unseren Schülern und damit nicht nur zu einer noch größeren Unterforderungsfrustration bei diesen, sondern auch zu zusätzlichen pädagogischen Herausforderungen für deren Lehrerinnen führen würde (ZIMMERMANN [1]).

Schon erste Blicke in die Geschichte der Mathematik zeigen: „Das Lösen mathematischer Probleme hat auf jeden Fall über 5000 Jahre immer wieder zu wesentlichen Fortschritten geführt.“ (HEINRICH & ZIMMERMANN [1], S. 3) Auch daher geht es in unseren Förderveranstaltungen nicht um die Durchführung eines systematischen Wissenserwerbsprogramms. Vielmehr steht das eigenständige und kreative Bearbeiten mathematisch reichhaltiger, interessanter und herausfordernder Probleme und Problemfelder durch die Schüler im Mittelpunkt. Diesbezüglich bieten gerade auch Inhalte des Mathematikunterrichts in der Grundschule und ergänzende Themen außerhalb dieses Stoffkanons zahlreiche Gelegenheiten.

Wie wurde die Bearbeitung der „Summenzahlen“ gestaltet? Zu Beginn der einstündigen Veranstaltung erhielt jeder Schüler ein Arbeitsblatt mit oben abgebildetem Text. Gemeinsam mit der Leiterin wurden zunächst der Begriff „Summenzahl“, Beispiele und erste Fragestellungen diskutiert; nach wenigen Minuten konnten die Schüler dann allein oder in der Gruppe selbstständig weiterarbeiten. (Arbeitsformen können die Schüler stets frei wählen, wobei wir regelmäßig zur Zusammenarbeit anregen.) Bei fast allen war das Interesse sehr groß, immer wieder gab es interessante Beispiele, Zwischenergebnisse, Fragen, Vermutungen, Widersprüche – Erfolge, aber auch Schwierigkeiten. Nach etwa 40 Minuten lief diese Arbeitsphase aus und es blieb noch genügend Zeit für die Schüler, ihre verschiedenen Arbeitswege und -ergebnisse zu präsentieren und zu diskutieren.

Dieser Verlauf kann als typisch bezeichnet werden. Im Allgemeinen beginnt eine Veranstaltung mit einer knappen Diskussion des jeweiligen Problemfeldes, die hauptsächlich der Verständnissicherung und der Motivierung der Schüler dient. Daran schließt sich eine längere Phase der selbstständigen Bearbeitung an, in der die Schüler(gruppen) Bearbeitungsmittel und –wege und zum Teil auch Zielstellungen nach ihren Vorstellungen wählen können. Es ist sehr wichtig, dass sich die Zirkelleiterin in dieser Phase sehr zurücknimmt, sich von „Routinen des Korrigierens und Einhelfens“ löst und höchstens durch vorsichtige Anregungen und „Hilfen zum Selbstfinden“ Motivation und Interesse der Schüler wach hält (vergleiche auch BAUERSFELD [1], S. 263 und WINTER [1], S. 4). Damit setzen wir konsequent auf die Selbstständigkeit der Schüler, da umfangreiche Erfahrungen im eigenständigen Bearbeiten mathematischer Probleme notwendige Voraussetzung zum Erwerb diesbezüglicher Fähigkeiten sind. Sehr viel Wert legen wir auch auf eine anschließende Diskussionsphase, in der Schüler oder Schülergruppen ihre Bearbeitungswege und –ergebnisse vorstellen, miteinander vergleichen, mögliche Vor- oder Nachteile abwägen und in der gelegentlich auch erste

[3] Den vorgestellten Problemen bzw. Problemfeldern folgen jeweils knappe Bemerkungen zum mathematischen Hintergrund. Der kursive Schriftschnitt gibt dem interessierten Leser die Möglichkeit, diese zu übergehen und selbst mathematisch tätig zu werden.

Anschlussprobleme besprochen werden. Insbesondere mit dieser Phase wollen wir zum einen die sprachliche Entwicklung der Kinder, deren Mitteilungsfähigkeit, Diskussionsbereitschaft und –fähigkeit fördern. Zum anderen sollen die Kinder voneinander (über mathematisches Arbeiten) lernen,[4] über und mithilfe von Mathematik miteinander kommunizieren und ihre Kreativität und Flexibilität beim Umgang mit mathematischen Fragestellungen weiter verstärken.

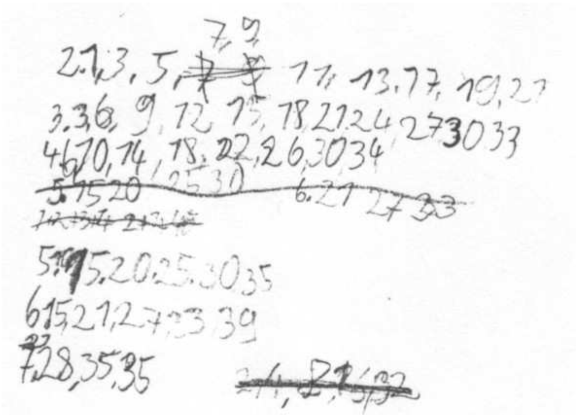
Wie sind unsere „Matheasse“ mit den „Summenzahlen“ umgegangen – einige Streiflichter. Sehr schnell fanden die Schüler Zerlegungen für die vorgegebenen ungeraden Zahlen, für manche sogar verschiedene. Aber auch einige gerade Zahlen ließen sich zerlegen: *Wir haben sogar schon gerade Zahlen, die sind am schwersten.*[5] In einer zweiten Gruppe hatte Thomas (Namen wurden selbstverständlich geändert) zunächst die Darstellung 8 = 4+4 vorgeschlagen, sehr schnell wurde dann in einem Gespräch noch einmal geklärt, was (in dieser Gruppe und zu dieser Zeit) unter einer „Summenzahl“ verstanden werden sollte.

In einer anderen Gruppe arbeiteten drei Jungen zusammen. Sie vermuteten recht schnell (allerdings ohne Begründung): Die Zahlen 2, 4, 8, 16, 32, ... sind keine Summenzahlen. Aber auch für andere Zahlen, beispielsweise 24, hatten sie noch keine Zerlegungen gefunden. Gibt es vielleicht Zusammenhänge mit der Sechser– oder Achter–Reihe? Nach weiteren zehn Minuten, in denen immer wieder Vermutungen entwickelt und entsprechende Zahlen untersucht worden waren, stand für die Schüler fest: *Keine Summenzahlen sind Alles plus Alles*, also die Zahlen 1+1 = 2, 2+2 = 4, 4+4 = 8, ... Doch für welche Zahlen gibt es mehrere Zerlegungen? Robert skizzierte die nebenstehende Tabelle, in der Summenzahlen entsprechend der jeweils möglichen Anzahl der Zerlegungen eingetragen werden sollten. David übernahm die Tabelle und trug in die rechte Spalte sofort 15 = 1+2+3+4+5 ein. Ein knapper Dialog brachte Klärung und die Jungen arbeiteten nach Davids Muster weiter. Am Ende der AG – Stunde präsentierte die Gruppe gefundene Summenzahlen, entsprechende Zerlegungen und unter anderem die angedeuteten Muster, die eine beliebig weite Fortsetzung der Tabelle erlauben. Ein Bedürfnis nach weiteren Begründungen bestand bei den Schülern allerdings nicht. (Die Eintragungen in der Tabelle machen deutlich, dass in dieser Gruppe auch der Summand 0 akzeptiert wurde.)

2	**3**	**4**	**5**

2	**3**	**4**	**5**
1	3	6	10
3	6	10	15
5	9	14	20
7	12	18	25
+2	*+3*	*+4*	*+5*

Markus arbeitete (wie so oft) lieber allein. Er war an der Problemstellung hoch interessiert und fand schnell verschiedene Summenzahlen. Auf eine übersichtliche Notation seiner Ergebnisse hatte er allerdings keine Lust und wohl auch keine Zeit dafür. Ihm machte es jedoch Spaß, seine Ergebnisse der Leiterin oder den anderen Schülern vorzustellen: In der ersten Zeile sind Zahlen notiert, die sich als Summe zweier aufeinander folgender Zahlen darstellen lassen (dies deutet Markus durch „2.“ am Zeilenbeginn an), in der nächsten Zeile folgen Zahlen aus drei Summanden usw. Mit diesem Schema ist es möglich, alle Summen- und Nichtsummenzahlen zu finden und zusätzlich anzugeben, auf wie viele verschiedene Arten eine Zahl als Summenzahl darstellbar ist.



Die Anordnung der Zahlen konnte Markus auch begründen: Benachbarte Summenzahlen aus *n* Summanden müssen sich um *n* unterscheiden, da sich jeder Summand um 1 unterscheidet.

Johannes und Erik arbeiteten zu zweit an den „Summenzahlen“. Sie einigten sich darauf, eine Übersicht anzulegen, *in der die Zahlen der Reihe nach vorkommen.* Johannes wurde sehr schnell klar: *Alle ungeraden Zahlen sind Summenzahlen. Auch 999999. Ich habe es nicht ausgerechnet, aber es muss so sein.* Erik hatte

[4] Dazu gehört es auch zu lernen, dass man voneinander lernen kann. Insbesondere für mathematisch potenziell begabte Schüler kann dies zumindest im Zusammenhang mit Mathematik eine *neue* Erfahrung sein.
[5] Durch Asterisken (*) werden leicht geglättete, aber sonst originale Schüleraussagen markiert.

entdeckt, dass die Zahlen 2, 4, und 8 keine Summenzahlen sind. Schnell verallgemeinerte er, es machte ihm viel Spaß, immer größere Zweierpotenzen auszurechnen. Beide Schüler verglichen ständig ihre Ergebnisse, stellten sich Fragen, entwickelten Hypothesen und suchten nach Begründungen oder Gegenbeispielen: *Alle Zahlen, die durch 3 teilbar sind, sind Summenzahlen.* Erik überprüfte seine Übersicht: *Bis jetzt stimmt deine Theorie.* Darauf meinte Johannes: *Das kann ich beweisen, beispielsweise mit 333, denn 333 = 110+111+112.* Nach kurzer Zeit konnte Johannes seine Ergebnisse verallgemeinern: *Auch Zahlen, die durch 5, 7, 9, 11, ... teilbar sind, sind Summenzahlen.* Erik gab ihm einige Zahlen zur Probe und suchte dabei immer schwierigere aus. Fast sofort fand Johannes beispielsweise 110 = 20+21+22+23+24 = 5+6+7+8+9+10+ 11+12+13+14+15, denn *aus dem zweiten Teiler ergibt sich die Mittelzahl* (vergleiche auch Anmerkungen zum mathematischen Hintergrund des Problemfeldes auf Seite 18). Das Arbeitsergebnis der beiden wurde schließlich etwa wie folgt zusammengefasst: Jede ungerade Zahl kann als Summe zweier Zahlen dargestellt werden. Außerdem liefert jeder (weitere) ungerade Teiler der Zahl (größer 1) eine weitere Zerlegung. Damit gelang es Johannes und Erik, Fragen zu Summenzahlen und deren Zerlegungen zu beantworten und ihre Antworten zu einem großen Teil zu begründen.

