Hans Engelhaupt †

Kürzeste Wege, Teil II - Hinweise zu den Lösungen

Im Folgenden findet man Läsungshinweise zu den Aufgaben der Abhandlung „Kürzeste Wege, Teil I“ in Mathematikinformation Nr. 41, wie sie von ARTHUR KRÄMER und KARLHORST MEYER möglichst nahe an den Entwürfen von HANS ENGELHAUPT posthum überarbeitet worden sind. Aus dem ersten Teil der Abhandlung sei hier nochmals auf einiges verwiesen:

Der Mathematikstil von ENGELHAUPT ist nicht immer leicht lesbar, da insbesondere bei den Lösungen oft nur der Weg grob skizziert wird. Im Rahmen des zur Verfügung stehenden Druckumfangs war es nicht möglich, allen Aufgaben im Sinne von Schülern komplette Lösungen zu geben.

So kann man den Schülerinnen und Schülern u. U. auch die Lösungen mit der Aufforderung in die Hand geben, sie in ihren Detailschritten zu begründen und auszuarbeiten.

Der neue Stil im Mathematikunterricht sucht nach komplexen Fragestellungen, die die Lernenden zwingen, immer wieder ihr Wissen zu rekapitulieren und die Probleme nicht nur mit dem eben Gelernten zu lösen. Der vorliegende Artikel gibt ein umfangreiches Beispielmaterial hierfür. Besonders schön ist an den Beispielen, dass sie ein gemeinsames Ziel verfolgen, eben „kürzeste Wege“. Hierbei geht es nicht nur darum, den Lernenden zu zwingen, umfangreiche Lösungsstrategien zu entwickeln, sondern gleichzeitig viele Kapitel des Unterrichtes in Algebra wie auch Geometrie präsent zu haben.

Aufgabe 1.1.1.1(8):

a) Man spiegelt R an der x-Achse und erhält R'(6|-2). Hieraus folgt x = 4,5 und $\left|\overline{HX}\right|+\left|\overline{XR}\right|=\left|\overline{HR'}\right|=10$.

b) Man spiegelt A an der Geraden y = x. Der Spiegelpunkt A' muss folgende Bedingungen erfüllen: Die Gerade AA' muss die Steigung –1 haben und der Mittelpunkt der Strecke AA' muss auf der Geraden y = x liegen. Hieraus folgt: A'(8,5|0), Z(6|6) und $\left|\overline{AZ}\right|+\left|\overline{ZB}\right|=\left|\overline{A'B}\right|=13$ bzw.

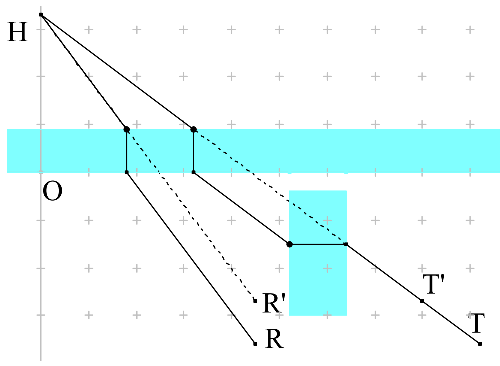
man spiegelt B an der Geraden y = ½x. Hieruas folgt: B'(10,2|3,6), Z(6|3) und $\left|\overline{AZ}\right|+\left|\overline{ZB}\right|=\left|\overline{A'B}\right|=8\sqrt{2}$.

Aufgabe 1.1.1.2(8):

a) Der Weg durch den Bach hat immer die Länge 9 m. Man verschiebt das Rosenbeet auf den Punkt R'(4,5|-2,8). Die Länge von $\overline{HR'}$ ist dann 75 m. Gesamtlänge ist 85 m. k = 2,4.

b) Man verschiebt T nach T'(8|-2,8). Der Bach wird nun auf der Geraden x = 3,2 durchwatet; der Steg steht auf der Geraden y = - 1,5.

Gesamtlänge : 100m + 9 m + 12 m = 121 m.



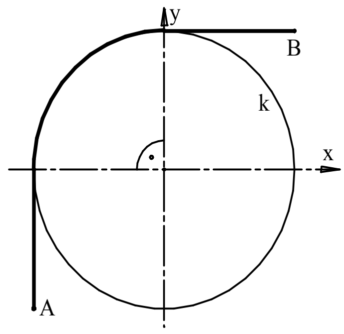
Aufgabe 1.1.2.1(9):

Die Kreistangente t in C steht auf dem Radius OC senkrecht. Für die Steigungskoeffizienten m_i solcher Geraden gilt m_1m_2 = -1, wie man leicht mit kongruenten Dreiecken zeigen kann. Hieraus findet man für die Tangente t: $y=-\frac{1}{7}x+\frac{50}{7}$

Man spiegelt B an t zu B'(7|-1) (man stellt hierzu die Gleichung einer Geraden g: $y = 7x - 50$ durch B auf, die auf t senkrecht steht. Der Schnittpunkt $M = t \cap g$ ist Mittelpunkt von $\overline{BB'}$. Dann zeigt man, dass B' auf der Geraden AC mit der Gleichung $y = -\frac{4}{3}x + \frac{25}{3}$ liegt.

Aufgabe 1.1.2.2(9):

Der Weg L setzt sich aus 2 Tangentenabschnitten der Länge 2 und einen Viertelkreisbogen zusammen.
$L = 8 + 2\pi$



Aufgabe 1.1.3.1(7):

Siehe die Zeichnung, die sich bei der Aufgabenstellung befindet.

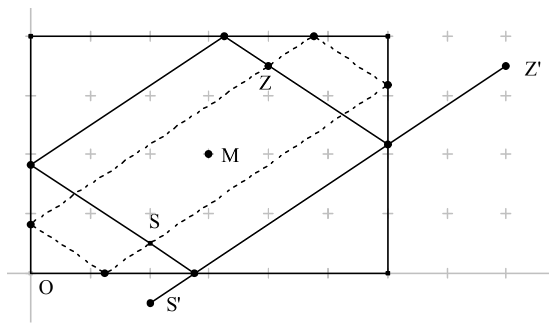
a) $S_a(1,6|-0,8)$ und damit
$L_1 = \left|\overline{WS_a}\right| = \sqrt{1,2^2 + 1,2^2} = 1,2 \cdot \sqrt{2} = 1,697..[m]$
$U := WS_a \cap OA = (0,8|0)$

b) $S_{ba}(3,2|0,8)$ und damit $L_2 = \left|\overline{WS_{ba}}\right| = \sqrt{2,8^2 + 1,2^2} = \sqrt{9,28} = 3,0463..$ [m]
$V := WS_{ba} \cap OA = \left(\frac{4}{3}|0\right)$

c) $S_b(3,2|0,8)$; $W := VS_b \cap AB = (2,4|6/7-0,4) = (2,4|0,457...)$.

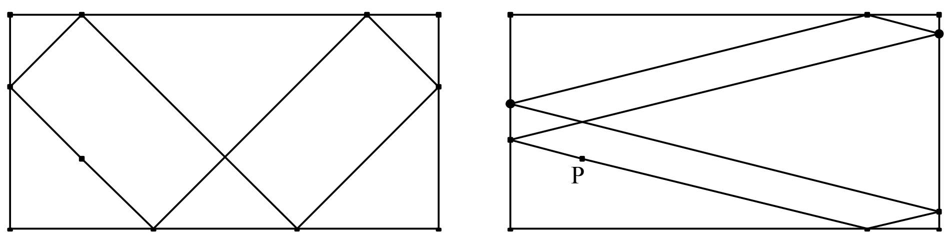
Aufgabe 1.1.3.2(9):

Wenn eine Kugel an zwei benachbarten Banden reflektiert wird, sind die Richtungen der Wege vor der ersten Reflexion und nach der zweiten Reflexion parallel und entgegengesetzt (Beweis). Der Rundweg muss daher ein Parallelogramm sein, dessen Mittelpunkt mit dem Mittelpunkt des Billardtisches zusammenfällt und dessen Seiten parallel zu den Diagonalen des Tisches sind. Man spiegelt den Punkt S(2|0,5) am Mittelpunkt des Billardtisches zum Zielpunkt Z(4 |3,5).



Die Länge L des Rundwegs ist die doppelte Länge einer Diagonalen des Billardtisches. $L = 4\sqrt{13}$.
Da man den Zielpunkt Z auf vier verschiedenen Wegen durch eine Zweifachspiegelung an benachbarten Banden erreichen kann, gibt es zwei gleichlange Rundwege. Liegt S auf einer Diagonalen des Billardtisches, so gibt es nur noch einen Rundweg. Ein Rundweg, der jede Bande genau einmal berührt, ist nicht möglich, wenn die Kugel im Mittelpunkt M des Billardtisches liegt.

Aufgabe 1.1.3.3(7):

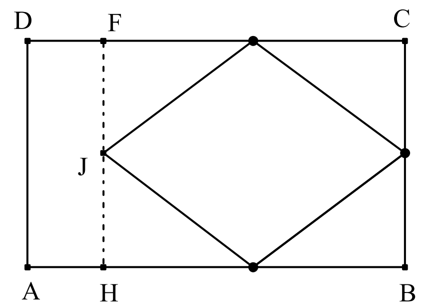


Es gibt zwei Lösungen: Der Weg überschneidet sich immer auf einer Mittelparallelen, die das Rechteck in zwei kongruente Rechtecke zerlegt. Die zwei Weglängen L_1 und L_2 sind jeweils viermal so lang wie die zugehörigen Diagonalen. $L_1 = 4\sqrt{3^2+3^2} = 12\sqrt{2}$ Weglänge 2 = $4\sqrt{6^2+1{,}5^2} = 6\sqrt{17}$

Ergänzung: Liegt die Kugel auf einer Mittelparallelen des Billardtisches, dann kommt sie bei einem derartigen Rundweg bereits nach drei Reflexionen zum Ausgangspunkt zurück.

Aufgabe 1.1.3.4(9):

Lösung vergleiche mit Aufgabe 1.1.3 (existiert nicht)



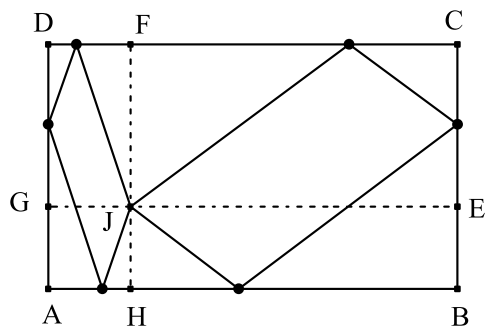
a) $\left|\overline{AH}\right| = 10$, $\left|\overline{JH}\right| = 15$, $\left|\overline{HB}\right| = 40$,

$\left|\overline{AD}\right| = \left|\overline{BC}\right| = 30$

Welche der langen Seiten zuerst angelaufen wird, ändert nur den Umlaufsinn aber nicht die Lage und die Länge des Rundwegs.

Der kürzeste Weg hat die Länge L = 100 m.

Setzt man $\left|\overline{JH}\right| = a$, so ändert sich nur die Form nicht aber die Länge des Rundwegs.

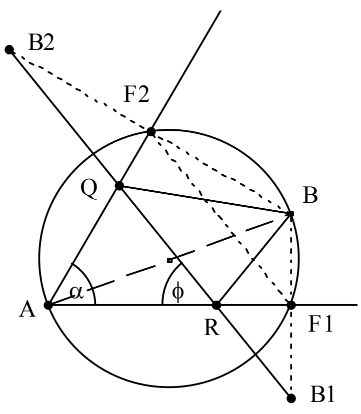


b) $\left|\overline{AH}\right| = 10$, $\left|\overline{JH}\right| = a$

Es gibt vier mögliche Reihenfolgen, die zu einem Rundweg in den Rechtecken ABEG, HBCF, ECDG und FDAH führen (nur zwei sind eingezeichnet). Die Länge dieser vier Rundwege ist immer die doppelte Länge der Diagonale des zugehörigen Rechtecks.

$L_1 = 2\sqrt{a^2+50^2}$, $L_2 = 100$, $L_3 = 2\sqrt{(30-a)^2+50^2}$, $L_3 = 2\sqrt{10^2+30^2} = 20\sqrt{10}$

Für a < 15 gilt : $L_4 < L_2 < L_1 < L_3$
Für a = 15 gilt : $L_4 < L_2 < L_1 = L_3$
Für a > 15 gilt : $L_4 < L_2 < L_3 < L_1$



Aufgabe 1.1.4.1(9):

a) Man spiegelt B an den beiden Schenkeln des Winkels α Jeder Streckenzug von B_1 nach B_2, der die Schenkel des Winkels α schneidet, entspricht einem Rundweg des Jungen. Die Strecke B_1B_2 zwischen den zwei Spiegelpunkten schneidet die Schenkel des Winkels α in den Punkten R und Q. Sie hat die Länge des kürzesten Weges für den Jungen.