Diese exemplarischen Ausführungen machen auch allgemeine Merkmale der bzw. Ansprüche an die inhaltliche Gestaltung unserer Förderveranstaltungen deutlich. Insbesondere bewährt hat sich die eigenständige Auseinandersetzung der Schüler mit mathematisch reichhaltigen Problemfeldern, die

- Schüler ansprechen und zu einer längeren, mitunter auch anstrengenden Bearbeitung (allein oder in der Gruppe) motivieren,
- zunächst einen leichten Zugang und immer wieder Zwischenerfolge für interessierte Schüler ermöglichen,
- eine (hinsichtlich des Niveaus, der Bearbeitungswege und –modi) differenzierte Bearbeitung erlauben,
- zahlreiche Gelegenheiten zu produktiver Eigentätigkeit und zur Erweiterung des heuristischen Erfahrungsschatzes bieten, und
- Möglichkeiten zu Variationen, Ausweitungen und Vernetzungen und auch dadurch Gelegenheiten zu kreativem Arbeiten, eigenen Entdeckungen und eigenen Fragestellungen bieten.

Dabei können und müssen einzelne Problemfelder wohl nicht immer allen Ansprüchen gleichermaßen genügen. Weitere Beispiele geeigneter Materialien sind im abschließenden Abschnitt dieses Artikels zusammengetragen.

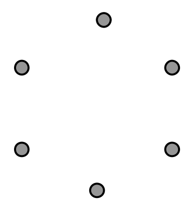
Darüber hinaus beschäftigen wir uns in der AG-Zeit immer wieder auch mit mathematischen Spielen. Neben den bekannten Nim-Spielen in vielen Variationen konnten wir beispielsweise mit dem „Game of Tri“ sehr gute Erfahrungen sammeln.

„The Game of Tri“

Dies ist ein Spiel für zwei Personen, gespielt wird mit Buntstiften und einem Spielplan, auf dem sechs Punkte im Kreis angeordnet sind.

Die Spielregeln:

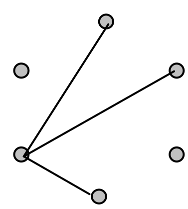
(1) Die Spieler verbinden abwechselnd jeweils zwei Punkte des Kreises mit ihrer Farbe.
(2) Dabei dürfen zwei Punkte höchstens einmal verbunden werden.
(3) Gewonnen hat der Spieler, dem es zuerst gelingt, ein Dreieck (mit den Eckpunkten auf dem Kreis) aus seiner Farbe zu zeichnen.



Führe mit deinen Tischnachbarn einige Spiele oder ein kleines Turnier durch!
Gibt es Strategien, mit denen man gewinnen kann?
Spielt auch mit einem Spielplan aus 5 oder aus 8 Punkten!

Noch etwas zu zählen:

a) Schätze zunächst, wie viele Dreiecke mit Eckpunkten im Kreis es gibt!
b) Wie viele und welche verschiedenen Dreiecksformen entstehen?
c) Versuche, die Anzahl der Dreiecke genau zu bestimmen!
d) Bestimme für jede Dreiecksform, wie häufig sie auftritt!



Das Spiel kann immer vom ersten Spieler gewonnen werden, da er immer als erster eine „Sieg“-Figur wie in der nebenstehenden Abbildung erreichen kann, ohne durch den Gegenspieler in Zugzwang gebracht werden zu können.

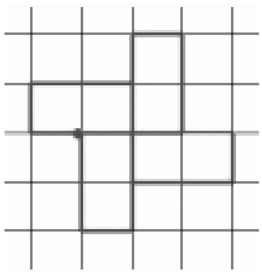
Aus den sechs Punkten können $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{2 \cdot 3} = 20$ *Dreiecke gewonnen werden.*

Eine Dreiecksseite kann eine, zwei oder drei Sechseckseiten ersetzen, daher gibt es nur drei verschiedene Dreiecksformen, die sich kennzeichnen lassen durch die Kombinationen 114, 123, 222. (Insgesamt müssen ja sechs Sechseckseiten ersetzt werden.) Die Anzahlen der Permutationen dieser Zahlen stehen im selben Verhältnis wie die Anzahlen möglicher Dreiecke der jeweiligen Form insgesamt, es gibt also 6, 12, und 2 Dreiecke.

Mit diesen „Spielereien“ können wir zum einen soziale Kompetenzen der Schüler und deren Beziehungen zueinander unterstützen und fast immer haben alle Schüler auch über längere Zeit großen Spaß daran. Wir wollen damit aber auch den spielerischen Aspekt von Mathematik thematisieren sowie den Schülern Gelegenheiten geben, sich in vorausplanendem (strategischem) Denken beispielsweise unter Einbezug von Logik, Kombinatorik oder Symmetrieüberlegungen zu üben.
Gelegentlich versuchen wir auch, ästhetische Aspekte der Mathematik – beispielsweise mit Färbeproblemen und Parkettierungen mithilfe ESCHER-ähnlicher Figuren – deutlich werden zu lassen. Auch mit dem folgenden Problemfeld, dass unseren Schülern immer wieder viel Freude bereitete, verfolgen wir dieses Ziel:

Zahlenketten und Spiralen (Auszüge)

(2,1,3), (1,3), (4,2,1,2), (5,1,2,4,3), (1,2,4) sind Beispiele für Zahlenketten. Solche Zahlenketten lassen sich auf Gitterpapier auch zeichnen; die Abbildung zeigt ein Bild zur Kette (2,1,3).



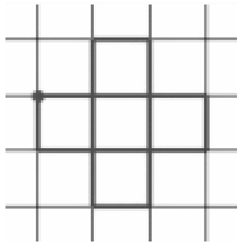
Zum Zeichnen wählt man sich einen Gitterpunkt als Startpunkt. Im Gegenuhrzeigersinn werden Strecken entlang der Gitterlinien gezeichnet, wobei die jeweiligen Zahlen der Kette deren Länge angeben. Im Beispiel zeichnet mal also zunächst eine 2-Strecke nach unten, eine 1-Strecke nach rechts, eine 3-Strecke nach oben, eine 2-Strecke nach links, eine 1-Strecke nach unten usw.

Zeichne auch die anderen Zahlenketten!
Beschreibe die jeweiligen Muster und erfinde passende Namen!
Welche Gemeinsamkeiten und Unterschiede haben die Muster?
Denke dir selbst Zahlenketten aus und zeichne sie!

Welche Ketten schließen sich? Findest du eine allgemeine Regel?

Wie sieht der Verlauf von (1,2,4) aus? Sieht (1,4,2) anders aus? Und (4,1,2)?

Alexander hat seinen Geburtstag gezeichnet. Wann hat er Geburtstag?



Zeichne auf, wann du Geburtstag hast und lass deinen Tischnachbarn deinen Geburtstag anhand der Zeichnung bestimmen!

Zahlenketten lassen sich auch auf anderen Gittern zeichnen, beispielsweise auf Dreiecksgittern. Probiere es aus!

Welche Ketten schließen sich sowohl im Quadrat- als auch im Dreiecksgitter?

Für das Quadratgitter gilt: Die Spirolateralen zu Zahlenketten der Länge 3 schließen sich nach vier Durchläufen, denn wegen 3 ≡ -1 mod 4 heben sich der erste und der dritte, sowie der zweite und vierte Durchlauf auf. Entsprechend lässt sich für Fünferketten wegen 5 ≡ 1 mod 4 argumentieren. Bei Sechserketten heben sich wegen 6 ≡ 2 mod 4 erster und zweiter Durchlauf auf, die zugehörigen Spirolateralen schließen sich daher bereits nach zwei Durchläufen. Die Spirolaterale einer Viererkette (a,b,c,d) kann sich nur für a = c und b = d nach einmaligem Durchlauf schließen. Die Argumentationen lassen sich auf andere Kettenlängen übertragen.
Die Bilder zu (1,2,4) und (4,1,2) besitzen lediglich einen verschobenen Startpunkt, die Spirolaterale zu (1,4,2) erhält man durch Spiegelung, da die Reihenfolge der Zahlen in der Kette vertauscht wurde. Beide Aussagen lassen sich für Dreierketten verallgemeinern. Beispielsweise bei Zahlenketten der Länge 5 entstehen durch Vertauschung zweier Zahlen im allgemeinen verschiedene Spirolateralen.
Alexander hat am 12. Februar Geburtstag.
Für das Dreiecksgitter gilt: Die Spirolateralen zu Zahlenketten der Länge n, bei denen n kein Vielfaches von 3 ist, schließen sich nach drei Durchläufen, da dann auf alle Richtungen alle Schrittweiten einmal angewendet wurden. Sowohl im Quadrat- als auch im Dreiecksgitter schließen sich daher Spirolateralen zu Zahlenketten der Länge 1, 2, 5, 7, 10, ...

3. Zur Fortsetzung der Förderung in späteren Schuljahren

Besonders wünschenswert ist eine kontinuierliche Förderung interessierter Schüler über mehrere Schuljahre hinweg. Daraus ergibt sich für mich auch der Wunsch nach einer gewissen Kontinuität hinsichtlich zugrunde liegender konzeptioneller Aspekte bzw. die Frage nach möglichen Weiterentwicklungen der hier vorgestellten Überlegungen hinsichtlich der weiteren Förderung unserer Schüler in den Sekundarstufen. Auch an dieser Stelle kann ich nur auf ausgewählte, aus meiner Sicht wichtige Punkte eingehen.

- Auch für Schüler in den Sekundarstufen besitzt die möglichst eigenständige Bearbeitung mathematisch reichhaltiger und (auch dadurch) anregender Problemfelder allein oder in der Gruppe zahlreiche wichtige Potenziale. Dabei ist eine hinreichende und allmählich immer größer werdende Offenheit der Materialien hinsichtlich möglicher Bearbeitungsansätze und –mittel von besonderer Wichtigkeit.
  Zu den „Summenzahlen“ findet man in der Literatur beispielsweise als Bearbeitungshilfe für Schüler die folgende Tabelle.

	Zweier	**Dreier**	**Vierer**	**Fünfer**	**Sechser**	**Siebener**
1						
2						
3						
4						
5	2+3					
6						
7	3+4					

8						
9						
10						
11						
12						
13						
14						
15		4+5+6		1+2+3+4+5		
16						

Abbildung 1: Tabelle zu den „Summenzahlen“

Mit dieser Tabelle wird zwar einerseits sichergestellt, dass fast alle Schüler zu allgemeineren, nicht mehr an Beispielen gebundenen Aussagen über Summenzahlen kommen. **Allerdings wird ihnen andererseits der überwiegende Teil der Problemlösearbeit abgenommen bzw. werden ihnen entsprechende Chancen erst gar nicht eingeräumt.**

- Mindestens ebenso wichtig ist eine entsprechende Flexibilität der Lehrkräfte hinsichtlich verschiedener Bearbeitungsansätze und ihre immer weiter gehende Zurückhaltung in Bezug auf mögliche oder vermeintliche Hilfestellungen für die Schüler.
  Beispielsweise ist in den Materialien des Chemnitzer Bezirkskomitees [1] die folgende Aufgabe zur „Arbeit mit Tabellen als heuristische Vorgehensweise“ zu finden:

> „Acht Enten, alle völlig gleich, schwimmen auf einem kleinen Teich.
> Eine Ente aber ging an Land, weil sie da mehr Futter fand.
> Drei tunkten ihre Köpfe klein in das kalte Wasser ein
> und hoben ihre Beine hoch zum Zeichen, das sie leben noch.
>
> Wie viele Köpfe und wie viele Beine waren unter Wasser?
> Wie viele Köpfe und wie viele Beine waren nicht im Wasser?“

Allerdings nutzte bei völlig eigenständiger Bearbeitung keiner unserer Schüler eine Tabelle als Hilfsmittel zur Problembearbeitung. Dagegen zeigt die folgende Abbildung einen (bei unseren Schülern) üblichen Bearbeitungsweg, der auch zur Ergebnisbegründung genutzt und anerkannt wurde.

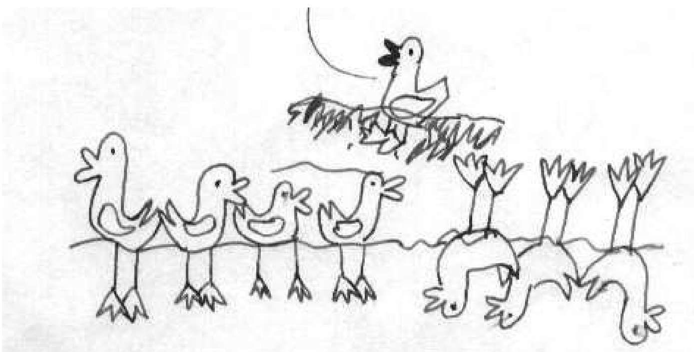


Abbildung 2: Annes Skizze (Klasse 4)

- Darüber hinaus scheint mir eine zunehmende Selbstständigkeit der Schüler hinsichtlich der Wahl von (Bearbeitungs-) Wegen und Zielen in immer umfangreicheren Problemfeldern wichtig. Als langfristige Entwicklungsperspektive für unsere Förderveranstaltungen sehe ich eine Orientierung an Vorstellungen zu „Mathematik als Forschungs- und Theoriebildungsprozess“.
  Ein erster Eindruck dazu lässt sich aus dem zusammenfassenden Zitat von REHLICH ([1], S. 6) gewinnen, das die anschließende Abbildung noch einmal illustriert und die dabei gleichzeitig mit Theoriebildungsprozessen verbundene Anforderungsbereiche (und damit entsprechende Potenziale hinsichtlich der Schülerförderung) andeutet.

„Man kann Mathematik als einen hochkomplexen Theoriebildungsprozess ansehen, der zumeist bei Einzelfragen beginnt, an denen sehr oft erst einmal heuristisch und intuitiv gearbeitet wird. Solches kann zur Lösung, aber auch zur Ausweitung der Probleme, zu allgemeinen mathematischen Sätzen, Beweisen und schließlich zu Theorien über den Gegenstandsbereich führen, der die Klärung der Ausgangsfragen mit enthält. Dabei können Nebenwege und Irrwege beschritten werden. Die Irrwege können innerhalb der einzelnen heuristischen Prozesse lösungsfördernd sein. Am Ende steht das schriftliche Fixieren der Theorie.“

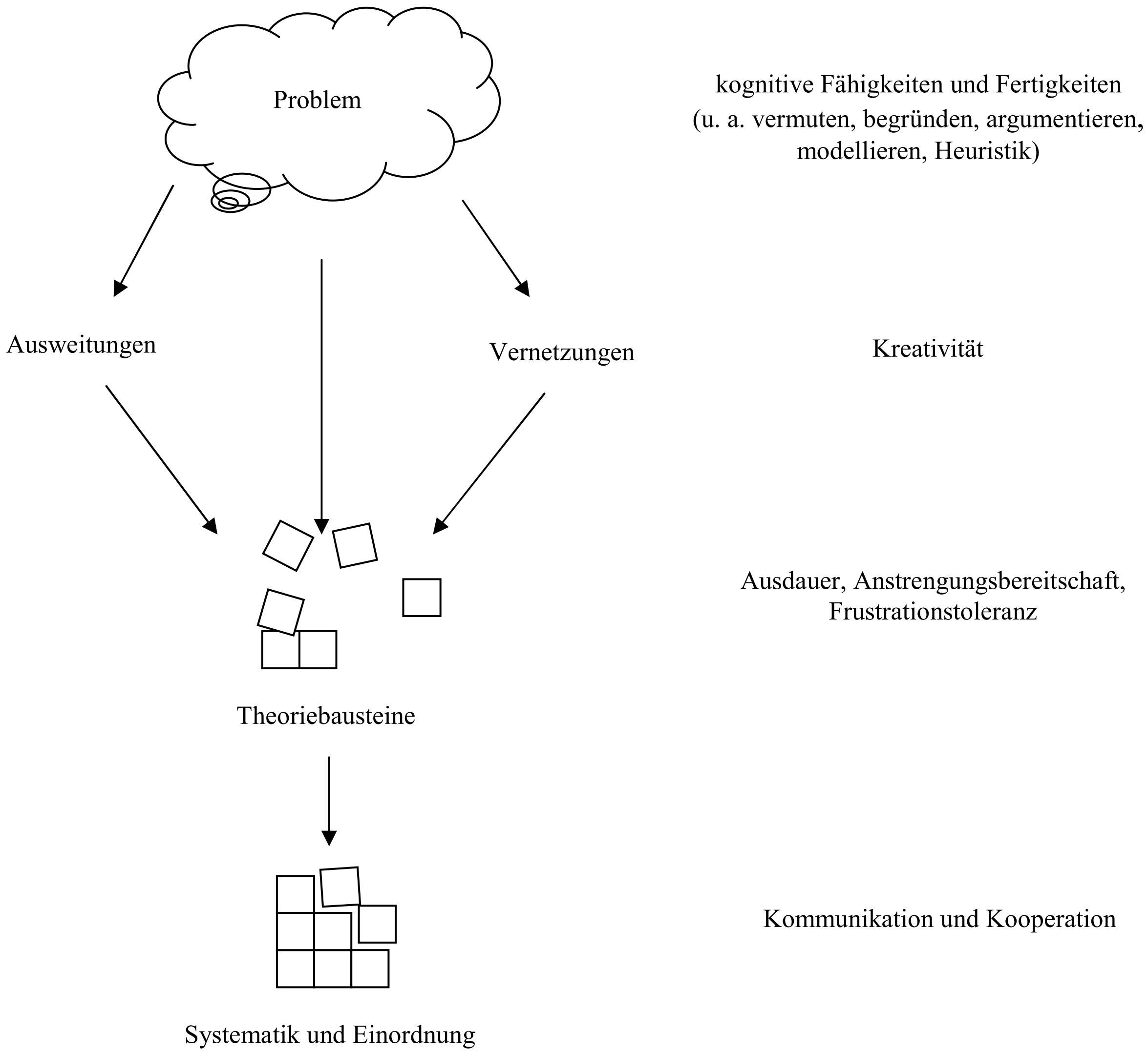


Abbildung 3: **„**Mathematik als Theoriebildungsprozess“ mit wichtigen Anforderungsbereichen

- Während sich die Arbeit in unserer Grundschularbeitsgemeinschaft vorwiegend auf den oberen Teil der Grafik konzentriert, sehe ich für Förderveranstaltungen in nachfolgenden Schuljahren eine allmähliche Ausweitung auf alle dargestellten Aspekte als Ziel, um die Kompetenzen der Schüler insbesondere auch in den angedeuteten Anforderungsbereichen zu verstärken.
- Anbahnung und Weiterentwicklung heuristischer Fähigkeiten als wesentliche Elemente von Problemlösefähigkeit sind sicher wichtige Ziele bei der Förderung mathematisch interessierter Schüler. In diesem Zusammenhang wird häufig eine explizite Thematisierung von Heuristik zumindest im Rahmen von Förderveranstaltungen diskutiert. Mir scheint es allerdings besonders wichtig, den Schülern zunächst ausreichend umfangreiche und vielfältige Erfahrungen hinsichtlich der *eigenständigen* Bearbeitung mathematisch reichhaltiger Probleme zu ermöglichen. Erst auf der Grundlage einer sehr

breiten und daher nur langfristig zu erwerbenden Erfahrungsbasis erscheinen intensivere Diskussionen und (von außen angeregte) Reflexionen fruchtbar. Diesbezüglich aufschlussreich sind beispielsweise auch Studien zur Geschichte der Mathematik, die zum einen zwar die enorme Bedeutung heuristischer Methoden zeigen, zum anderen aber ebenso deutlich machen, dass sich diese Methoden über eine lange Zeit zunächst *implizit* entwickelten (z. B. ZIMMERMANN [3]). Darüber hinaus zeigen neuere lernpsychologische Untersuchungen, dass der Mensch (und insbesondere das Kind) in aller Regel viele Dinge kann, die er (es) gar nicht explizit weiß. Für das schulische Lernen kann man daraus schlussfolgern: „Was Kinder brauchen sind Beispiele. Sehr viele Beispiele und wenn möglich die richtigen und gute Beispiele. Auf die Regeln kommen sie dann schon von selbst …“ (SPITZER [1], S. 78).