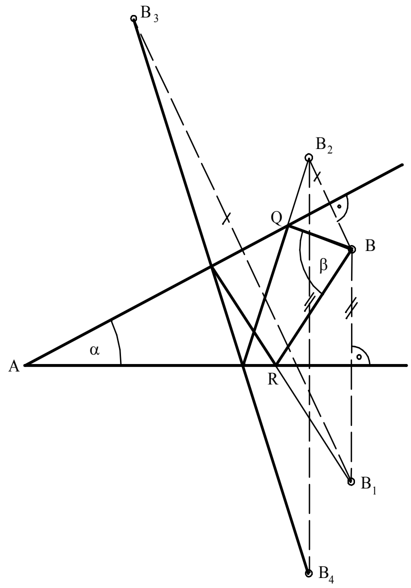
Man erhält die kürzeste Wegstrecke auch als BB_3, wobei B_3 der Spiegelpunkt von B_1 an AQ ist oder als BB_4, wobei B_4 der Spiegelpunkt von B_2 an AR ist. Siehe die Figur zur Lösung der Aufgabe 1.1.4.2.

b) Bekanntlich ist eine Zweifachspiegelung an zwei Geraden, die sich im Punkt A unter einem Winkel α schneiden, gleich der Drehung um A um den Winkel 2α: $\angle QBR = 180^\circ - 2\alpha$.

Ergänzung: Für $\alpha \geq 90^\circ$ wäre der kürzeste Weg von B nach A und zurück.

c) $\angle ARQ = \phi$. Hieraus folgt $\angle BQF_2 = \angle AQR = 180° - \alpha - \phi$ und damit $\angle QBF_2 = 90° - \angle BQF_2 = \alpha + \phi - 90°$ Man zeichnet den Kreis durch A, F_1, B und F_2. Nun ist F_1F_2 die Mittelparallele im Dreieck BB_1B_2 und damit

$\angle AF_1F_2 = \phi$ und $\angle ABF_2 = \phi$ (Winkel im Sehnenviereck AF_1BF_2). Also gilt $\angle ABQ = \angle ABF_2 - \angle QBF_2 = \phi - (\alpha + \phi - 90°) = 90° - \alpha$. Aus b) ergibt sich die Behauptung.



Aufgabe 1.1.4.2(8):

a) Man spiegelt B an den beiden Schenkeln des Winkels α und die Spiegelpunkte nochmals. Die Strecke B_3B_4 hat die Länge des kürzsten Weges des Jungen.

b) Der kürzeste Weg entsteht durch eine doppelte Zweifachspiegelung an den gleichen Geraden also eine Drehung um A um 4α. Also ist $\beta = 180° - 4\alpha$

Ergänzung: Für $\alpha \geq 45°$ wäre der kürzeste Weg von B nach A und zurück.

c) Die Berechnung sei dem Leser überlassen.

Aufgabe 1.1.4.3(7):

Nach Korollar 1.4.3 gilt für gerades n: $n\alpha = 180^o$. Hieraus ergeben sich die folgenden Beispiele:

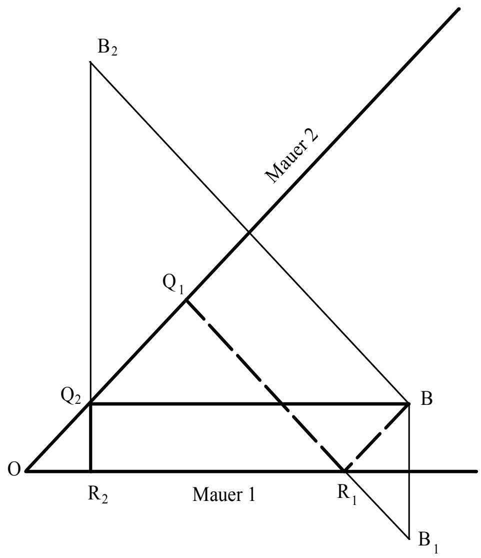
n	2	4	6	8	...
α	90^o	45^o	30^o	25^o	...

Aufgabe 1.1.4.4(8):

a) Die Spiegelpunkte von B an den Mauern sind B_1 und B_2.
Jeder Weg B–R–Q für beliebige Marken R und Q auf den Mauern entspricht einem gleichlangen Weg B_1–R–Q. Wenn B_1Q das Lot auf Mauer 2 ist, dann wird die Weglänge L minimal.

Man erhält: $L_1(B–R_1–Q_1) = 3{,}5\sqrt{2} \approx 4{,}949$
$L_2(B–Q_2–R_2) = 6$

L_1 ist also kürzer als L_2, da B unterhalb der Winkelhalbierenden w des Winkels α liegt.



b) Der Punkt B liegt im Winkelfeld von α genau dann, wenn gilt: $0 < b_2 < b_1$

$L_1(B–R_1–Q_1) = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)\sqrt{2}$

$L_2(B–Q_2–R_2) = b_1$

$L_1 < L_2$ genau dann, wenn $\frac{b_2}{b_1} < \sqrt{2} - 1 = \tan 22{,}5°$

Die Gesamtwege sind natürlich doppelt so lang.

Aufgabe 1.1.6.1(9):

Nach APOLLONIUS liegen die Punkte A,B zu M,M* harmonisch, d. h. b:a = c: (C + a+ b), (1)

wobei c:= $\left|\overline{MM^*}\right|$ ist.

Durch algebraische Umformung findet man aus der Gleichung (1) für die Existenz von Schnittpunkten zwischen den beiden Kreisen: $c + b = \frac{a(c-b)}{b} > r$ (2)

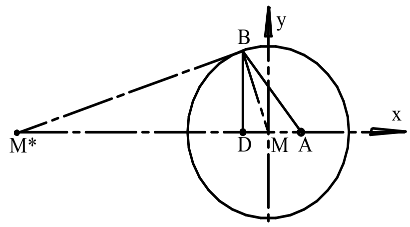
Aus (1) folgt: $c = \frac{b(a+b)}{a-b}$. Setzzt nman dies in (2) ein, erhält man: $\frac{2ab}{a-b} > r$

Aufgabe 1.1.6.2(9, bei c) Kreistangentengleichung):

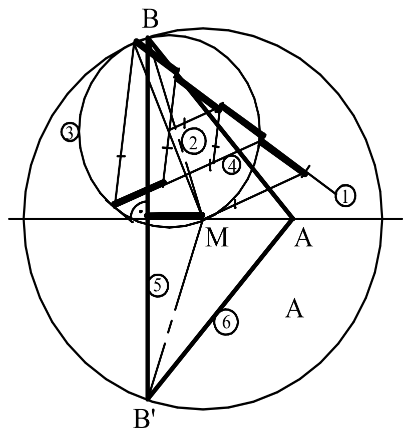
a) Aus a = r folgt $x = \frac{r^2 \pm \sqrt{r^2 + 8r^2}}{4r} = \frac{r}{2}$ bzw. – r, was sinnlos ist, da r als Streckenlänge definiert ist.

b) Aus x = a folgt $4a^2 + r^2 = \pm r\sqrt{r^2 + 8a^2}$; dies gilt genau dann, wenn a = 0 ist, d. h. es gilt: D = M = A

c) Aus a = 1,25 cm und $r^2 = 10\ \text{cm}^2$ folgt x = 1 cm bzw. das sinnlose Ergebnis x = - 5 cm. Hieraus findet man für den Kreispunkt B(-1|3). Die Kreistangente in B wird dargestellt durch – x + 3y = 10. Die Kreistangente schneidet die x-Achse in M*(- 10|0), damit ist $\left|\overline{M^*D}\right| = 9\ \text{cm}$. Nun kann man leicht nachrechnen, dass die Punkte M und M* die Strecke $\overline{DA}$ harmonisch teilen; also ist nach APOLLONIUS BM Winkelhalbierende.



d) Für a = 2 cm und r = 4 cm findet man $x = \left(2\sqrt{3} - 2\right)\text{cm}$. Dieser Wert wird mit dem Höhensatz konstruiert (siehe die Nummernfolge).



Aufgabe 1.1.6.3(7):

Beginnt man auf einem Kreis in A unter einem gewissen Winkel α zum Kreisradius, dann trifft der Weg den Kreis so, dass sein Winkel zum Kreisradius im neuen Kreisschnittpunkt ebenfalls α ist, weil es sich um ein gleichschenkeliges Dreieck handelt. Es wird gespiegelt und deshalb geht der weitere Weg abermals unter α zum Kreisradius weiter. Da auf diese Weise kongruente gleichschenkelige Dreiecke entstehen, sind deren Basen gleich groß.

Aufgabe 1.1.6.4((7):

Bei jeder Reflexion nach Aufgabe 1.1.6.3 wurd die Bewegungsrichtung um den Winkel 180^o - 2α gedreht. Soll sich der Gesamtweg schließen, so muss die Gesamtdrehung ein Vielfaches von 360^o sein. Deshalb gilt: $(180^o - 2\alpha)n = k\cdot 360^o$; Biespiele: n = 3, k = 1, α = 30^o oder n = 4, k = 1, α = 45^o oder n = 5, k = 2, α = 18^o.

Aufgabe 1.2.1.1(9):

a) $L_1 = a + b$, $L_2 = \sqrt{\left(a + \frac{1}{2}b\right)^2 + \left(\frac{3}{2}b\right)^2}$, $L_3 = \sqrt{a^2 + 4b^2}$

$L_1 < L_2$ <====> $a^2 + 2ab + b^2 < a^2 + ab + 2{,}5b^2$ <====> $a < 1{,}5b$

$L_1 < L_3$ <====> $a^2 + 2ab + b^2 < a^2 + 4b^2$ <====> $a < 1{,}5b$

$L_2 < L_3$ <====> $a^2 + ab + 2{,}5b^2 < a^2 + 4b^2$ <====> $a < 1{,}5b$

===> $L_1 < L_2 < L_3$ <====> $a < 1{,}5b$, $L_1 > L_2 > L_3$ <====> $a > 1{,}5b$, $L_1 = L_2 = L_3$ für $a = 1{,}5b$

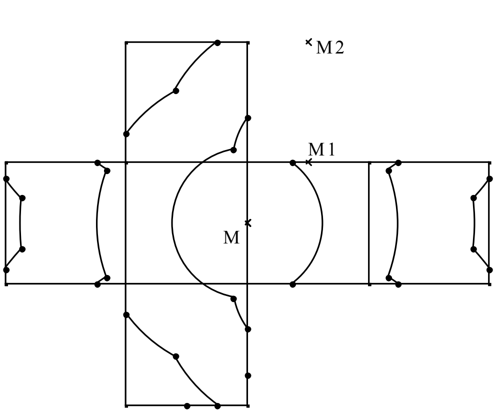
b) Allgemein : $L_1^2 = a^2 + (b+c)^2$; $L_2^2 = b^2 + (a+c)^2$; $L_3^2 = c^2 + (a+b)^2$
Die drei Längen sind die Längen der Hypotenusen von drei rechtwinkligen Dreiecken mit gleicher Summe s =a+b+c der Kathetenlängen.
Satz: Wenn zwei rechtwinklige Dreiecke die gleiche Summe s der Kathetenlängen haben, dann hat das Dreieck mit der kürzesten Kathete die längste Hypotenuse und auch die längste Kathete.
Beweis:
Dreieck 1 habe die Katheten: $a_1 = \frac{1}{2}s - x$, $b_1 = \frac{1}{2} s + x$ und die Hypotenuse c_1
Dreieck 2 habe die Katheten: $a_2 = \frac{1}{2}s - y$, $b_2 = \frac{1}{2}s + y$ und die Hypotenuse c_2 mit $y < x$ ===> $a_1 < a_2$
$c_1^2 = (\frac{1}{2} s - x)^2 + (\frac{1}{2} s + x)^2 = \frac{1}{2}s^2 + 2x^2$ $c_2^2 = \frac{1}{2} s^2 + 2y^2$ ===> $c_1 > c_2$ <====> $x > y$
====> $L_3 < L_2 < L_1$ Für a = 7, b = 10, c = 14 erhält man $L_1 = 25$, $L_2 = \sqrt{541}$ $L_3 = \sqrt{485}$

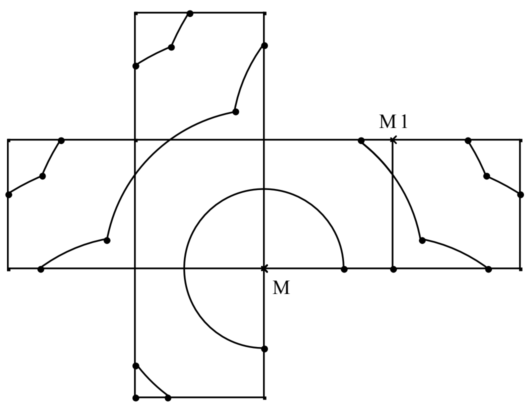
Aufgabe 1.2.2.1(7):

Als Lösung findet man eine Figur, die im Wesentlichen in der Skizze der Aufgabenstellung vorgegeben ist. Es fragt sich eigentlich nur, weshalb nicht die ganzen Kreisbögen inenrhalb einer Würfelfläche zu zeichnen sind: Als Grund fidnet man, dass die Punkte der nicht gezeichneten Bögenteile bei Wegen über andere Seitenfläche einen geringeren Abstand von M haben.

Aufgabe 1.2.2.2(7):

Die Kreisbögen wurden für die im Netz oben liegende Seitenfläche und für die rechts liegende Deckfläche um die Punkte M, M_1 und M_2 gezeichnet. Die beiden anderen Flächen kann man wegen der Symmetrie spiegelbildlich ergänzen. Die Schnittpunkte der Kreisbögen liegen auf der oben liegenden Seitenfläche symmetrisch zur Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{MM_1}$. Für diese Schnittpunkte sind die kürzesten Wege über zwei bzw. über drei Seitenflächen gleich lang.



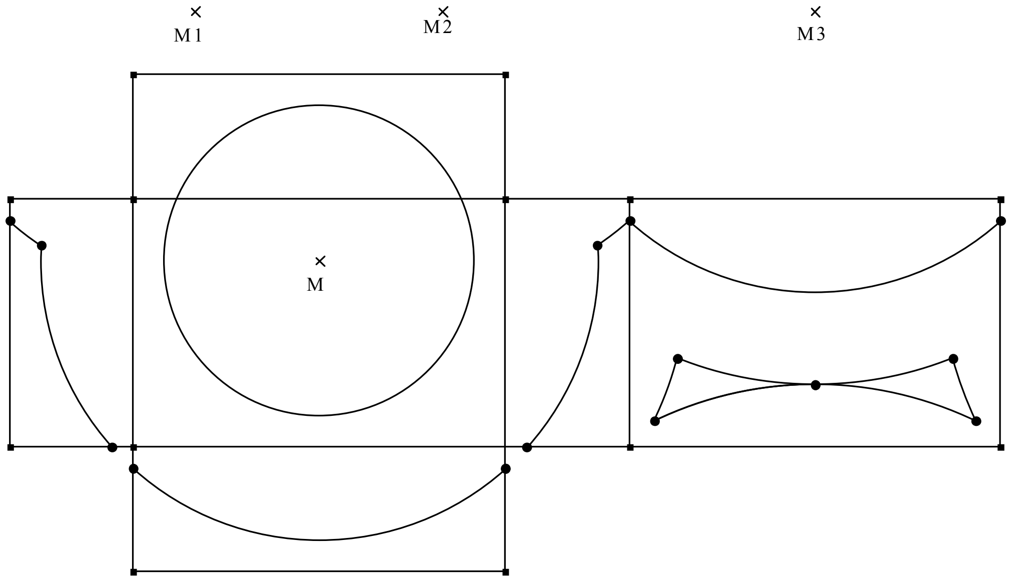


Da M in drei Seitenflächen liegt, können die Kreispunkte in diesen Flächen nur auf den Kreisbögen um M liegen. Die Kreise um M und M_1 bestimmen in der einen Seitenfläche die Lage der gesuchten Punkte, die anderen werden symmetrisch ergänzt.

Zur besseren Vorstellung empfiehlt es sich bei den Aufgaben 1.2.2.2 und 1.2.2.3, die Kreisbögen auf dem Netz zu konstruieren und das Netz dann zum Quader zu falten.

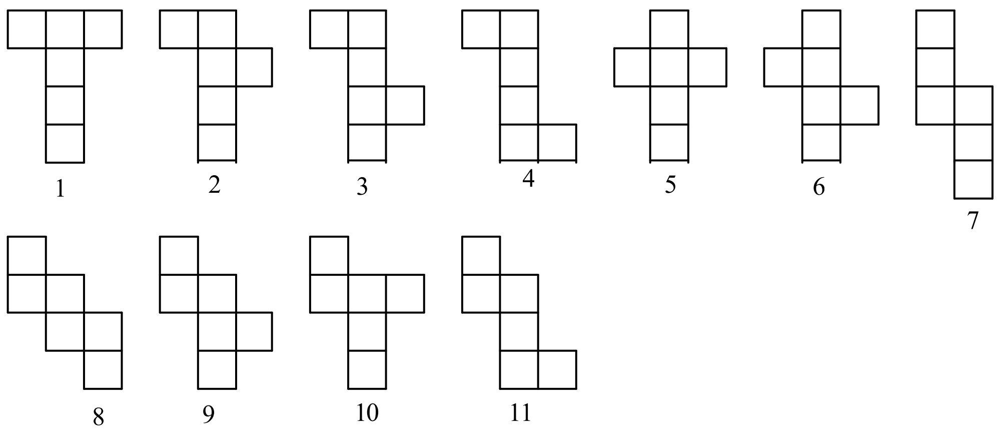
Aufgabe 1.2.2.3:

Der Oberflächenkreis mit dem Radius 6,1cm besteht aus zwei konkaven Kreisbogendreiecken. Vergrößert man den Radius weiter, so liegen in jedem dieser Dreiecke die zwei Punkte mit der größten Entfernung von M.



Aufgabe 1.2.2.4(6):

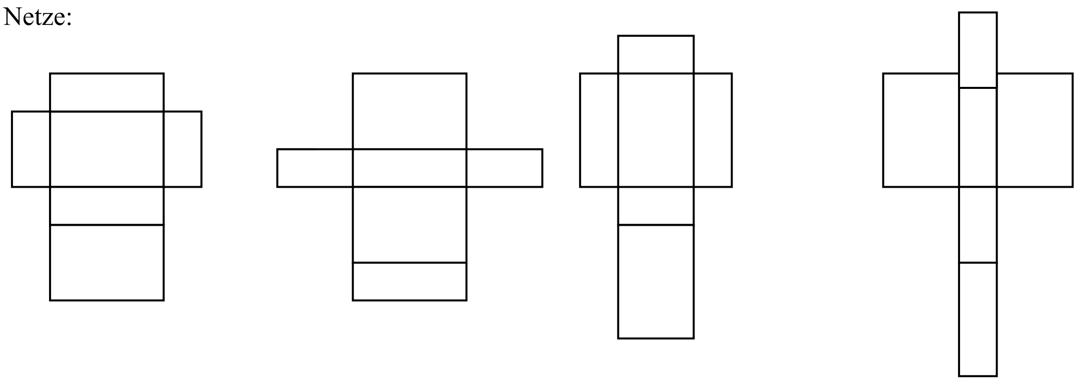
a) Es gibt 11 inkongruente Würfelnetze.

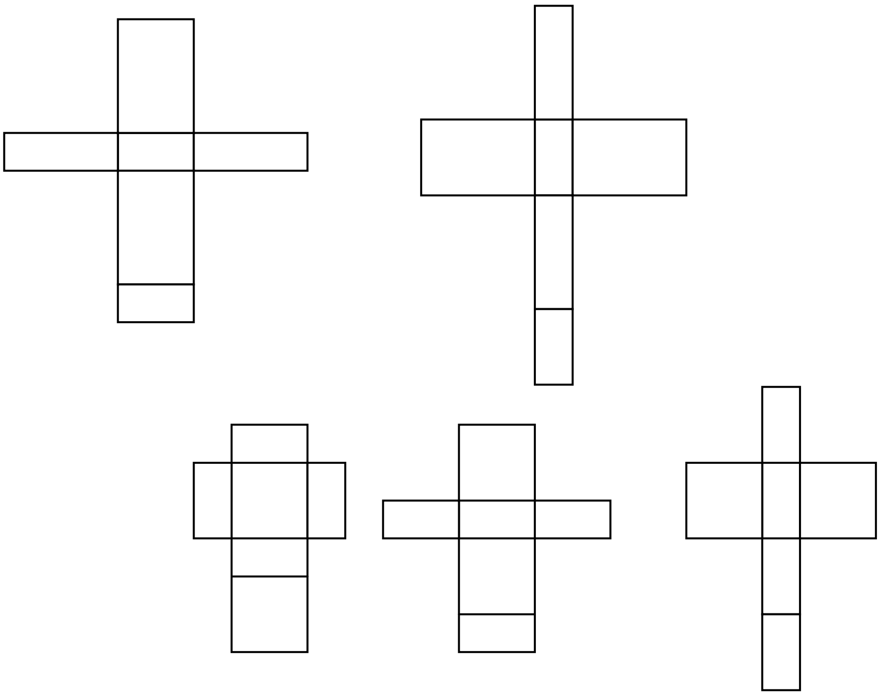


b) Es gibt 29 verschiedene Quadernetze für einen Quader mit quadratischer Grundfläche und 54 Quadernetze bei drei verschiedenen Seitenlängen des Quaders.

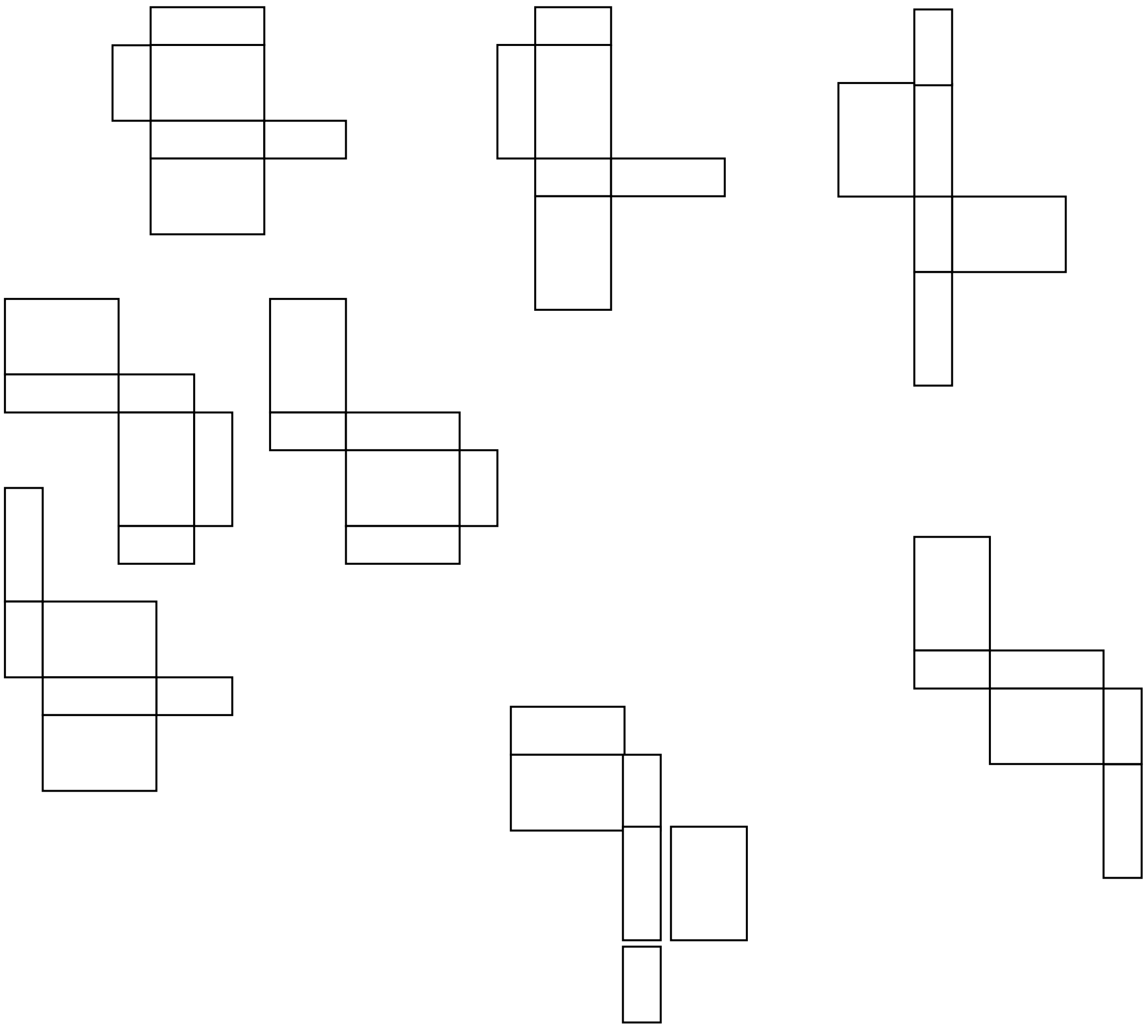
Beweis: Aus den vier punktsymmetrischen Netzen (Nummer 4, 6, 7, 8) erhält man beim allgemeinen Quader drei Quadernetze ,bei quadratischer Grundfläche nur zwei. Aus den restlichen sieben Würfelnetzen erhält man beim allgemeinen Quader sechs Quadernetze, bei quadratischer Grundfläche nur drei.

Die Netze 1, 3, 4, 5, 8, 9 und 10 ergeben beim Quader mit quadratischer Grundfläche 3 beim allgemeinen Quader 6 Netze:





Die Netze 2 , 6, 7 11 führen bei Quadern mit quadratischer Grundfläche auf 2, bei allgemeinen Quadern auf drei Netze:



Aufgabe 1.2.2.5(6):

Siehe die Lösung 8 von Aufgabe 1.2.2.4 Die anderen beiden erhält man, indem man entweder die oben liegende Seitenfläche unten rechts oder die unten liegende Seitenfläche oben links anfügt.