- Erfahrungen zeigen, dass sich Grundschüler auch in unseren Arbeitsgemeinschaften häufig damit zufrieden geben, Zusammenhänge und Muster zu erkennen und anzuwenden und dabei ihre „Entdeckungen“ bereits für evidente Begründungen halten. Möglicherweise zeigt sich darin eine eher empirische Sicht auf Mathematik (vergleiche beispielsweise STRUVE [1]). Aus der Sicht des Mathematikers sehe ich daher (nicht nur) für Förderveranstaltungen in nachfolgenden Schuljahren das Ziel, „dass die Lernenden (zunehmend) einen impliziten Begründungsansporn verinnerlichen und aus der Sache heraus eine Selbstverständlichkeit empfinden, gewonnene Einsichten sich selbst oder Anderen gegenüber zu begründen.“ (KRAUTHAUSEN [1], S. 104) Dies ist jedoch sicher ein langfristiger Prozess, bei dem dem Unterrichtenden zumindest zu Beginn eine Initiativ- und Vorbildfunktion zukommt.
  Allerdings sollten in diesem Zusammenhang auch langfristig formale Aspekte nicht zu stark betont werden. Auch für ältere Schüler ist der umfassendste und dann oft formal–abstrakte Beweis keineswegs immer eine angemessene Form einer Begründung. Darüber hinaus scheint mir bedenkenswert, dass auch Kriterien für formale Korrektheit einem Wandel über die Zeit und über Forschergruppen hinweg unterliegen.
- In späteren Schuljahren werden von Schülern häufig zunehmend umfangreichere Verschriftlichungen von Bearbeitungsprozessen und das Anfertigen formal korrekter Notate gefordert. Gerade auch in Thüringen ist dies wohl teilweise auf die lange Tradition schriftlicher Schülerwettbewerbe zurückzuführen. Meines Erachtens sollte diesbezüglich eine sehr allmähliche Entwicklung anstrebt werden, bei der die Schüler ihre Notizen immer wieder als (notwendige) Bearbeitungshilfen wahrnehmen. Dabei muss man sich dann auch auf eine subjektiv nützliche Gestaltung dieses Hilfsmittels einlassen. Und schließlich darf man nicht vergessen, dass die in der Literatur zu findenden „optimalen“ Darstellungen in der Regel von Fachleuten *nach* längeren Bearbeitungsprozessen angefertigt wurden. *Innerhalb* solcher Prozesse kann formal perfektes Arbeiten sogar hinderlich und zumindest zeitraubend sein (z. B. REHLICH [1], S. 13).

4. Regionale Erfahrungen

In der Region Jena ist es mittlerweile gelungen, einen organisatorischen Rahmen zu schaffen, der eine kontinuierliche und nachhaltige Förderung mathematisch interessierter Schüler ermöglicht.

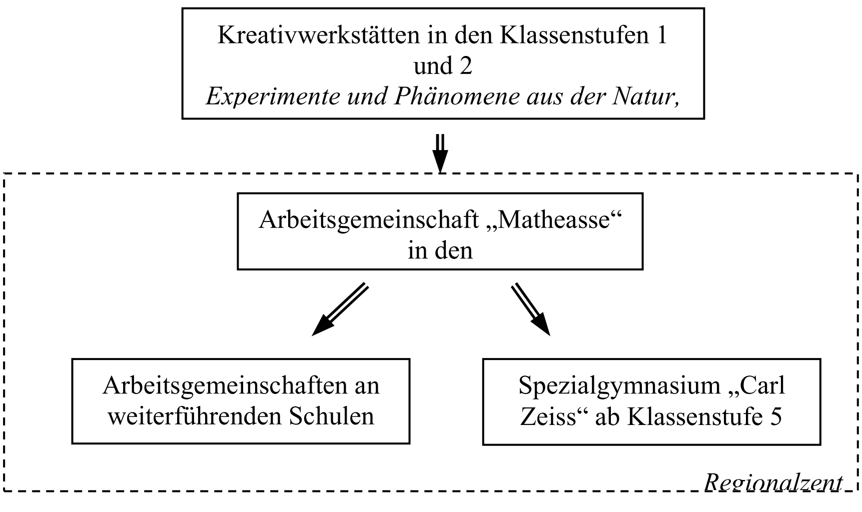


Abbildung 4: Strukturen zur Schülerförderung in der Region Jena

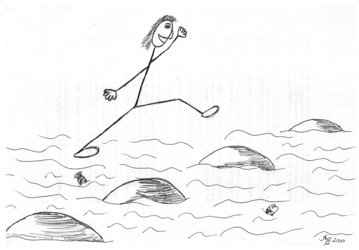
Bereits in den ersten Schuljahren stellen Kreativwerkstätten in vielen Jenaer Grundschulen Zusatzangebote für mathematisch, naturwissenschaftlich oder sprachlich interessierte Schüler zur Verfügung. Spätestens ab der dritten Klassenstufe können Mathematikinteressierte dann unsere stadtoffene Arbeitsgemeinschaft „Matheasse“ besuchen. Für interessierte Schüler, die an unseren wöchentlichen Veranstaltungen nicht teilnehmen können, gibt es seit dem vergangenen Schuljahr einen Korrespondenzzirkel, der derzeit hauptsächlich – von uns unterstützt – durch eine Studentin der Erfurter Universität im Rahmen ihrer wissenschaftlichen Abschlussarbeit betreut wird. Mittlerweile wurden diese Angebote organisatorisch eingebunden in das Regionalzentrum zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich-technisch interessierter und begabter Schüler, das in Jena selbst Arbeitsgemeinschaften und darüber hinaus überregionale Korrespondenzzirkel für alle Jahrgänge der Sekundarstufen anbietet. Standort dieses Zentrums ist das Jenaer Carl-Zeiss-Gymnasium, in dem spezifisch (potenziell) begabte Schüler in mathematisch-naturwissenschaftlich-technischen Spezialklassen ab Jahrgangsstufe 9 und im Rahmen eines Schulversuchs ab Jahrgangsstufe 5 lernen können.
Aufgabe des Regionalzentrums ist darüber hinaus die Koordinierung und Unterstützung der Arbeit aller diesbezüglich engagierten Lehrer weiterführender Schulen im Ostthüringer Raum. Dazu werden unter anderem regelmäßige Beratungs- und Weiterbildungsveranstaltungen organisiert, in denen auch inhaltliche und konzeptionelle Aspekte der Fördermaßnahmen diskutiert, weiterentwickelt und zunehmend orchestriert werden (, ohne pädagogisch-didaktische Freiheiten der Beteiligten einzuschränken).
Durch diese Kooperationen gelingt es uns in der Jenaer Region, Schüler über Schuljahre und Schulstufen hinweg immer wieder persönlich anzusprechen und ihnen eine langfristige, kontinuierliche und möglichst früh einsetzende Förderung zu ermöglichen.

5. Weitere Beispiele für Arbeitsmaterialien[6]

Im Folgenden sind einige Materialien zusammengestellt, die nun schon mehrfach mit immer wieder guten Ergebnissen bei den Jenaer „Matheassen“ eingesetzt werden konnten.

Über den Fluss

Auf einer Expedition in den Urwald will Professor Fluctus einen wilden Fluss überqueren. Da es keine Brücke gibt, muss er die Steine im Wasser benutzen, die aber zum großen Glück des Professors in einer Kette zum gegenüberliegenden Ufer liegen. Beim Überqueren des Flusses kann Professor Fluctus von einem Stein (oder vom Ufer) entweder zum folgenden Stein springen oder diesen auslassen und gleich zum übernächsten Stein (oder zum anderen Ufer) springen.
Wie würdest du den Fluss überqueren?



Angenommen, im Wasser befinden sich 4 Steine. Wie viele verschiedene Möglichkeiten hat Professor Fluctus, den Strom zu überqueren?

Wie viele Möglichkeiten hat er bei 3, 5, 6 Steinen?

Wie viele Möglichkeiten hat der Professor, falls sich 10 Steine zwischen den beiden Ufern befinden?

Die folgende Tabelle zeigt die Anzahl möglicher Flussüberquerungen für verschieden viele Steine:

Steine	*Möglichkeiten*	*Steine*	*Möglichkeiten*
1	*2*	*6*	*21*
2	*3*	*7*	*34*
3	*5*	*8*	*55*
4	*8*	*9*	*89*
5	*13*	*10*	*144*

[6] Die hier vorgestellten Materialien sind in der Regel weiter ausgearbeitete Fundstücke, deren Quellen mir leider oftmals nicht mehr erinnerlich sind.

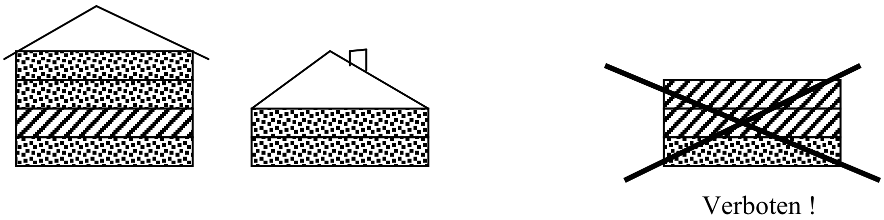
Das Muster A(n+2) = A(n) + A(n+1) lässt sich leicht begründen: Benutzt man den (n+2)–ten Stein, so gibt es A(n+1) Möglichkeiten, um dorthin zu gelangen. Benutzt man ihn nicht, muss man den (n+1)–ten Stein betreten und hat A(n) Möglichkeiten, um auf diesem zum Stehen zu kommen.