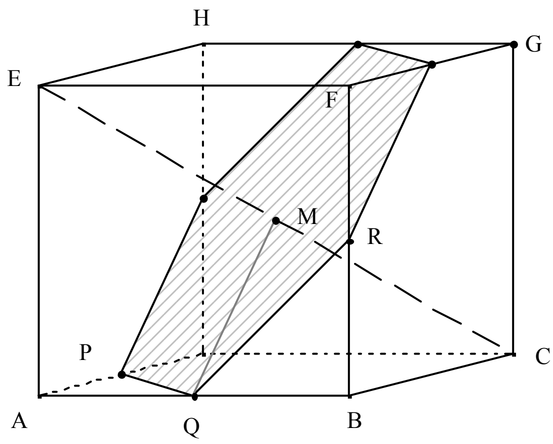
Aufgabe 1.2.2.6(5):

a) Der Umfang ist bei allen Würfelnetzen gleich 14a, da von den 24 Quadratseiten der sechs Seitenflächenquadrate genau zehn als fünf zusammenstoßende Paare im Innern liegen.

b) Bei einem Quader mit quadratischer Grundfläche (Seitenlängen: $a = b$, c mit $a < c$) können im Innern des Quadernetzes nur drei oder zwei Paare einer Länge zusammenliegen. Es gibt also nur zwei verschiedene Umfänge.
Minimaler Umfang : $(16a + 8c) – (4a + 6c) = 12a+ 2c$
Maximaler Umfang : $(16a + 8c) – (6a + 4c) = 10a +4c$
Wenn a größer als c ist, dann tauschen maximal und minimal die Plätze.

c) Beim Quader (Seitenlängen: $a < b < c$) kann es maximal zwölf verschiedene Umfänge geben; denn für die fünf im Innern zusammenstoßenden Kanten gibt es je nach dem gewählten Netz folgende Aufteilungen:
Entweder sind zwei Seitenlängen im Verhältnis 3 : 2
oder drei Seitenlängen im Verhältnis 3 : 1 : 1
oder 2 : 2 : 1.
Minimaler Umfang: $(8a + 8b + 8c) – (4b + 6c) = 8a + 4b + 2c$
Maximaler Umfang: $(8a + 8b + 8c) – (6a + 4b) = 2a + 4b + 8c$

Aufgabe 1.2.3.1(9):



Das gleichschenklige Dreieck PQR wird durch die Höhe vom Punkt Q auf die Seite PR in zwei Dreiecke mit den Winkeln 30°, 60° und 90° geteilt.
Beweis: $\left|\overline{PQ}\right| = \left|\overline{QR}\right| = ½a\sqrt{2}$

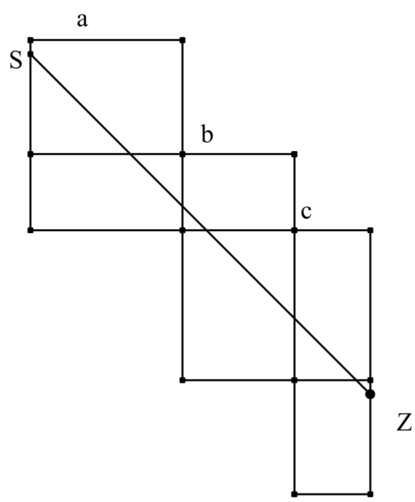
$\left|\overline{PR}\right| = ½\, a\sqrt{6}$ $\quad ½\left|\overline{PR}\right| : \left|\overline{QR}\right| = \sqrt{3} : 2$

Also ist $\angle PRQ = 30°$.
Der Mittelpunkt der Raumdiagonalen EC ist M.
$\left|\overline{QM}\right| = ½\, a\sqrt{2}$, $\left|\overline{QC}\right| = ½\, a\sqrt{5}$,
$\left|\overline{MC}\right| = ½\, a\sqrt{3}$

Also ist $\left|\overline{QM}\right|^2 + \left|\overline{MC}\right|^2 = \left|\overline{QC}\right|^2$ und damit

$\angle QMC = 90°$. Analog erhält man alle Winkel und alle Ecken des Sechsecks.

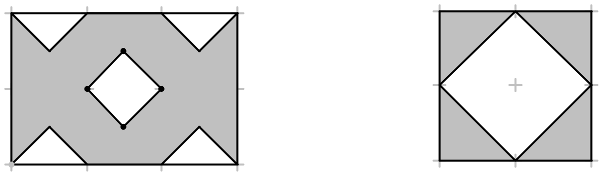
Aufgabe 1.2.3.2(9):

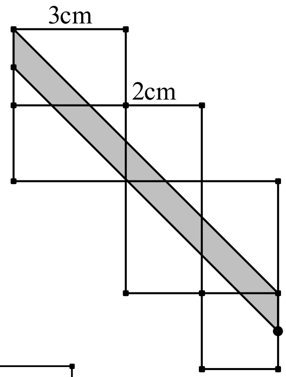


Da jeder kürzeste Rundweg von S nach Z = S auf einer Strecke liegen muss, die mit den geschnittenen Kanten einen Winkel von 45° bildet, muss die Strecke SZ mindestens die Länge $(a + b + c)\sqrt{2}$ besitzen. Aber die Lage von S auf einer Quaderkante ist stark eingeschränkt durch die Bedingung, dass SZ durch alle sechs Seitenflächen gehen muss.

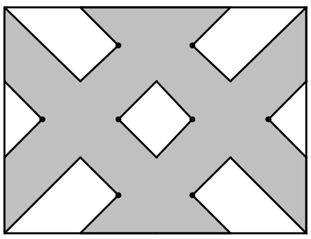
a) Falls $a = b$ und $c \geq 2a$, dann kann eine Strecke SZ nie alle sechs Seitenflächen schneiden.
Die Quadernetze sind etwa im Maßstab 1:2 gezeichnet.

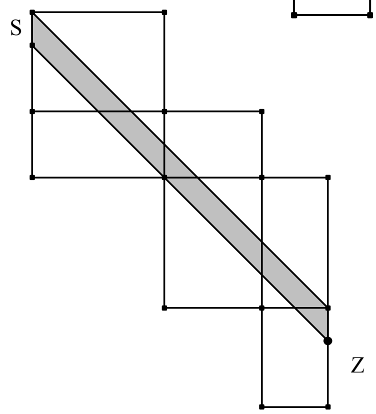
Die gesuchten Punkte liegen in dem schmalen Streifen auf dem Quadernetz. Aber aus Symmetriegründen sind auf den Seitenflächen (Rechteck und Quadrat) die folgenden Punkte für einen kürzesten Rundweg möglich.





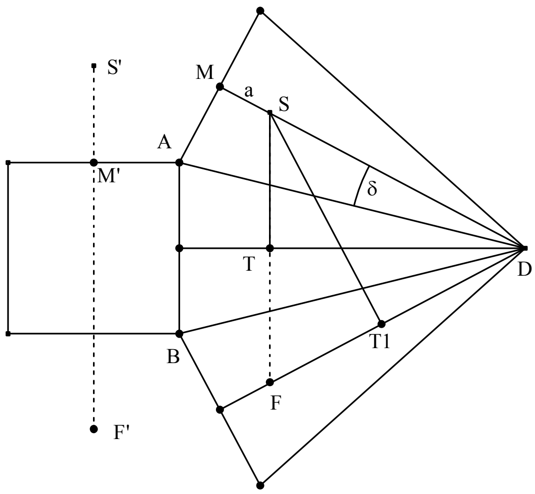
b) Nur für die Punkte innerhalb der grauen Fläche auf dem 4 x 3 Rechteck ist ein kürzester Rundweg der Länge L möglich.





Aufgabe 1.2.3.3(9 oder 10):

Zwei Weglängen sind zu vergleichen: Weg 1 über die Seitenflächen, Weg 2 über die Grundfläche. Zeichnung nicht maßstabsgetreu.



1. Trigonometrische Lösung:

Weglänge 1: $L_1 = 2\left|\overline{ST}\right|$ Setzt man $\delta = \angle MDA$, so folgt:

$\sin\delta = \frac{3}{\sqrt{45}}, \quad \cos\delta = \frac{6}{\sqrt{45}}$ □□□□□□===>

$\sin 2\delta = 2\sin\delta\cos\delta = 0{,}8$ ===>

$L_1(a) = 2(6 - a)\sin 2\delta = 9{,}6 - 1{,}6a$

$L_2(a) = 6 + 2a$ ===>

$L_1(0{,}5) = 8{,}8\text{cm}, \quad L_2(0{,}5) = 7\text{ cm}$

$L_1(2{,}5) = 5{,}6\text{cm}, \quad L_2(2{,}5) = 11\text{ cm}$

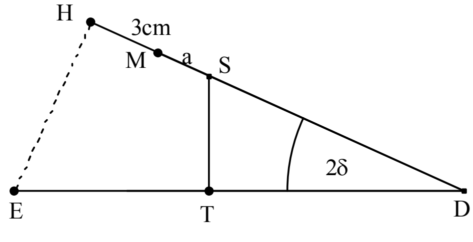
Beide Wege sind gleichlang für a = 1 ===> $L_1(1) = L_2(1) = 8\text{cm}$

Der Weg 1 liegt in einer Ebene, da die Strecke in der Ebene ABD parallel zur Strecke SF ist.

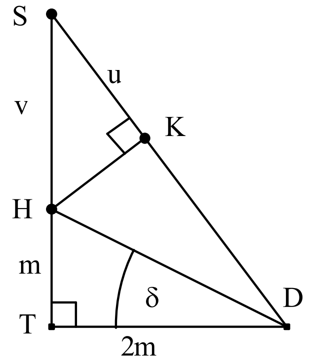
Für den Fall gleich langer Wege gibt es folgende einfache Konstruktion (siehe Figur rechts): Man verlängert DM um $\left|\overline{AM}\right| = 3\text{cm}$ über M hinaus zum Punkt H und wählt den Punkt E auf DT so, dass $\angle EHD = 90°$.

$\left|\overline{SH}\right| = \frac{1}{2} L_1(a)$ und $\left|\overline{ST}\right| = \frac{1}{2} L_2(a)$.

Die Winkelhalbierende von $\angle DEH$ schneidet DH



so, dass $|\overline{SH}| = |\overline{ST}|$.



2. Elementargeometrische Berechnung:
Man setzt: $v = |\overline{SH}|$, $u = |\overline{SK}|$, $|\overline{HT}| = |\overline{HK}| = m$,

$|\overline{TD}| = |\overline{KD}| = 2m$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke HKS und DTS folgt:

$(m + v) : 2m = u : m$

und damit $m + v = 2u$ (1)

Nach PYTHAGORAS gilt:

$(m+v)^2 + 4m^2 = (u + 2m)^2$ (2)

(1) eingesetzt in (2) ergibt: $u = \frac{4}{3}m$, $v = \frac{5}{3}m$. Damit hat man $u : v = 4 : 5 = |\overline{ST}| : |\overline{SD}|$. Da $|\overline{SD}| = 6 - a$ ist, folgt $|\overline{ST}| = 4{,}8 - 0{,}8a$.

Aufgabe 1.2.3.4(9 oder 10):

Siehe die Figur zur Lösung der Aufgabe 1.2.3.3: Länge L des Rundwegs: $L = 2\ ST_1$

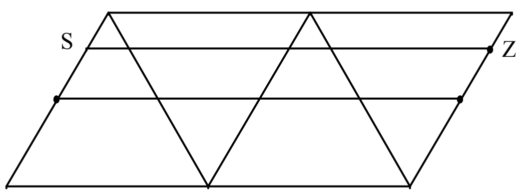
Man kann nun analog zur Aufgabe 1.2.3.3 für $|\overline{MD}| = 9$ zunächst das Verhältnis von $|\overline{ST}| : |\overline{SD}|$ berechnen.

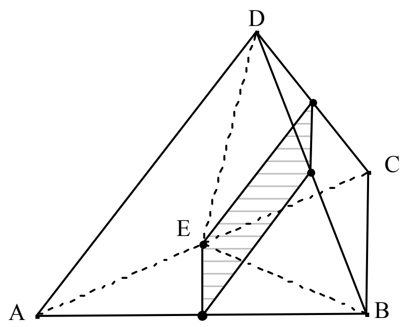
Man erhält $u : v = 3 : 5 = |\overline{ST}| : |\overline{SD}|$.

Wiederholt man das gleiche Verfahren für das Dreieck ST_1D, so erhält man $|\overline{ST_1}| : |\overline{SD}| = 24 : 25$. Also ist die Länge des Rundwegs $L = 1{,}92\ (9 - a) = 17{,}28 - 1{,}92a$.

Aufgabe 1.2.3.5 (9):

Das zweite Netz hat die Form eines gleichseitigen Dreiecks mit den Mittelparallelen.



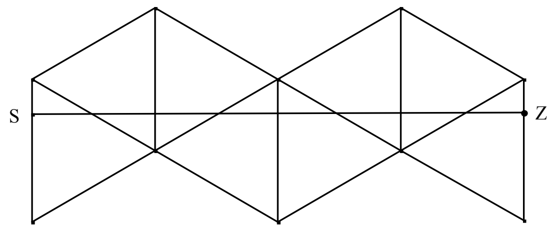


Man wählt einen beliebigen Punkt S auf einer Seitenkante als Startpunkt, der sich nach dem Falten mit dem Zielpunkt Z deckt. SZ ist immer parallel zu einer der drei Mittelparallelen einer Seitenfläche und hat die Länge 2a. Wählt man den Startpunkt S auf einer Mittelparallelen, so ist der Rundweg ein Quadrat, da alle Strecken des Rundwegs die Länge ½a haben und die Diagonalen gleich der Strecke zwischen den Mittelpunkten gegenüberliegender Seiten sind. Diese hat die Länge $a\sqrt{2}$.

Durch die Ecken des Tetraeders gibt es keinen kürzesten Rundweg, durch die Punkte auf den Kanten gibt es zwei und durch jeden Punkt im Innern einer Seitenfläche gibt es drei Rundwege.

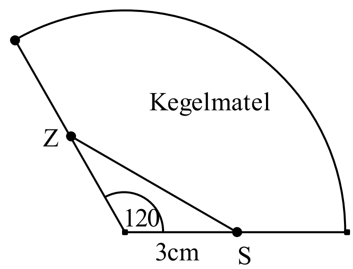
Aufgabe 1.2.3.6 (9):

Verschiebt man SZ so, dass alle acht Flächen durchlaufen werden, so erhält man alle kürzesten Rundwege. Sie haben die Länge $2a\sqrt{3}$ und verlaufen parallel zu den Höhen der Seitenflächen des Oktaeders.
Teilt der Startpunkt S die Seitenkante im Verhältnis 1:3, so haben alle Strecken des Rundwegs die Länge ½ $a\sqrt{3}$. Sie bilden ein gleichseitiges, aber nicht gleichwinkliges Achteck, das auch nicht in einer Ebene liegt.



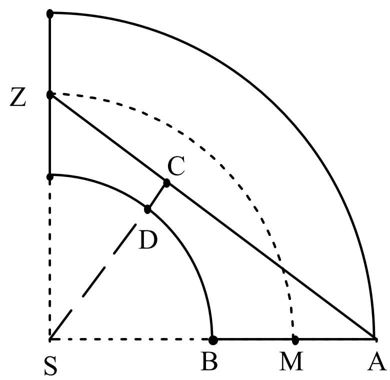
Aufgabe 1.2.3.7 (10):

Der Kegelmantel ist ein Kreissektor mit dem Zentriwinkel 120°. Man erhält mit dem Kosinussatz:
$|\overline{ZS}| = 3\sqrt{3}$ cm $\approx 5{,}2$ cm
Der Käfer nähert sich der Spitze im Mittelpunkt der Strecke ZS auf 1,5 cm. Der Weg des Käfers ist keine Ellipse; denn im Punkt S = Z bilden die Wege einen Winkel von 60°, Der Weg ist also kein Kegelschnitt. Daher kann der Weg auch nicht in einer Ebene liegen.



Aufgabe 1.2.3.8 (9):

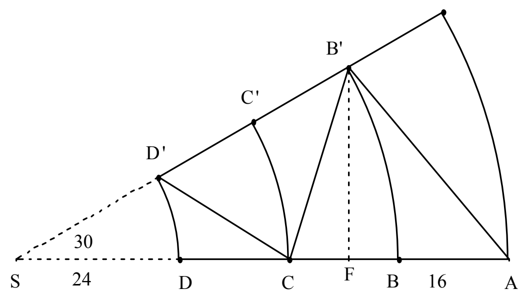
a) Man ergänzt den Kegelstumpf zum Kegel mit der Spitze S. Denkt man sich die Mantelfläche aus Papier und schneidet diese längs der Mantellinie AB auf, so erhält man einen Kreisringsektor mit dem Zentriwinkel 90°.
Beweis: Aus R : r = 2 : 1 folgt, dass B der Mittelpunkt von AS ist.
Der Käfer will zum Zielpunkt Z krabbeln. Der kürzeste Weg ist die Strecke $\overline{AZ}$.
$|\overline{AS}| = 48$ cm, $|\overline{SZ}| = 36$ cm , $|\overline{AZ}| = 60$ cm.



b) Dieser Weg hat aus der Sicht des Käfers den Nachteil, dass der Punkt C des Weges wesentlich höher über der Grundfläche liegt als der Punkt M. $|\overline{SC}| = \left(|\overline{AS}| \cdot |\overline{SZ}|\right) : |\overline{AZ}| = 28{,}8\,\text{cm}$ Hieraus folgt $|\overline{DC}| = 4{,}8$ cm

Aufgabe 1.2.3.9 (9):

Aus $|\overline{SD}| : |\overline{SA}| = r : R = 1 : 3$ folgt
$|\overline{SA}| = 3\,|\overline{SD}|$ und damit $|\overline{SD}| + |\overline{DA}| = 3\,|\overline{SD}|$,
also $|\overline{SD}| = 24$. $|\overline{B'F}| = ½\,|\overline{SB'}| = 28$,
$|\overline{SF}| = 28\sqrt{3}$.



$$|\overline{B'A}|^2 = |\overline{B'A}|^2 + |\overline{FA}|^2 = 28^2 + \left(72 - 28\sqrt{3}\right)^2 = 8320 - 4032\sqrt{3}$$. Es folgt $|\overline{B'A}| \approx 36{,}56$.

Analog: $\left|\overline{B'C}\right|^2 = 20^2 + (56 - 20\sqrt{3})^2 = 4736 - 2240\sqrt{3}$. Es folgt $\left|\overline{B'C}\right| \approx 29{,}26$.

$\left|\overline{D'C}\right|^2 = 12^2 + (40 - 12\sqrt{3})^2 = 2176 - 960\sqrt{3}$. Es folgt $\left|\overline{D'C}\right| \approx 22{,}65$.

Die Wegstrecken für eine Umrundung werden immer kürzer und daher auch immer steiler.

Aufgabe 1.2.3.10 (9):

Spiegelt man den abgewickelten Mantel am abgewickelten Kreis, dann erhält man die Entfernung der beiden Käfer als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten 12 cm und 16 cm. Die kürzeste Entfernung der beiden Käfer beträgt 20cm.

Aufgabe 1.2.3.11(9):

r sei der Grundkreisradius, h die Zylinderhöhe. Der Weg über die Grundfläche beträgt dann $L_1 = 2r + h$. Wickelt man den Zylinder ab, und lässt den Käfer über den halben Mantel hoch laufen, so legt er zurück:

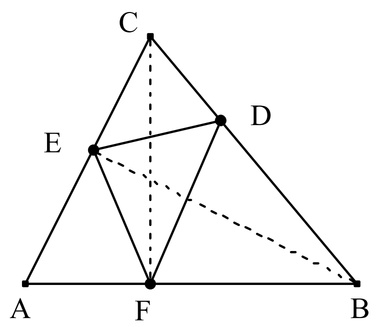
$L_2 = \sqrt{(r\pi)^2 + h^2}$

Es ist nicht entshceidbar, welcher Weg der kürzere ist; denn durch quadrieren der beiden Weglängen und einigen Umformungen erhält man für h und r die folgenden drei Möglichkeiten

$$h \;\substack{<\\=\\>}\; r \cdot \frac{\pi^2 - 4}{4} = 1{,}46...r$$

Aufgabe 1.3.2.1(10):

a) Beweis, dass die Dreiecke AFD und ABC ähnlich sind:
Da E und F Fußpunkte der Höhen h_b und h_c sind, folgt:
Die Dreiecke ABE und ACF sind ähnlich (w,w), d. h.
$\left|\overline{AE}\right| : \left|\overline{AF}\right| = \left|\overline{AB}\right| : \left|\overline{AC}\right|$, also sind die Dreiecke AFE und ACB ähnlich (w, Verhältnis der diesen Winkel einschließenden Seiten). Analoges gilt für die anderen Dreiecke.



b) Es folgt weiterhin: $\angle AFE = \angle BFD = \gamma$ und hieraus $\angle CFD = 90° - \gamma = \angle CFE$; $\left|\overline{AE}\right| = \left|\overline{AB}\right| \cos\alpha$, $\left|\overline{AF}\right| = \left|\overline{AC}\right| \cos\alpha$. Der Ähnlichkeitsfaktor ist also cos α.

c) Aus dem obigen Beweis folgt: $\left|\overline{EF}\right| = a \cos \alpha$ usw. also $u = a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma$

d) Die Höhe durch C im Dreieck F'F"C zerlegt das Dreieck in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke (siehe Figur zum FAGNANO-Dreieck). Deshalb gilt: $\frac{1}{2}\left|\overline{F'F''}\right| = \left|\overline{CF'}\right| \sin \gamma = h_c \sin \gamma$. Hieraus folgt $u = 2\, b \sin \alpha \sin \gamma$. Analog gilt $u = 2a \sin \beta \sin \gamma = 2c \sin \alpha \sin \beta$.

e) Zu zeigen ist: $2c \sin \alpha \sin\beta = a \cos \alpha + b \cos\beta + c \cos \gamma$
1. Schritt: $a \cos \alpha + b \cos \beta = c(\sin \alpha \cos \alpha + \sin \beta \cos \beta) : \sin \gamma = ½\, c\, (\sin 2\alpha + \sin 2\beta) : \sin \gamma$
$= [c \sin (\alpha + \beta) \cos (\alpha - \beta)] : \sin \gamma = c \cos(\alpha - \beta)$
2. Schritt: $2c \sin \alpha \sin \beta = c\, [\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha+ \beta)] = a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma$
Verwendete Formeln: Im Dreieck ABC gilt: $a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$

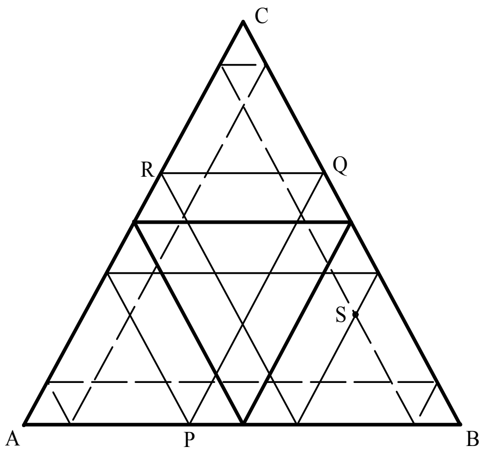
Für beliebige Winkel gilt:

$\sin(\alpha + \beta) = \sin \gamma$, $\cos(\alpha + \beta) = -\cos \gamma$,
$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$
$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$
$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha+\beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$

Aufgabe 1.3.2.2(8):

a) Der Junge stand auf einem beliebigen Punkt einer Seite des Höhenfußpunktdreiecks. Die Länge des Rundlaufs ist 1,5a, wobei a die Seite des gleichseitigen Dreiecks ist.

b) Der zweifache Rundlauf kann auf einem beliebigen Punkt S starten. Es gibt sechs verschiedene Möglichkeiten, da man parallel zu jeder Dreiecksseite in jeder Richtung starten kann. Da $|\overline{PQ}| + |\overline{QR}| = a$ ist, ist die Länge des Rundlaufs immer gleich 3a und dies muss der kürzeste sein. Liegt der Startpunkt S auf einer Symmetrieachse, so gibt es nur vier Möglichkeiten. Liegt S im Schnittpunkt der Symmetrieachsen, so gibt es nur noch zwei Möglichkeiten. Der Weg besteht dann aus drei kongruenten, gleichseitigen Dreiecken.



Aufgabe 1.3.3.1(10):

Zu konstruieren ist ein Kreis durch den Punkt P, der die beiden Schenkel berührt. Auf diesem Kreis muss auch der Spiegelpunkt P' von P an der Winkelhalbierenden des Winkels α liegen. Die Gerade PP' schneide den Schenkel des Winkels α in T. Der Berührpunkt des Kreises mit diesem Winkelschenkel sei D. Nach dem Tangenten-Sekantensatz gilt: $|\overline{TD}|^2 = |\overline{PT}||\overline{P'T}|$. Die Strecke DT lässt sich konstruieren z. B. mit Hilfe des Höhensatzes im rechtwinkligen Dreieck.

Aufgabe 1.3.3.2(8):

a) $|\overline{AB}| + |\overline{BC}| + |\overline{CA}| = |\overline{AB}| + |\overline{BP}| + |\overline{PC}| + |\overline{CA}| = |\overline{AB}| + |\overline{BD}| + |\overline{CE}| + |\overline{CA}| = |\overline{AD}| + |\overline{AE}|$

b) $\angle CBM = \beta + \frac{1}{2}(90° - \beta) = \frac{1}{2}(90° + \beta)$, $\angle BCM = \frac{1}{2}(90° + \gamma)$
$\angle CBM = 360° - (\alpha +$ □□□ $\frac{1}{2}(90° + \beta) + \frac{1}{2}(90° + \gamma) = 90° - \frac{1}{2}\alpha$

Aufgabe 1.3.4.1(9):

Im spitzwinkligen Dreieck gibt es drei Möglichkeiten für ein einbeschriebenes Quadrat, je nachdem auf welcher Dreiecksseite eine Quadratseite liegt. D und E liegen auf der Strecke AB.

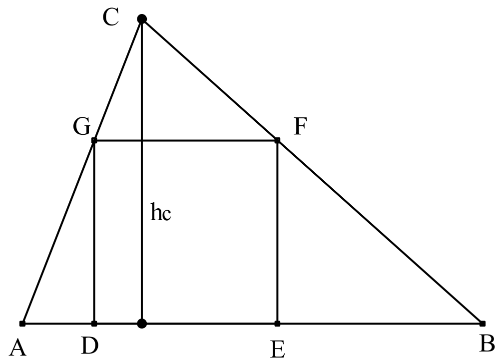
Bezeichnungen : $b = |\overline{AC}|$, $c = |\overline{AB}|$,

$x = |\overline{GD}| = |\overline{GF}|$, $y = |\overline{AG}|$

$|\overline{GF}| : |\overline{AB}| = |\overline{CG}| : |\overline{AC}|$

Hieraus folgt: $bx = c(b - y)$
oder $x = c - cy/b$ (1)

$|\overline{GD}| : h_c = |\overline{AG}| : |\overline{AC}|$ d. h.