Häuser streichen

In einer Wohnsiedlung sollen die Hausfassaden neu gestrichen werden. Die Nachbarn haben sich darauf geeinigt, nur die Farben rot (gepunktet) und blau (schraffiert) zu verwenden und folgende Vereinbarungen einzuhalten

1. Ein Stockwerk wird immer nur mit einer Farbe gestrichen, also entweder rot oder blau.
2. Zuerst wird das unterste Stockwerk gestrichen, dann das Stockwerk darüber und so weiter.
3. Wird eine Etage blau gestrichen, dann muss die Etage darüber (sofern es eine gibt) rot gestrichen werden.

Ein paar Beispiele:



Die Arbeiten beginnen in einer Straße, in der Häuser mit ein, zwei, drei und vier Stockwerken stehen.
Wie viele Möglichkeiten gibt es jeweils, diese Häuser anzustreichen?

In der Wohnsiedlung gibt es auch Hochhäuser mit zehn Stockwerken. Wie viele Möglichkeiten haben die Maler, diese Hochhäuser anzustreichen?

Denke dir selbst ähnliche Regeln für das Streichen von Hausfassaden aus. Wie viele Möglichkeiten gibt es dann für verschiedene Häuser?

Die folgende Tabelle zeigt die Anzahl möglicher Anstriche für verschieden hohe Häuser.

Etagen	*Möglichkeiten*	*Etagen*	*Möglichkeiten*
1	*2*	*6*	*21*
2	*3*	*7*	*34*
3	*5*	*8*	*55*
4	*8*	*9*	*89*
5	*13*	*10*	*144*

Eine mögliche Begründung für das Muster A(n+2) = A(n) + A(n+1):
Für n und n+1 Etagen habe man alle Möglichkeiten ermittelt. Um die Anzahl der Möglichkeiten für n+2 Etagen zu bestimmen, kann man so vorgehen:

1. *Auf alle Häuser mit n+1 Etagen wird eine rote Etage aufgesetzt, damit erhält man A(n+1) verschiedene Häuser.*
2. *Auf alle Häuser, bei denen die (n+1)-te Etage rot ist, kann eine blaue Etage aufgesetzt werden. Um alle Häuser mit n+1 Etagen zu ermitteln, ist man aber (u.a.) nach 1. vorgegangen, das heißt es gibt A(n) Häuser, bei denen die (n+1)-te Etage rot ist.*

Domino

1. Die Steine des bekannten Domino–Spiels tragen jeweils zwei Zahlen von 0 bis 6. Dabei kommt jede Zahl mit jeder anderen und sich selbst genau einmal vor.
   Wie oft kommen die einzelnen Zahlen im Spiel vor?
   Aus wie vielen Steinen besteht ein derartiges Dominospiel?

Bei einem „Großen Dominospiel“ werden die Zahlen von 0 bis 9 verwendet. Wie viele Steine gibt es bei diesem Spiel und wie oft kommt jede Zahl vor?

2. Beim Domino dürfen zwei Steine nur dann aneinandergelegt werden, wenn beide Steine auf den entsprechenden Hälften die gleiche „Augenzahl“ aufweisen. Mehrere Steine regelgerecht aneinandergelegt bilden eine Kette. Stimmen erste und letzte Augenzahl einer Kette überein, so darf man die beiden äußeren Steine aneinanderlegen und es entsteht ein Kreis.
   Lege mit deinen Tischnachbarn einige Kreise und finde interessante Eigenschaften!
   Versuche einen Kreis aus 3, 4, 5 (2, 10, 11) Steinen zu legen!
   Versuche einen Kreis aus allen Steinen zu legen!
   Probiere dies auch mit einem Großen Dominospiel!

3. Man kann sich auch ein n-Domino-Spiel denken, bei dem die Zahlen 0 bis n benutzt werden.
   Wie oft kommt jede Zahl bei einem derartigen Spiel vor?
   Aus wie vielen Steinen besteht ein n-Domino-Spiel?
   Für welche Zahlen n können alle Steine des Spiels in einem Kreis ausgelegt werden?
   Falls man für eine Zahl n nicht alle Steine in einem Kreis auslegen kann: Aus wie vielen Steinen besteht ein größtmöglicher Kreis?

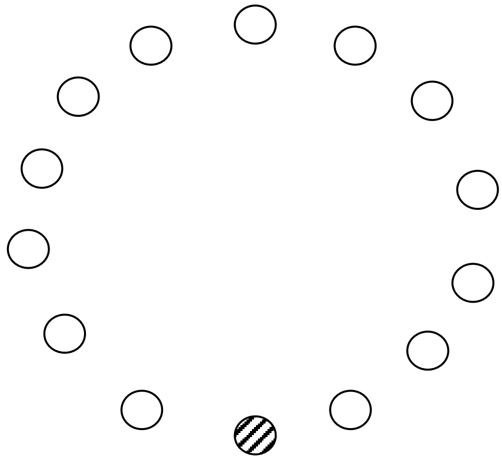
Die Steine eines Dominospiels lassen sich beispielsweise auf folgende Weise ordnen:

(0,0)	*(0,1)*	*(0,2)*	*(0,3)*	*(0,4)*	*(0,5)*	*(0,6)*
(1,1)	*(1,2)*	*(1,3)*	*(1,4)*	*(1,5)*	*(1,6)*	
(2,2)	*(2,3)*	*(2,4)*	*(2,5)*	*(2,6)*		
(3,3)	*(3,4)*	*(3,5)*	*(3,6)*			
(4,4)	*(4,5)*	*(4,6)*				
(5,5)	*(5,6)*					
(6,6)						

Jede Zahl kommt also 8(= 6+2)–mal vor, es gibt 7+6+...+1 = 28 Spielsteine. Bei einem „Großen Dominospiel“ kommen alle Zahlen elfmal vor und es gibt 55 Spielsteine.
In einem Kreis liegen stets zwei gleiche Zahlen nebeneinander, das heißt alle Zahlen müssen gerade oft vorkommen. Dies ist auch hinreichend, wenn jede Zahl gemeinsam mit jeder anderen auf einem Stein vorkommt. Bei einem 6-Dominospiel lassen sich also alle Steine zu einem Kreis auslegen, bei einem „Großen Dominospiel“ nicht.
Beispielsweise können in obiger Harfe die Steine aus den Zeilen 1 und 2, den Zeilen 3 und 4 sowie aus der fünften und sechsten Zeile zu jeweils einem Kreis verbunden werden. Die drei Kreise können dann anschließend miteinander zu einem großen Kreis verbunden werden.
Bei ungeradem n können nicht alle Steine zu einem Kreis ausgelegt werden. Dann ist es aber möglich, (n+1)/2 Steine so zu entfernen, dass jede Zahl gerade oft vorkommt und alle restlichen Steine (beispielsweise ähnlich zu obigem Vorgehen) zu einem Kreis ausgelegt werden können.

(0,0)	~~*(0,1)*~~	*(0,2)*	*(0,3)*	*(0,4)*	*(0,5)*	*(0,6)*	*(0,7)*	*(0,8)*	*(0,9)*
	(1,1)	*(1,2)*	*(1,3)*	*(1,4)*	*(1,5)*	*(1,6)*	*(1,7)*	*(1,8)*	*(1,9)*
		(2,2)	~~*(2,3)*~~	*(2,4)*	*(2,5)*	*(2,6)*	*(2,7)*	*(2,8)*	*(2,9)*
			(3,3)	*(3,4)*	*(3,5)*	*(3,6)*	*(3,7)*	*(3,8)*	*(3,9)*
				(4,4)	~~*(4,5)*~~	*(4,6)*	*(4,7)*	*(4,8)*	*(4,9)*
					(5,5)	*(5,6)*	*(5,7)*	*(5,8)*	*(5,9)*
						(6,6)	~~*(6,7)*~~	*(6,8)*	*(6,9)*
							(7,7)	*(7,8)*	*(7,9)*
								(8,8)	~~*(8,9)*~~
									(9,9)

Von Stein zu Stein



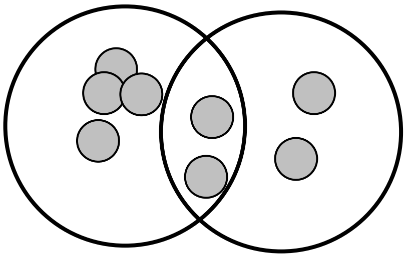
14 Steine liegen in einem Kreis. Kathrin hüpft einbeinig von Stein zu Stein. Dabei beginnt sie auf dem markierten Stein und wechselt auf jedem *dritten* das Bein.
Dabei bemerkt sie (*und das solltest du überprüfen*): Nach drei Runden hat sie auf jedem Stein mindestens einmal gestanden, um das Bein zu wechseln.
Kathrin beginnt von neuem, diesmal wechselt sie das Bein jedoch auf jedem *vierten* Stein. Kommt sie auch auf jedem Stein im Kreis zum Stehen?
Wie ist es, wenn sie das Bein auf jedem *fünften, sechsten*, ... Stein wechselt. Wie viele Runden benötigt Kathrin gegebenenfalls, bis sie auf jedem Stein im Kreis einmal gestanden hat?

Kannst du entsprechende Aussagen für einen Kreis aus ...12, 13, 15, 16,... Steinen treffen?

Es liegen n Steine im Kreis und Kathrin wechsle auf jedem m-ten Stein das Bein.
Sind m und n teilerfremd, so kommt Kathrin bis zur $\frac{kgV(m,n)}{n}$ *–ten Runde auf jedem Stein zu stehen.*
Sind m und n nicht teilerfremd, wechselt das Mädchen nicht auf jedem Stein das Bein, Wiederholungen beginnen nach $\frac{kgV(m,n)}{n}$ *Runden.*

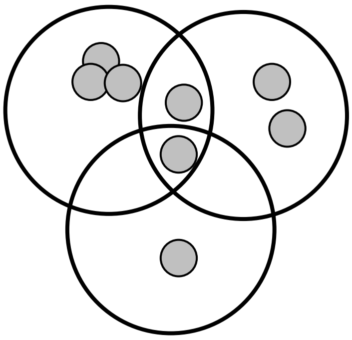
Münzen und Kreise

Johanna hat auf ein Blatt Papier zwei Kreise gezeichnet und acht Münzen auf folgende Weise ausgelegt.