$yh_c = xb$ oder $y/b = x/h_c$ (2)

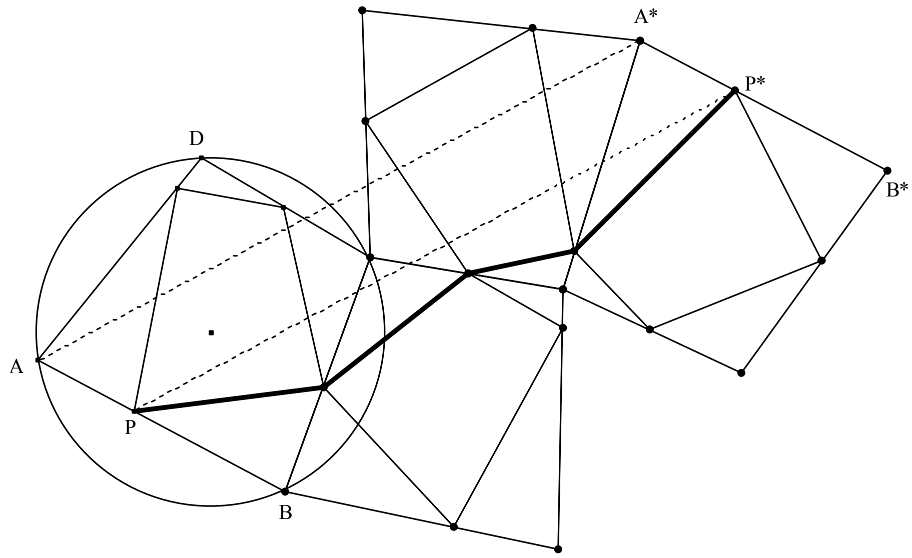
(2) in (1) eingesetzt, ergibt: $\frac{2ch_c}{c+h_c} = \frac{2F}{c+h_c}$

Analoges gilt für die anderen Dreiecksseiten. x wird minimal für das Maximum von $a + h_a$, $b + h_b$ oder $c + h_c$

Lemma: Gegeben sind vier positive Zahlen $u < v < x < y$. Wenn $uy = vx$, dann folgt: $v + x < u + y$ *Indirekter Beweis:* Annahme: $v + x = u + y$ dann ist $v - u = y - x = d > 0$ und somit $u = v - d$, $y = x + d$, also $uy = vx + vd - dx - d^2 = vx - d(x - v + d) < vx$. D. i. ein Widerspruch. Also gilt:
Das Quadrat über der kleinsten Seite eines spitzwinkligen Dreiecks hat auch den kleinsten Umfang.

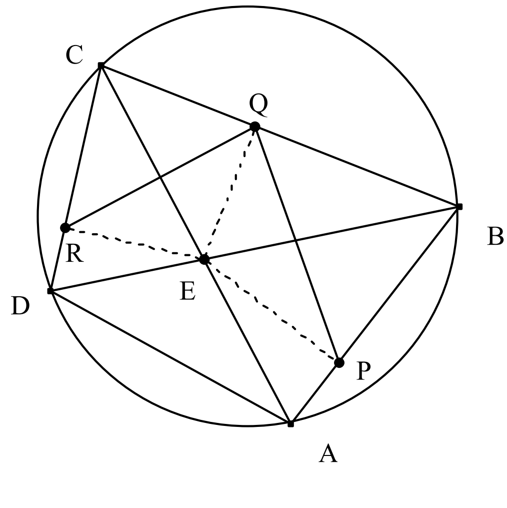
Falls das Dreieck rechtwinklig ist, kann man nur zwei verschiedene Quadrate einbeschreiben. Das Quadrat mit der Quadratseite auf der Hypotenuse hat den kleineren Umfang. Falls das Dreieck stumpfwinklig ist, gibt es nur ein Quadrat.

Aufgabe 1.3.4.2(8):



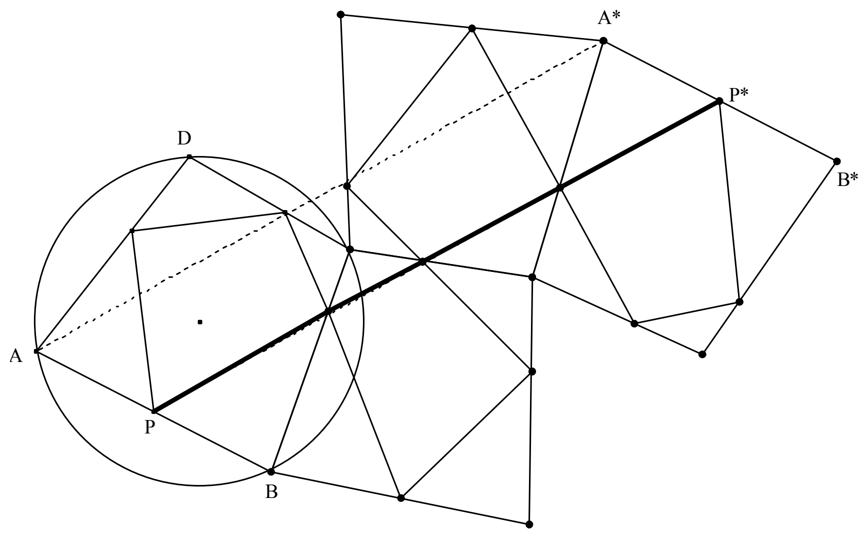
Spiegelt man das Sehnenviereck dreimal nacheinander an den aufeinander folgenden Seiten BC, CD und DA, so sind die Seiten AB und A*B* parallel. Der Umfang eines beliebigen Vierecks PQRS wird ein Streckenzug von P nach P*, wobei die Strecke PP* immer die gleiche Länge wie die Strecke AA* besitzt und parallel zu dieser verläuft.
Man erhält einen geradlinigen Streckenzug und damit den minimalen Umfang, wenn jeder Winkel des Vierecks PQRS durch das Lot zu jeder Seite halbiert wird.

Zu *beweisen* ist also noch, dass die Lote vom Diagonalenschnittpunkt E auf die Seiten die Winkel des Vierecks PQRS halbieren. Bei der Spiegelung des Vierecks PQRS an der Seite BC des Sehnenvierecks ABCD liegen dann PQ und das Spiegelbild von QR auf einer Geraden. Analog für die nächsten Spiegelungen.

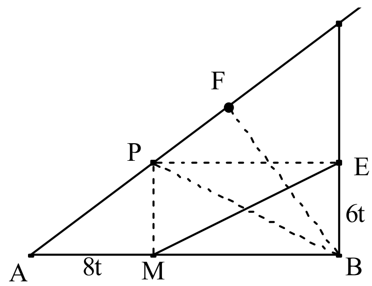


Man beweist dies dadurch, dass gilt
$\angle RQE = \angle EQP$:
Die Vierecke EQCR und EPBQ sind wegen der rechten Winkel ebenfalls Sehnenvierecke. Wendet man mehrfach den Peripheriewinkelsatz an, so findet man: $\angle RQE = \angle RCE = \angle DCA = \angle DBA = \angle EBP = \angle EQB$
Analog verfährt man für alle anderen Winkel des Vierecks PQRS.

Die Lösung:

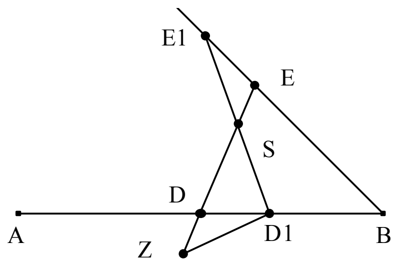


Aufgabe 1.3.4.3(9):



Zum Zeitpunkt t befinde sich Max im Punkt M auf der Strecke AB und Emil im Punkt E mit AM = 8t und BE = 6t mit ME als Entfernung. Im Rechteck MBEP gilt: $|\overline{ME}| = |\overline{BP}|$. Im Dreieck AMP ist $\angle AMP = 90°$ und $|\overline{AM}| : |\overline{MP}|$ = 8 : 6, d. h.: Alle Dreiecke AMP sind ähnlich ===> P liegt auf einer Geraden durch A, für die nach PYTHAGORAS gilt $|\overline{AP}|$ =10t. Die kürzeste Entfernung ME erhält man, wenn BP das Lot auf die Gerade AP ist also BF. Die Dreiecke APM und AFB sind ähnlich; deshalb gilt: $|\overline{BF}| : |\overline{AB}|$ = 6t : 10t. Hieraus folgt $|\overline{BF}|$ = 1200 m, $|\overline{AF}|$ = 1600 m = 8t also t = 200 s.

Aufgabe 1.3.4.4(9):



Die Entfernung ist am kürzesten, wenn $|\overline{AD}| = |\overline{DB}| = |\overline{BE}|$ ist. Dies tritt ein für t = 125 s.

Die kleinste Entfernung ist dann:

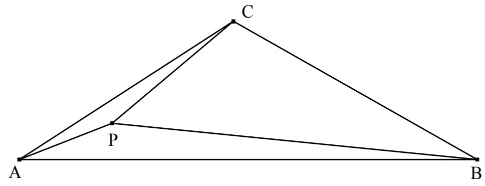
$\sqrt{2-\sqrt{2}}$ km ≈ 765 m

Beweis: Das Dreieck DBE ist gleichschenklig.
Etwas später befindet sich Max im Punkt D_1 und Emil im Punkt E_1. Der Schnittpunkt von ED und E_1D_1 ist S. Man fügt nun das Dreieck SEE_1 an die Strecke DD_1 so an, dass E auf D, E_1 auf E und S auf Z liegt mit Z auf der Geraden DE. Also gilt:
$|\overline{ED}| = |\overline{ES}| + |\overline{SD}| = |\overline{ZD}| + |\overline{DS}| = |\overline{ZS}| < |\overline{ZD_1}| + |\overline{D_1S}| = |\overline{E_1S}| + |\overline{SD_1}| = |\overline{E_1D_1}|$

Falls D_1 auf der Strecke AD liegt, verläuft der Beweis anlog.

Für $|\overline{BD}| = |\overline{BE}|$ wird der Umfang des Dreiecks BDE minimal, aber die Fläche des Dreiecks maximal.

Aufgabe 2.1.1(8):

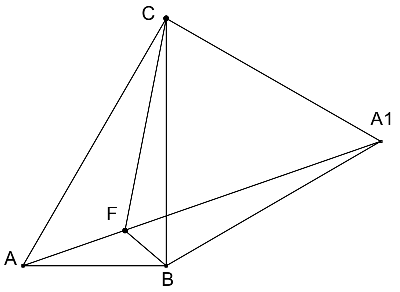


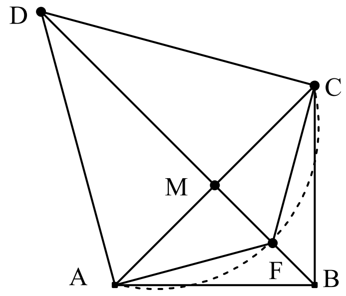
Die Folgerung, dass es im Dreieck BPC einen Minimalpunkt F geben muss, ist nur richtig, wenn alle Winkel dieses Dreiecks kleiner als 120° sind. Der Winkel PCB könnte noch größer als 120° sein.

Dann wäre aber $|\overline{BC}| < |\overline{PB}|$ und $|\overline{AC}| < |\overline{AP}| + |\overline{CP}|$

und damit $\left|\overline{AC}\right| + \left|\overline{BC}\right| < \left|\overline{AP}\right| + \left|\overline{BP}\right| + \left|\overline{CP}\right|$.

Aufgabe 2.2.1(9):





a1) Man errichtet über BC ein gleichseitiges Dreieck BCA_1.Dann gilt: $\left|\overline{AF}\right| + \left|\overline{BF}\right| + \left|\overline{CF}\right| = \left|\overline{AA_1}\right|$. Das Dreieck AA_1C ist rechtwinklig, deshalb gilt: $\left|\overline{AA_1}\right|^2 = \left|\overline{AC}\right|^2 + \left|\overline{CA_1}\right|^2 = b^2 + \frac{3}{4} b^2$; deshalb ist $\left|\overline{AA_1}\right| = \frac{b}{2}\sqrt{7}$

a2) Man errichtet über AC ein gleichseitiges Dreick ACD. Dann gilt :
$\left|\overline{AF}\right| + \left|\overline{BF}\right| + \left|\overline{CF}\right| = \left|\overline{DF}\right| + \left|\overline{BF}\right| = \left|\overline{BD}\right| = \left|\overline{BM}\right| + \left|\overline{MD}\right| = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}b\sqrt{3} = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3})b$

b) $AF = BF = CF = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3} \cdot \frac{c}{2}\sqrt{3} = \frac{c}{3}\sqrt{3}$ ===> Gesamtlänge : $c\sqrt{3}$

c)

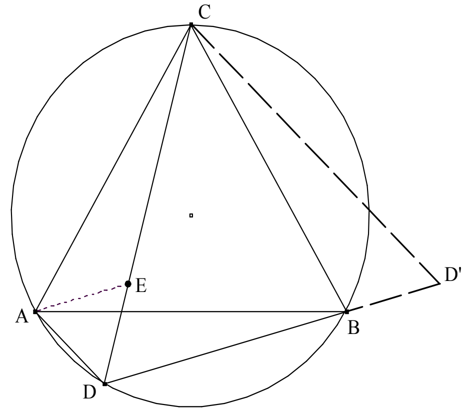
	ohne Hilfspunkt	mit Fermatpunkt	Ersparnis
a1)	$(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3})b$	$\frac{1}{2}\sqrt{7}\ b$	3,16%
a2)	$\sqrt{2}\ b$	$(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3})b$	3,4 %
b)	2c	$\sqrt{3}\ c$	13,4 %

Die Ersparnis beim gleichseitigen Dreieck ist die größte, die mit einem FERMATpunkt erreichbar ist.

Aufgabe 2.2.2(10):

Aus der FERMATfigur folgen sofort die drei Gleichungen:
$L^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma + 60°) = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha + 60°) = c^2 + a^2 - 2ca\cos(\beta + 60°)$
$a^2+b^2 - 2ab\cos(\gamma + 60°) = a^2+b^2 - 2ab\,[\cos\gamma\cos 60° - \sin\gamma\sin 60°] = a^2+b^2 - ab\cos\gamma + \sqrt{3}\,ab\sin\gamma =$
$= a^2+b^2 - \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2) + \sqrt{3}\,bc\sin\alpha = b^2 + c^2 - \frac{1}{2}(b^2+c^2 - a^2) + \sqrt{3}\,bc\sin\alpha = b^2+c^2 - 2bc\cos(\alpha + 60°)$
Analog für die weiteren Äquivalenzen.

Aufgabe 2.2.3(9):



Erster Beweis:
Nach dem Peripheriewinkelsatz sind die Winkel bei A und D 60° groß. Man dreht Dreieck ADB um A um 60° im Gegenuhrzeigersinn und erhält als Bild das Dreieck AEC, da nach dem Umfangswinkelsatz im Kreis gilt: $\angle ABD = \angle ACD$. Das Dreieck AED ist gleichseitig. Hieraus folgt
$\left|\overline{AE}\right| = \left|\overline{AD}\right|$, $\left|\overline{EC}\right| = \left|\overline{BD}\right|$ und damit
$\left|\overline{AD}\right| + \left|\overline{BD}\right| = \left|\overline{CD}\right|$.

Zweiter Beweis: Man dreht Dreieck CAD um C im

Gegenuhrzeigersinn um 60° und erhält Dreieck CBD'. Also ist $\angle DCD' = 60°$. Der Punkt B liegt auf der Strecke DD', da im Sehnenviereck ADBC gilt:

$\angle DAC + \angle CBD = 180°$

Das Dreieck DCD' ist also gleichseitig und deshalb $\left|\overline{AD}\right| + \left|\overline{BD}\right| = \left|\overline{DD'}\right| = \left|\overline{CD}\right|$.

Dritter Beweis: **Satz von PTOLEMÄUS:**
Im Sehnenviereck ist die Summe der Produkte gegenüberliegender Seiten gleich dem Produkt der Diagonalen. Deshalb gilt:

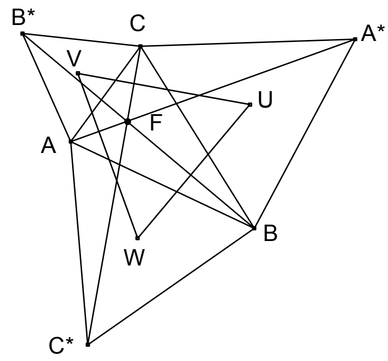
$\left|\overline{AD}\right| \cdot \left|\overline{BC}\right| + \left|\overline{BD}\right| \cdot \left|\overline{AC}\right| = \left|\overline{AB}\right| \cdot \left|\overline{DC}\right|$

Dividiert man diese Gleichung durch $\left|\overline{AB}\right| = \left|\overline{AC}\right| = \left|\overline{BC}\right|$, so folgt $\left|\overline{AD}\right| + \left|\overline{BD}\right| = \left|\overline{CD}\right|$.

Aufgabe 2.2.4(8):

a) Man zeigt, dass alle drei Seiten gleich groß sind. $\angle UBW = \angle ABA^* = \beta + 60°$

Eine Drehstreckung um B mit dem Winkel von 30° und mit dem Streckungsfaktor $\sqrt{3}$ bringt das Dreieck UBW mit dem Dreieck AA*B zur Deckung. D. h. $\left|\overline{AA^*}\right| = \left|\overline{UW}\right| \sqrt{3}$



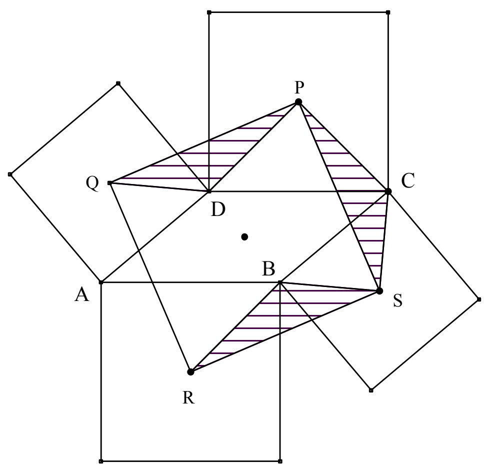
Analog : $\left|\overline{CC^*}\right| = \left|\overline{VW^*}\right| \sqrt{3}$,

$\left|\overline{BB^*}\right| = \left|\overline{UW}\right| \sqrt{3}$

Da $\left|\overline{AA^*}\right| = \left|\overline{BB^*}\right| = \left|\overline{CC^*}\right|$ folgt:

Das Dreieck UVW ist gleichseitig.

b) Die drei schraffierten Dreiecke sind kongruent, da die stumpfen Winkel gleich groß sind.



Dreht man Dreieck RBS um S um 90° im Uhrzeigersinn und Dreieck PDQ um P um 90° gegen den Uhrzeigersinn, so decken sich alle schraffierten Dreiecke. ===>Viereck PQRS ist ein Quadrat.

Aufgabe 2.2.5(8):

a) **Satz von VIVIANI:** Die Summe der Lotstrecken von einem beliebigen Punkt P im Innern eines gleichseitigen Dreiecks auf die Seiten des Dreiecks ist für alle Punkte P gleich und zwar gleich der Höhe des gleichseitigen Dreiecks.

Beweis: Die Lotstrecken von P auf die Seiten des Dreiecks ABC seien u, v und w

===>Fläche des Dreiecks ABC = ½ a(u+v+w) = ½ ah ===> Behauptung

b) Im gleichschenkligen Dreieck ABC mit $c < a = b$ (oder $\gamma \leq 60°$) gilt für jeden Punkt P im Innern und auf dem Umfang: Die Summe au + bv + cw ist konstant und zwar gleich der doppelten Dreiecksfläche. Es gilt also: Die Summe u + v + w wird am kleinsten für w = 0. Damit gilt: Für alle Punkte P auf der Seite AB ist die Summe der Lote gleich groß und sie hat den kleinsten Wert.

c) In allen anderen Dreiecken hat der Punkt auf der Ecke des größten Winkels die minimale Lotstreckensumme. (Zwei Lotstrecken haben die Länge 0)

Aufgabe 2.2.6(8):

Die Seiten des gleichseitigen Dreiecks müssen auf den Strecken FA, FB, FC senkrecht stehen, wobei F der FERMATpunkt ist:

Beweis: Man zeichnet ein beliebiges, gleichseitiges, umbeschriebenes Dreieck PQR und fällt die Lote FA*, FB* und FC* auf die Seiten des Dreiecks PQR.

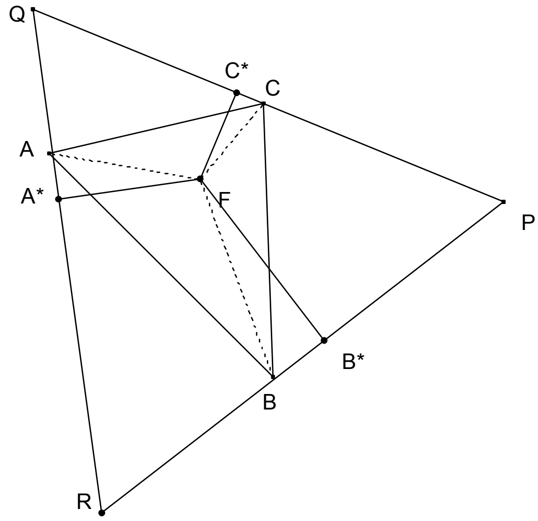
Die Summe s dieser Lotstrecken ist gleich der Höhe des gleichseitigen Dreiecks. (Satz von VIVIANI) ===> die Fläche des Dreiecks PQR wächst quadratisch mit der Länge s. Nun gilt:

$\left|\overline{FA*}\right| \leq \left|\overline{FA}\right|$, $\left|\overline{FB*}\right| \leq \left|\overline{FB}\right|$ und $\left|\overline{FC*}\right| \leq \left|\overline{FC}\right|$.

Hieraus folgt:

$\left|\overline{FA*}\right| + \left|\overline{FB*}\right| + \left|\overline{FC*}\right| \leq \left|\overline{FA}\right| + \left|\overline{FB}\right| + \left|\overline{FC}\right|$

Das Gleichheitszeichen gilt nur, wenn alle Seiten des Dreiecks PQR senkrecht auf den Strecken FA, FB und FC stehen.



Aufgabe 2.2.7(10):

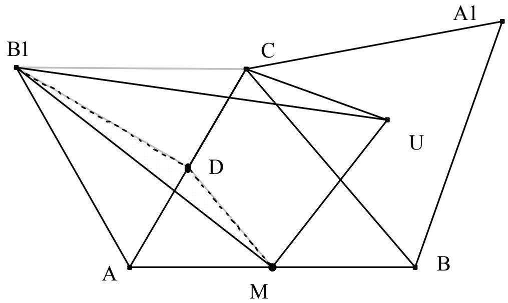
Der Mitelpunkt von AC ist D. Die Dreiecke B_1MD und B_1UC sind ähnlich; denn

$\left|\overline{B_1C}\right| : \left|\overline{B_1D}\right| = \left|\overline{CU}\right| : \left|\overline{MD}\right| = 2 : \sqrt{3} = :f$ und

$\angle B_1DM = \angle B_1CU = \gamma$ □+ 90°

Eine Drehstreckung des Dreiecks B_1DM um B_1 um 30° mit dem Streckungsfaktor $f = 2 : \sqrt{3}$ bringt die beiden Dreiecke zur Deckung. Deshalb ist $\angle UB_1M = 30°$. Weiterhin gilt

$\left|\overline{B_1U}\right| : \left|\overline{B_1M}\right| = f$ und damit $\angle B_1UM = 60°$ und $\angle UMB_1 = 90°$.



Aufgabe 2.2.8(8):

a) Die Dreiecke ABC und A*B*C* haben den gleichen Fermatpunkt F, da

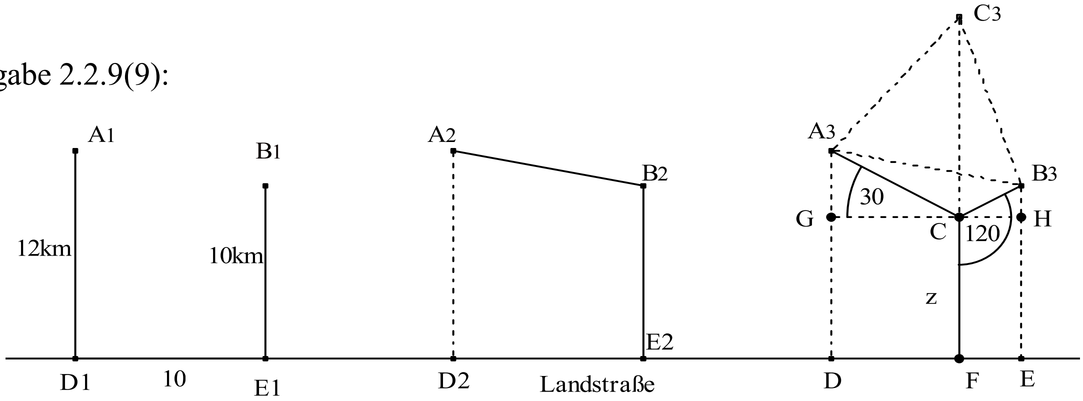
$\angle A^*FB^* = \angle B^*FC^* = \angle C^*FA^*$.

Im Dreieck ABC gilt : $\left|\overline{FB*}\right| = \left|\overline{FA}\right| + \left|\overline{FC}\right|$, $\left|\overline{FA*}\right| = \left|\overline{FB}\right| + \left|\overline{FC}\right|$, $\left|\overline{FC*}\right| = \left|\overline{FA}\right| + \left|\overline{FB}\right|$

Die Länge des kürzesten Verbindungssystems im Dreieck A*B*C* ist $L_2 = \left|\overline{FA*}\right| + \left|\overline{FB*}\right| + \left|\overline{FC*}\right|$. Hieraus folgt: $L_2 = 2(\left|\overline{FA}\right| + \left|\overline{FB}\right| + \left|\overline{FC}\right|)$

b) Man errichtet über den Seiten des Dreiecks A*B*C* die gleichseitigen Dreiecke A*B*C' , B*C*A' und C*A*B' nach außen. Aus Teilaufgabe a) folgt nun, dass die Punkte A, B und C die Mittelpunkte der Strecken A*A' , B*B' und C*C' sind.

Aufgabe 2.2.9(9):



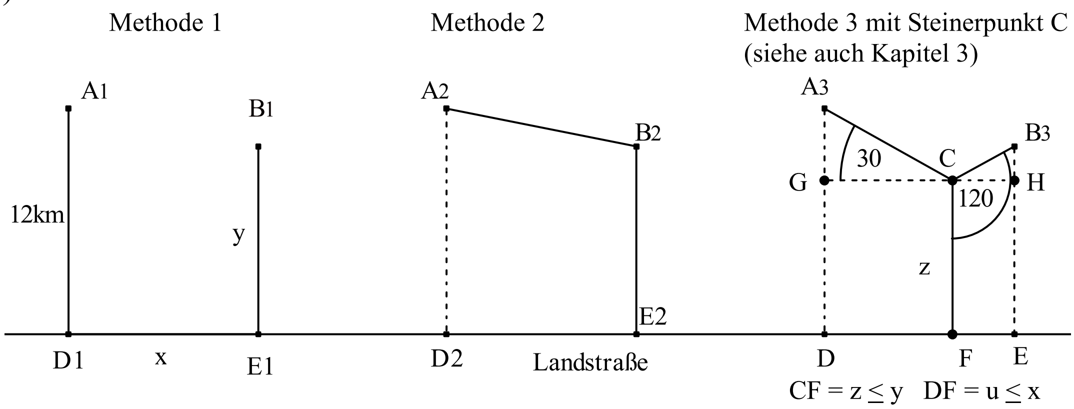
1. Firma: $L_1 = 22$ km 2. Firma: $L_2 = 10 + \sqrt{104} \approx 20{,}2$ (km) 3.Firma: $L_3 \approx 17{,}78$ km

Beweis: Die dritte Firma überlegt, wie man die Punkte A_3 und B_3 auf dem kürzesten Weg mit einem Punkt F auf der Landstraße verbinden kann. Sie errichtet über den beiden Punkten nach außen ein gleichseitiges Dreieck $A_3B_3C_3$. Die Strecke FC_3 hat die Länge des kürzesten Verbindungssystems genau dann, wenn F der Fußpunkt des Lotes von C_3 auf die Landstraße ist.