Wie viele Münzen liegen in jedem der beiden Kreise?

Tobias zeichnet einen dritten Kreis dazu und verschiebt eine Münze.



Wie viele Münzen befinden sich jetzt jeweils in den Kreisen?

Versuche eine andere Anordnung der Münzen zu finden, die zu den gleichen „Münzzahlen“ führt!

Versuche nun eine Anordnung der 8 Münzen zu finden, so dass sich 6, 5 und 4 Münzen in den drei Kreisen befinden!
Wie viele verschiedene Anordnungen gibt es zu diesen Münzzahlen?

Denke dir selbst ähnliche Aufgaben aus und bearbeite sie mit deinen Tischnachbarn!

Werden die durch die Anordnung der Kreise entstehenden Gebieten von links oben nach rechts unten mit Buchstaben bezeichnet, so lassen sich die 18 (bis auf Symmetrien) verschiedenen Münzanordnungen in einer Tabelle notieren.

a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*
2	*1*	*1*	*0*	*3*	*0*	*1*
2	*0*	*2*	*1*	*3*	*0*	*0*
3	*0*	*1*	*0*	*3*	*1*	*0*
1	*3*	*0*	*0*	*2*	*0*	*2*
1	*2*	*1*	*1*	*2*	*0*	*1*
2	*2*	*0*	*0*	*2*	*1*	*1*
1	*1*	*2*	*2*	*2*	*0*	*0*
3	*1*	*0*	*0*	*2*	*2*	*0*
2	*1*	*1*	*1*	*2*	*1*	*0*
0	*4*	*0*	*1*	*1*	*0*	*2*
0	*3*	*1*	*2*	*1*	*0*	*1*
1	*3*	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*
0	*2*	*2*	*3*	*1*	*0*	*0*
1	*2*	*1*	*2*	*1*	*1*	*0*
2	*2*	*0*	*1*	*1*	*2*	*0*
0	*4*	*0*	*2*	*0*	*1*	*1*
0	*3*	*1*	*3*	*0*	*1*	*0*
1	*3*	*0*	*2*	*0*	*2*	*0*

Beim Eismann

1. Andrea und Markus treffen sich im Eiscafe auf dem Marktplatz. Dort gibt es sechs verschiedene Eissorten: Schokolade, Vanille, Erdbeere, Zitrone, Walnuss und Banane.
   Andrea möchte eine Tüte mit zwei Kugeln kaufen. Für jede Kugel kann sie aus den sechs Sorten auswählen, doch sie kann sich nicht entscheiden. Wie viele Möglichkeiten hat Andrea?
   Markus schafft drei Kugeln Eis. Aus wie vielen Möglichkeiten kann er auswählen?
   Gestern gab es noch eine siebente Eissorte: Nugat. Zwischen wie vielen Möglichkeiten hätten sich Andrea und Markus gestern entscheiden müssen?

Stell dir vor, es gäbe morgen nicht sechs Sorten Eis, sondern 12 verschiedene Sorten. Wie viele Möglichkeiten gäbe es dann für Andrea?

2. Einige Schüler aus der Klasse 5c treffen sich am Nachmittag auf dem Rummel. Dort gibt es auch einen Eisstand und jeder bestellt für sich zwei Kugeln Eis. Dabei achten die Kinder darauf, dass nicht zweimal dieselbe Eistüte gekauft wird. Insgesamt werden dabei von jeder Eissorte drei Kugeln verkauft.
Wie viele Kinder könnten sich getroffen haben, damit alle Bedingungen erfüllt sind?
Wie viele Eissorten gibt es dann am Eisstand?
Gibt es noch andere Lösungen für die Anzahl der Schüler und der Eissorten?

3. Ein paar Mitglieder der Mathematik–AG treffen sich am Nachmittag am Badesee. Als einige Appetit auf Eis bekommen, verabreden sie eine besondere mathematische „Eisregel“: Niemand darf eine Eistüte kaufen, die alle Sorten enthält, die schon ein anderer Schüler vor ihm gekauft hat.
Am Eisstand gibt es Schokoladen-, Bananen- und Erdbeereis.
Denke dir einige mögliche Eistüten aus, die die Kinder nacheinander kaufen können!
Wie viele Kinder können sicher sein ein Eis zu bekommen, egal wie gut die Kinder in der Schlange vor ihnen nachdenken?
Wie viele Kinder können höchstens Eis kaufen?
Gib verschiedene Möglichkeiten an, wie möglichst viele Kinder eine Eistüte kaufen können!
Untersuche die obigen Fragen auch für 4, 5, ... verschiedene Eissorten!

4. Denkt euch selbst eine Regel aus, nach der einige Kinder Eistüten kaufen können. Welche Fragen könnten jetzt interessant sein?

Zu 1.: *Für Andrea gibt es die folgenden Möglichkeiten, wenn man die Reihenfolge der Eiskugeln nicht beachtet:*

ss	*sv*	*se*	*sz*	*sw*	*sb*	*6*
	vv	*ve*	*vz*	*vw*	*vb*	*5*
		ee	*ez*	*ew*	*eb*	*4*
			zz	*zw*	*zb*	*3*
				ww	*wb*	*2*
					bb	*1*
						21

Für Markus lässt sich die Anzahl verschiedener Eistüten beispielsweise auf folgende Weise ermitteln: Zunächst kann man zu jeder Tüte von Andrea eine Kugel Schokoladeneis hinzufügen, dies ergibt 21 unterschiedliche Eistüten. Fügt man stattdessen Vanille hinzu, finden sich in der ersten Zeile des obigen Schemas lediglich Wiederholungen, man erhält also nur 15 neue Möglichkeiten. Insgesamt gilt für die Anzahl möglicher Eistüten: 21+15+10+6+3+1 = 56.

Bei sieben Eissorten enthält man entsprechend für Andrea 28 verschiedene Möglichkeiten und für Markus 84 unterschiedliche Eistüten. Bei 12 Eissorten hat Andrea 78 Möglichkeiten.

zu 2.: *Bezeichnet man die Anzahl der Kinder mit k und die Anzahl der Eissorten mit s, so gilt offenbar 2k = 3s. Die Gleichung ist für alle geraden Sortenanzahlen lösbar.*

zu 3.: *Es können sicher drei Eistüten gekauft werden, nämlich nacheinander (in beliebiger Reihenfolge) S, E, B, wobei die Buchstaben nur die Sorten, nicht die Anzahl der Kugeln symbolisieren. Es können höchstens sieben Tüten nacheinander gekauft werden, beispielsweise SEB, SE, EB, SB, S, E, B.*

Prinzipiell analog lassen sich die Fragen für mehr Eissorten bearbeiten.

Zahlenketten

Zahlenketten kannst du auf folgende Weise erhalten: Schreibe zwei Zahlen nebeneinander, und daneben deren Summe. Die nächste Zahl ist die Summe der zweiten und dritten Zahl, die nächste die Summe aus der dritten und vierten Zahl.
Ein Beispiel für eine Zahlenkette aus fünf Zahlen (Fünferkette):

5	7	12	19	31

Als erstes wurden die Zahlen 5 und 7 gewählt. Wegen 5+7=12 ist 12 die dritte Zahl. 7+12 ergibt 19 als vierte Zahl, und 12+19=31 ist die letzte Zahl.

Versuche eine Fünferkette zu finden, deren letzte Zahl 100 ist!

				100

Gibt es andere Möglichkeiten für eine solche Fünferkette? Kannst du eine Sechser- und eine Viererkette bilden, deren letzte Zahl 100 ist? Wie viele verschiedene Möglichkeiten findest du jeweils?

Untersuche diese Fragen auch für andere „Endzahlen“! Kann jede Zahl „Endzahl“ einer Zahlenkette sein?

Bezeichnet man die beiden ersten Zahlen der Kette mit a bzw. b, so gilt für die fünfte Zahl offenbar 2a+3b. Dann ist a=50 und b=0 die Lösung mit dem größten ersten Summanden. Soll die fünfte Zahl unverändert bleiben, müssen sich die beiden Summanden entgegengesetzt ändern. Die Zahl a muss daher um Vielfache von 3 verkleinert und b um ein entsprechendes Vielfaches von 2 vergrößert werden. a=2 und b=32 ist die Lösung mit dem kleinsten ersten Summanden, insgesamt gibt es also 17 Möglichkeiten.
Für andere Ketten geht man analog vor.
Mögliche „Endzahlen“ hängen selbstverständlich von der Kette ab. Bei einer Fünferkette kann offenbar jede Zahl e>1 „Endzahl“ sein.

Zahlen und ihre Teiler

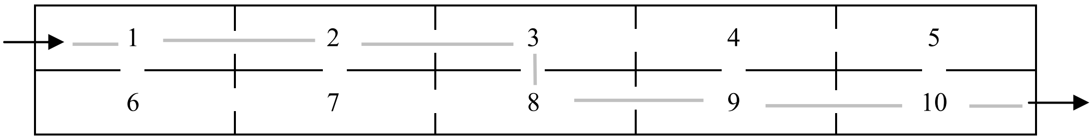
Die Zahl 12 hat sechs Teiler: 1, 2, 3, 4, 6, 12. Von diesen Teilern sind vier gerade und zwei ungerade.

1. Finde Zahlen, bei denen alle Teiler außer 1 gerade sind. Finde ein passendes Muster!
2. Finde alle Zahlen, die gleich viele gerade und ungerade Teiler haben!
3. Welche Zahlen haben genau drei Teiler?
4. Denke dir selbst weitere Aufgaben aus und versuche sie zu lösen!

Nur die Zweierpotenzen haben bis auf 1 ausschließlich gerade Teiler.
Zahlen, die durch 2 und nicht durch eine höhere Zweierpotenz teilbar sind, sind genau die Zahlen, die gleich viele gerade und ungerade Teiler besitzen. Zur Begründung kann man die Primfaktorzerlegung benutzen. Damit lassen sich zunächst aus allen ungeraden Primfaktoren und der 1 alle ungeraden Teiler finden. Zu jedem dieser Teiler erhält man durch Multiplikation mit 2 einen geraden Teiler und findet so auch alle; es gibt also gleich viele gerade und ungerade Teiler. Mit dieser Argumentation wird auch klar, dass Zahlen, die durch eine höhere Zweierpotenz teilbar sind, mehr gerade als ungerade Teiler besitzen.
Primzahlquadrate besitzen genau drei Teiler.

Ein ungewöhnliches Haus

In einem Haus sind die zehn Zimmer in zwei Reihen angeordnet. Die Räume haben zu allen Nachbarräumen Türen und sind so durchnummeriert:



Wir wandern von links nach rechts durch das Haus, beginnen immer im Raum mit der Nummer 1 und gehen aus dem Raum Nummer 10 hinaus. Wir dürfen auch von unten nach oben oder von oben nach unten gehen, aber wir dürfen nie zurückgehen. Zu jedem Weg addieren wir die Nummern der Räume, durch die wir gehen. (Der eingezeichnete Beispielweg bekommt so die „Wegsumme" 1+2+3+8+9+10 = 33.)

a) Finde verschiedene Wege!
b) Ist die Anzahl der Zimmer bei jedem Weg gleich?
c) Wie sieht ein Weg aus, bei dem die Zahl der Zimmer möglichst klein, wie einer bei dem die Zahl der Zimmer möglichst groß ist?
d) Gibt es Wege durch 6, 7, 8, 9 oder 10 Zimmer?
e) Wie viele Wege gibt es?
f) Was ist die größte, was die kleinste Wegsumme, die vorkommen kann?
g) Kommen alle Zahlen dazwischen als „Wegsummen" vor?
h) Gibt es verschiedene Wege mit gleicher Summe?
i) Welche Möglichkeiten findet ihr, wenn ihr einen anderen Ausgang (Eingang) wählt?
j) Welche Möglichkeiten findet ihr, wenn man einen anderen Grundriss wählt?
k) Begründet eure Ergebnisse und Vermutungen!

Es existieren nur Wege durch gerade viele Zimmer, insgesamt 16 verschiedene. Offenbar liegen die Wegsummen zwischen 25 und 55; es gibt verschiedene Wege mit derselben Wegsumme.

Merkwürdige Zahlen

Kerstin und Elke beschäftigen sich mit Ziffernkarten. Plötzlich entdeckt Elke etwas Interessantes: „Sieh mal, ich habe eine Karte mit der 2 und eine Karte mit der 1. Zusammen ergibt das 3. Legt man die Karten nebeneinander, dann ist das 21, also siebenmal so viel wie 3." Auch Kerstins Interesse ist geweckt: „Gibt es denn noch zwei andere Ziffernkarten, die man so nebeneinander legen kann, dass eine zweistellige Zahl entsteht, die das Siebenfache der Summe der beiden einzelnen Ziffern ist?"

a) Versuche, Kerstins Frage zu beantworten!
b) Gibt es mehrere Möglichkeiten? Falls ja, versuche möglichst viele solche Paare von Ziffernkarten zu finden!
c) Irgendwann meint Kerstin: „Man muss ja gar nicht unbedingt den Faktor 7 nehmen." Finde möglichst viele Paare von Ziffernkarten für andere Faktoren!
d) Nimm dir ein Beispiel an Kerstin und denke dir noch andere ähnliche Aufgaben aus! Kannst du sie mit deinen Tischnachbarn lösen?

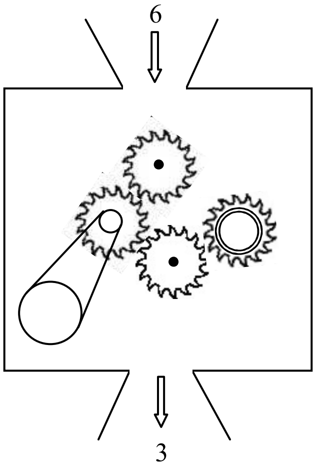
Betrachtet man den Faktor x, ist a die Zehner- und b die Einerziffer, so muss offenbar gelten:

$$(x-1)\cdot b = (10-x)\cdot a$$

Für x=7 ergeben sich die „Ziffernkarten" 2-1, 4-2, 6-3 und 8-4.

Der Zahl-Transformer

Der Zahl-Transformer ist eine „Maschine“, der eine Zahl in eine andere umwandelt; die Tabelle enthält einige Beispiele.



Eingabe	Ausgabe
6	3
5	4
9	8
8	4
11	10
2	1
12	6

1. Schreibe Regeln auf, nach denen der Zahl-Transformer arbeiten könnte!
2. Hat der Transformer eine Zahl umgewandelt, so kann man anschließend die neue Zahl wieder in den Transformer geben und die ausgegebene Zahl danach wieder usw. Beginnt man beispielsweise mit der Zahl 6 so ergibt sich: 6 → 3 → 2 → 1 → 0.
   Probiere dies auch für andere Zahlen. Was stellst du fest?
3. Aus der Zahl 6 erhält man nach vier Transformationsschritten die Zahl 0, daher nennt man die Zahl 6 auch eine *Vierschritt – Zahl*.
   Gibt es noch andere Vierschritt – Zahlen?
   Welche Zahl ist die größte Vierschritt – Zahl?
   Wie viele Vierschritt – Zahlen gibt es insgesamt?
4. Versuche eine Sechsschritt – Zahl zu finden!
   Welche Zahl ist die größte, welche die kleinste Sechsschritt – Zahl?
   Wie viele Sechsschritt – Zahlen gibt es insgesamt?
5. Beantworte die Fragen aus Punkt 4 auch für andere Zahlen (Fünfschritt-, Siebenschritt-, Zehnschrittzahlen, …)!
   Findest du allgemeine Regeln, nach denen sich diese Fragen beantworten lassen?
6. Denke dir selbst interessante Regeln für einen anderen Zahl-Transformer aus und untersuche, wie dieser verschiedene Zahlen umwandelt!

Offenbar kann die Anzahl notwendiger Schritte zur Reduktion der gegebenen Zahl z auf 0 mit der Darstellung dieser Zahl als Dualzahl in Zusammenhang gebracht werden. Man macht sich leicht klar, dass mit

n:	*Anzahl der notwendiger Schritte*	n_0*:*	*Anzahl von 0 in dualer Darstellung*	n_1*:*	*Anzahl von 1 in dualer Darstellung*

gilt:

$$n = 2n_1 + n_0 - 1$$

Ist 2^p *die größte Zweierpotenz mit* $z \geq 2^p$*, so gilt entsprechend*

$$n = p + n_1 .$$

Denkt man daran, wie aus den n-Schritt–Zahlen die (n+1)-Schritt–Zahlen gewonnen werden können, wird klar, dass die jeweiligen Anzahlen eine Fibonacci-Folge bilden.

Kampf den Drachen

In einem fernen Land lebten vor langer Zeit böse Drachen, meist mit mehreren Köpfen und Schwänzen. Aber es gab auch einige tapfere Ritter, die es nach langen Kampfübungen wagten, gegen die Drachen zu kämpfen. Mit ihrem Schwert konnten sie einem Drachen mit jedem Schlag ein oder zwei Köpfe oder Schwänze zugleich abschlagen. (Dafür hatten sie lange trainiert.) Aber die Drachen verfügten über Zauberkräfte:

- Schlug man ihnen einen Kopf ab, wuchs sofort ein weiterer nach. Nur wenn man mit einem Schlag zwei Köpfe zugleich abtrennte, bildete sich kein neuer.
- Schlug man einen Schwanz ab, wuchsen sogleich zwei neue; und konnte man zwei Schwänze zugleich abschlagen, bekam der Drache einen weiteren Kopf.
- Ein Drachen war erst besiegt, wenn man alle Köpfe und Schwänze abgetrennt hatte.

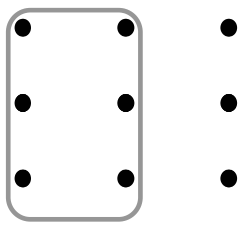
Wollte man einen Drachen besiegen, musste man sich also schon eine Strategie überlegen. Hättest du den Rittern dabei helfen können?

a) Wie viele Schwerthiebe sind mindestens notwendig, um einen Drachen mit drei Köpfen und drei Schwänzen zu besiegen?
b) Wie viele und welche Hiebe sind bei anderen Drachen, beispielsweise mit vier Köpfen und einem Schwanz oder mit fünf Köpfen und fünf Schwänzen notwendig?
c) Gibt es unbesiegbare Drachen?

Sofern ein Drache einen Schwanz besitzt, kann man die Zahl der Schwänze beliebig erhöhen und damit immer einen Drachen „erzeugen", bei dem erst alle Schwänze und dann alle Köpfe abgeschlagen werden können. Daher sind nur die Drachen mit einer ungeraden Kopfanzahl und ohne Schwanz unbesiegbar.

Geometrie auf dem Nagelbrett

Auf einem Brett sind 9 Nägel in einer quadratischen Anordnung genagelt worden.



Spannt man wie abgebildet ein Gummiband über einige Nägel, entstehen verschiedene Figuren.

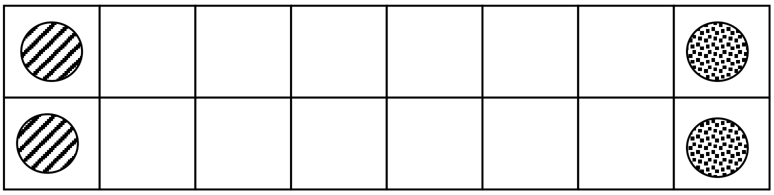
a) Probiere es selbst einmal aus! Beschreibe und benenne entstehende Figuren!
b) Wie viele verschieden aussehende Dreiecke kann man erhalten?
c) Nimm das größte rechtwinklige Dreieck. Wie oft kann man es auf dem Nagelbrett spannen?
d) Nimm das kleinste rechtwinklige Dreieck. Wie oft kann man es auf dem Nagelbrett spannen?
e) Finde weitere Figuren, die genauso groß wie die Figur in obiger Abbildung sind!
f) Finde unterschiedliche Formen gleicher Größe!
g) Denke dir selbst weitere interessante Aufgaben aus und bearbeite sie mit deinen Tischnachbarn!

Auf dem 3×3–Brett gibt es 8 verschiedene Dreiecksformen, das größte rechtwinklige Dreieck kommt viermal, das kleinste sechzehnmal vor.

Die Sperre

Es spielen zwei Spieler mit jeweils zwei Steinen auf dem unten abgebildeten Spielplan. Gewonnen hat der Spieler, dem es gelingt, die gegnerischen Steine so einzusperren, dass sie nicht mehr bewegt werden können.

Spielregeln:
1. Es darf immer nur mit einem eigenen Stein über freie Felder gezogen werden.
2. Man darf nicht auf ein besetztes Feld ziehen.
3. Die Steine dürfen nur vorwärts oder rückwärts verschoben werden.



Spiele ein paar Runden mit deinen Tischnachbarn!
Kann man immer gewinnen?

Das Spiel kann auch auf anderen Spielplänen gespielt werden. Entwerft einige weitere Spielpläne und überlegt, wie man jetzt möglichst geschickt spielt?

Auf dem abgebildeten Spielplan kann der zweite Spieler immer gewinnen, indem er mit seinem Zug in beiden Reihen (wieder) denselben Abstand zwischen den Spielsteinen herstellt. Dies ist immer so möglich, dass sich die „Abstandssumme" nicht vergrößert. (Aufgrund des endlichen Spielplans endet daher das Spiel irgendwann. Wie viele Züge sind höchstens möglich?)

Game of Fifteen

Es wird zu zweit gespielt. Die beiden Spieler legen vor sich neun Kärtchen offen aus, die mit „1" bis „9" beschriftet sind. Aufgenommen wird dann abwechselnd je eine Karte mit dem Ziel, mit genau drei Karten die Summe 15 zu erreichen. (Restkarten dürfen dabei auf der Hand behalten werden.)

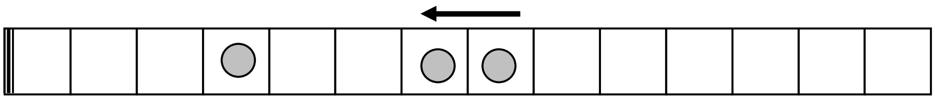
Eine einfache Lösung erhält man durch (nicht einfachen) Repräsentationswechsel: Das beschriebene Spiel kann aufgefasst werden als Tic Tac Toe auf einem magischen Quadrat.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Für dieses Spiel gibt es lediglich Strategien, die eine Niederlage verhindern.

Goldtalerspiel

Es wird zu zweit gespielt. Drei Münzen werden beliebig in verschiedene „Kästchen“ gesetzt. Jeder Spieler muss abwechselnd eine der drei Münzen von rechts nach links bewegen. Dabei darf eine Münze beliebig viele „Kästchen“ aber höchstens bis zur nächsten Münze oder auf das „Kästchen“ am linken Spielfeldrand gezogen werden. Verloren hat der Spieler, der als erster keine Münze mehr bewegen kann.



Spiele einige Runden mit deinem Tischnachbarn!

Gibt es Spielsituationen, in denen man immer gewinnen kann? Suche nach einer Gewinnstrategie!

Wird die Anzahl der Felder vor dem linken Stein mit a und die Anzahl der Felder, um die der rechte Stein bewegt werden kann, mit b bezeichnet, so gilt: Es verliert derjenige Spieler, der bei einer Stellung mit a = b am Zuge ist, da der Gegenspieler dann immer wieder in eine solche Stellung nachziehen kann.

Viele der vorgestellten Problemfelder sind aufgrund ihrer mathematischen Reichhaltigkeit und damit zusammenhängend aufgrund der ansprechbaren Themen prinzipiell auch für die Förderung mathematisch interessierter Schüler der Sekundarstufe I geeignet. Unter anderem kann mit den zusammengestellten Materialien auf die Themen Dualzahlen („Zahl–Transformer“), Teilbarkeit („Von Stein zu Stein“, „Zahlen und ihre Teiler“, „Zahlenketten und Spiralen“), Gleichungen („Zahlenketten“, „Merkwürdige Zahlen“), Zahlenfolgen („Häuser streichen“, „Über den Fluss“), geometrische Formen („Game of Tri“, „Geometrie auf dem Nagelbrett“), Kombinatorik („Beim Eismann“), vollständige Induktion („Häuser streichen“, „Über den Fluss“) eingegangen werden. Darüber hinaus lassen sich mit kleinen Variationen und Ausweitungen des Vorgestellten die Möglichkeiten zum mathematischen Tätigsein oftmals noch stark erweitern. Beispielsweise kommen bereits „Matheasse“ aus der Grundschule bei den Fragen zur „Geometrie auf dem Nagelbrett“ zu guten Ergebnissen. Die folgenden möglichen Variationen können aber sicher auch für *Sekundarstufenschüler* interessant und herausfordernd sein:

α) Wie viele Dreiecke kann man auf einem 3×3–Nagelbrett insgesamt spannen?
β) Wie viele verschieden aussehende Quadrate kann man spannen? Wie viele Quadrate gibt es von jeder Sorte?
γ) Wie viele verschiedene Vierecksformen gibt es auf einem 3×3–Nagelbrett?
δ) Wie viele deckungsverschiedene (konvexe und konkave) Fünfecke gibt es?
ε) Auf einem größeren Nagelbrett lassen sich zahlreiche Vielecke spannen. Findest du Zusammenhänge zwischen dem Flächeninhalt der Vielecke, der Anzahl der Nägel auf dem Rand der Vielecke und der Anzahl der Nägel in deren Innerem?

So konnten in einer Arbeitsgemeinschaft Schüler der siebten Jahrgangsstufe ausgehend von der letzten Fragestellung das Ergebnis von PICK neu entdecken und an zahlreichen Beispielen bestätigen: Bezeichnet man die Anzahl der Nägel auf dem Rand mit n und die Anzahl der Nägel im Inneren des Vielecks mit i, so gilt für die Maßzahl des Flächeninhalts $A = \frac{n}{2} + i - 1$ (vergleiche beispielsweise KLOTZEK [1]).
Und schließlich entwickelten die Schüler eigenständig weitere Variationen, u. a.: Gibt es auch für Vielecke mit „Löchern“ einen ähnlichen Zusammenhang? Eine Beantwortung soll hier dem Leser überlassen bleiben.

Literatur

Bauersfeld, H. [1]: Mathematische Lehr-Lern-Prozesse bei Hochbegabten. Bemerkungen zu Theorie, Erfahrungen und möglicher Förderung. *Journal für Mathematikdidaktik, 14* (3/4), 1993, S. 243–267.

Bauersfeld, H. [2]:	Das Anderssein der Hochbegabten. *mathematica didactica, 25* (1), 2002, S. 5–16.
Bezirkskomitee Chemnitz zur Förderung math.-natw. Beg. und interessierter Kinder [1]:	*Aufgabensammlungen für Arbeitsgemeinschaften Klasse 3, 4, 5, 6.*
Dörner, D. [1]:	*Problemlösen als Informationsverarbeitung* (3. Auflage). Kohlhammer, Stuttgart 1987.
Ertel, H. & Fritzlar, T. [1]:	Überlegungen und erste Erfahrungen zur Förderung mathematisch interessierter Grundschüler – die „Matheasse" in Jena. *Erziehung & Unterricht, 154* (3/4), 2004, S. 288–298.
Funke, J. [1]:	*Problemlösendes Denken.* Kohlhammer, Stuttgart 2003.
Heinrich, F. & Zimmermann, B. [1]:	Einleitung (in den Thementeil Problemlösen). *Der Mathematik-unterricht, 49* (1), 2003, S. 3–4.
Käpnick, F. [1]:	*Mathematisch begabte Kinder. Modelle, empirische Studien und Förderungs-projekte für das Grundschulalter.* Lang, Frankfurt (M) 1998.
Krauthausen, G. [1]:	Wann fängt das Beweisen an? Jedenfalls, ehe es einen Namen hat. In W. Weiser & B. Wollring (Ed.), *Beiträge zur Didaktik der Mathematik für die Primarstufe* (S. 99–113). Kovač, Hamburg 2001.
Klotzek, B., u. a. [1]:	*kombinieren, parkettieren, färben.* Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1985.
Nolte, M. (Hrsg.) [1]:	*Der Mathe–Treff für Mathe–Fans.* Franzbecker, Hildesheim 2004.
Pehkonen, E. K. [1]:	Problem solving in mathematics – Introduction. *ZDM, 23* (1), 1991, S. 1–4.
Rehlich, H. [1]:	Ideen zur Organisation entdeckenden Lernens im Mathematikunterricht. *Der Mathematikunterricht, 49* (1), 2003, S. 5–18.
Singer, W. [1]:	In der Bildung gilt: Je früher, desto besser! *Psychologie heute,* Dezember 1999, S. 60–65.
Singer, W. [2]:	Was kann ein Mensch wann lernen? *Vortrag anlässlich des ersten Werkstattgesprächs der Initiative McKinsey bildet in der Deutschen Bibliothek.* Frankfurt am Main, 12. Juni 2001
Southwell, B. [1]:	*Investigatin Problem Solving.* Beitrag beim 10th International Congress on Mathematical Education (ICME). Kopenhagen 2004.
Spitzer, M. [1]:	*Lernen: Gehirnforschung und Schule des Lebens*. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg 2002.
Struve, H. [1]:	*Grundlagen einer Geometriedidaktik.* BI, Mannheim 1990.
Zimmermann, B. [1]:	From Problem Solving to Problem Finding in Mathematics Instruction. In P. Kupari (Ed.), *Mathematics Education Research in Finland.* Yearbook 1985. Jyväskylä 1986.
Zimmermann, B. [2]:	*Problemorientierter Mathematikunterricht.* Franzbecker, Hildesheim 1991.
Zimmermann, B. [3]:	On the Legacy of G. Pólya: Some new (old) aspects of mathematical problem solving and relations to teaching. *Teaching Mathematics and Computer Science, 1/2*, 2003, S. 169–189.
Winter, H. [1]:	*Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht*. Vieweg, Braunschweig 1991.

Prof. Dr. Torsten Fritzlar
Universität Lüneburg
FB I, Mathematik und Didaktik der Mathematik
Scharnhorststr. 1
21332 Lüneburg
fritzlar@web.de