$\left|\overline{A_3C}\right| + \left|\overline{B_3C}\right| = \frac{20}{3}\sqrt{3} \approx 11{,}55$, $\left|\overline{CF}\right| = 12 - ½ \left|\overline{A_3C}\right| = 12 - \frac{10}{3}\sqrt{3} \approx 6{,}23$. Deshalb ist $L_3 \approx 17{,}78$ km.

Aufgabe 2.2.10(10):

a)



b) Für jede Methode wird ein Koordinatensystem zugrunde gelegt mit D als Ursprung und der Landstraße als x-Achse. ===> A(0|12), E(x|0), B(x|y), C(u|z)

===> Länge: $L_1 = 12 + y$ $\qquad L_2 = y + \sqrt{x^2 + (12-y)^2}$ $\qquad L_3 = z + \left|\overline{AC}\right| + \left|\overline{BC}\right|$

Für den Punkt C(u|z) von Methode 3 gelten folgende Bedingungen:

1) $\left|\overline{CF}\right|$ verläuft senkrecht zur Straße.

2) $\angle FAC = \angle FBC = 120°$ ===> $\left|\overline{AG}\right| = 12 - z$ $\quad \left|\overline{BH}\right| = y - z$ ===> $\left|\overline{AC}\right| = 2(12 - z)$, $\left|\overline{BC}\right| = 2(y - z)$

3) $x = (12 - z)\sqrt{3} + (y - z)\sqrt{3}$ ===> $z = ½\,(12 + y - \frac{x}{\sqrt{3}})$. Da $z \le y$, folgt $12 - \frac{x}{\sqrt{3}} \le y$

===> Methode 3 ist nur oberhalb der Geraden g mit der Gleichung $g(x) = -\frac{x}{\sqrt{3}} + 12$ möglich, da sonst

4) $L_3 = z + 2(12 - z) + 2(y - z) = 24 + 2y - 3z = 24 + 2y - 18 - 1{,}5y + ½\,x\sqrt{3} = 6 + ½\,y + ½\,x\sqrt{3}$

Vergleich der Methoden:

1. Methode 1 gegen Methode 2:

$L_1 < L_2$ ===> $12^2 < x^2 + (12 - y)^2$

Methode 1 ergibt im Vergleich mit Methode 2 das kürzere Verbindungssytem, wenn B(x|y) außerhalb des Kreises mit dem Radius 12 um den Mittelpunkt A(0|12) liegt.

2. Methode 1 gegen Methode 3:

$L_1 < L_3$ ===> $12 + y < 6 + ½\,y + ½\,x\sqrt{3}$

$6 + ½\,y < ½\,x\sqrt{3}$

$y < x\sqrt{3} - 12$

Methode 1 ergibt das kürzere Verbindungssytem im Vergleich mit Methode 3, wenn B(x|y) unterhalb der Geraden h mit der Gleichung $h(x) = x\sqrt{3} - 12$ liegt.

3. Methode 2 gegen Methode 3:

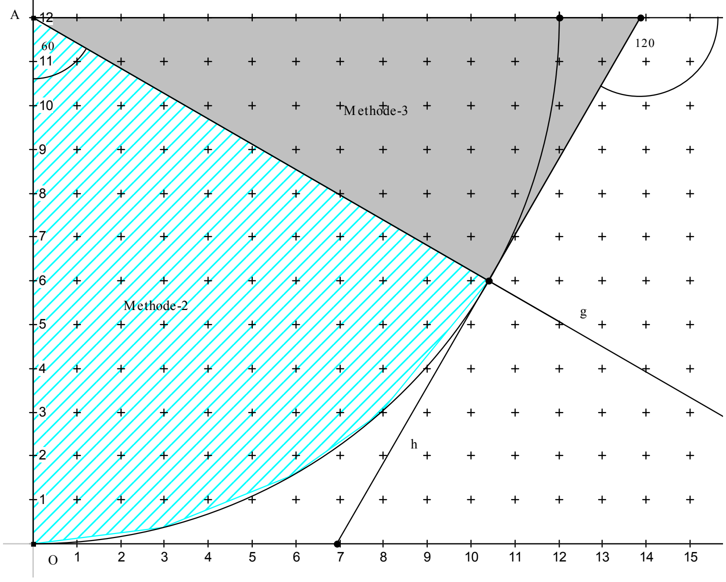
$L_2 < L_3$ ===> $x^2 + (12 - y)^2 < (6 - ½\,y + ½\,x\sqrt{3})^2$

$¼\,x^2 + ¾\,y^2 + ½\,xy\sqrt{3} + 108 < 18y + 6x\sqrt{3}$

$$\tfrac{1}{4}\,(x + y\sqrt{3}\,)^2 + 108 < 6\sqrt{3}\,(x + y\sqrt{3}\,)$$

$$[\,\tfrac{1}{2}\,(x+y\sqrt{3}\,) - 6\sqrt{3}\,]^2 < 0 \quad \text{falsch} \qquad \Longrightarrow$$

Methode 2 ergibt nie ein kürzeres Verbindungssystem als Methode 3, wenn diese in sinnvoller Weise anwendbar ist. D. h.:Methode 3 ist oberhalb der Geraden g immer besser als Methode 2.



a) B(12|8) ===> Methode 1 ist am besten: $L_1 = 20$ km

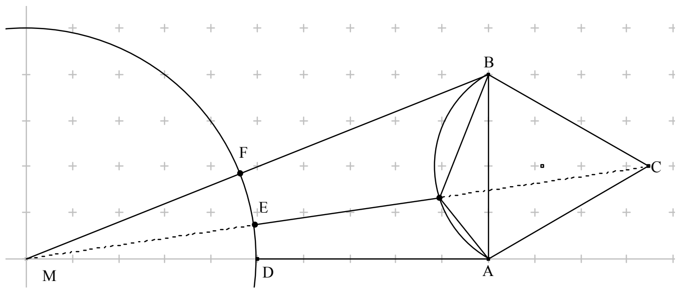
b) B(4|8) ===> Methode 2 ist am besten: $L_2 = 8+ 4\sqrt{2} \approx 13{,}66$ km

c) B(10|10) ===> Methode 3 ist am besten: $L_3 = 11+5\sqrt{3} \approx 19{,}66$ km

Aufgabe 2.2.11(9):

a) $L_1 = \left|\overline{AD}\right| + \left|\overline{AB}\right| = 5 + b$ $\qquad L_2 = \left|\overline{AD}\right| + \left|\overline{BF}\right| = \left|\overline{MF}\right| + \left|\overline{BF}\right| = \left|\overline{MB}\right| = \sqrt{100 + b^2}$

Berechnung von L_3: $C(10+ \tfrac{1}{2}b\sqrt{3} \mid \tfrac{1}{2}b)$ $\qquad L_3 = \left|\overline{MC}\right| - \left|\overline{ME}\right| = \left|\overline{MC}\right| - 5$ also gilt $b = 4$ und hieraus folgt: $L_1 = 9$ km, $L_2 \approx 10{,}77$ km, $L_3 \approx 8{,}61$ km



b) $L_1 > L_2$ gilt genau dann, wenn $b > 7{,}5$ ist.

$L_1 > L_3$ gilt für alle b, da $\left|\overline{AD}\right| + \left|\overline{AB}\right| = \left|\overline{AD}\right| + \left|\overline{AC}\right| > \left|\overline{CD}\right| > \left|\overline{CE}\right|$ ist. Die folgenden Zeilen sind äquivalent:

$L_2 < L_3$

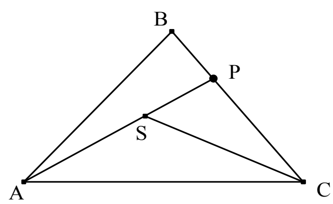
$$\sqrt{100 + b^2} + 5 < \sqrt{(10 + \tfrac{1}{2}b\sqrt{3})^2 + \tfrac{1}{4}b^2}$$

$$10\sqrt{100 + b^2} < 10b\sqrt{3} - 25$$

$$10\,000 < 200b^2 - 500b\sqrt{3} + 625$$

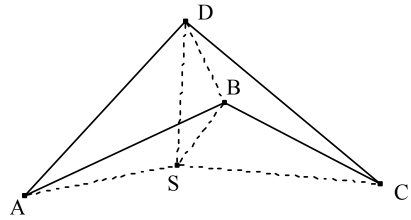
$$8b^2 - 20b\sqrt{3} - 375 > 0 \quad \text{und damit } b >$$

$$\frac{5}{4}\left(\sqrt{33} + \sqrt{3}\right) \approx 9{,}35$$



Aufgabe 2.3.1(7):

Hilfssatz: Gegeben ist ein Dreieck ABC und ein Punkt S ≠ B innerhalb des Dreiecks oder auf dem Umfang. Dann gilt : $|\overline{AS}| + |\overline{CS}| < |\overline{AB}| + |\overline{BC}|$



Beweis: Die Gerade AS schneide BC im Punkt P.
Addiert man zur Gleichung

$|\overline{AP}| = |\overline{AS}| + |\overline{SP}| < |\overline{AB}| + |\overline{BP}|$ die Gleichung

$|\overline{CS}| < |\overline{SP}| + |\overline{PC}|$, so erhält man:

$|\overline{AS}| + |\overline{CS}| < |\overline{AB}| + |\overline{BC}|$

Annahme: Es existiert ein Punkt S so, dass $|\overline{AS}| + |\overline{BS}| + |\overline{CS}| + |\overline{DS}| < |\overline{AB}| + |\overline{BC}| + |\overline{BD}|$ gilt.

Weil ein Punkt S außerhalb des Dreiecks ACD zu keiner kleineren Streckensumme führen kann, betrachte man einen Punkt S im Dreieck ACB. Der Punkt B muss nun entweder im Dreieck SDC oder im Dreieck SDA liegen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nimmt man an, dass B im Dreieck SDC liegt. Dann gilt nach dem Hilfssatz: $|\overline{BD}| + |\overline{DC}| < |\overline{CS}| + |\overline{DS}|$ und nach der Dreiecksungleichung: $|\overline{AB}| < |\overline{AS}| + |\overline{BS}|$. Hieraus erhält man: $|\overline{AB}| + |\overline{BC}| + |\overline{BD}| < |\overline{AS}| + |\overline{BS}| + |\overline{CS}| + |\overline{DS}|$

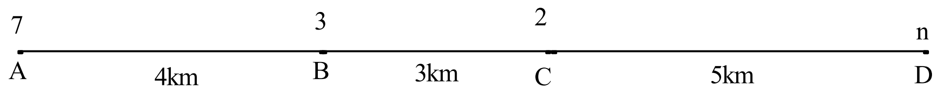
Falls B im Dreieck SDA liegt, verläuft der Beweis analog.

Aufgabe 2.3.2(7):

a) Der FERMATpunkt F liegt auf B.

b) Es gibt keinen eindeutigen FERMATpunkt; denn für jeden Punkt F auf der Strecke BC gilt: $|\overline{FA}| + |\overline{FB}| + |\overline{FC}| + |\overline{FD}| = 15$ km. Liegt der Punkt F außerhalb der Strecke BC, so ist $|\overline{FA}| + |\overline{FB}| + |\overline{FC}| + |\overline{FD}|$ größer als 15 km. Die Strecke BC ist die Schnittmenge der beiden Diagonalen AD und BD. Sie vertritt gewissermaßen den Diagonalenschnittpunkt im konvexen Viereck.

Aufgabe 2.3.3(7):



Für n = 0 muss der Treffpunkt T auf dem A liegen; denn verlegt man den Treffpunkt T um x km nach rechts, so müssen die sieben Jungen von A-heim insgesamt 7x km fahren, während die anderen fünf nur 5x km weniger fahren.

Minimum der Streckensumme s für n = 0: s = 3 · 4 km + 2 · 7 km = 26 km

Für n = 2 ergibt jeder Punkt auf der Strecke AB als Treffpunkt das gleiche Minimum von 50 km.

Die Lage des Treffpunktes hängt nur von der Anzahl der Jungen und nicht von der Anzahl der Kilometer zwischen den Ortschaften ab.

In der Tabelle wird nun die Lage des Treffpunktes und das zugehörige Minimum s der Streckensumme in Abhängigkeit von n angegeben.

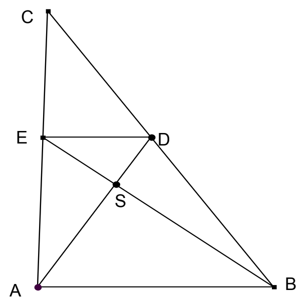
Treffpunkt	T = A	T auf AB	T = B	T auf BC	T = C	T auf CD	T=D
Anzahl n	0 – 1	2	3 – 7	8	9-11	12	n > 12
Minimum	s = 26+12n	s = 50	s = 34+8n	s = 98	s = 58+5n	s = 118	s =118

Aufgabe 2.3.4(7):

Die Antwort von Gauss lautete kurz: Wenn E und D auf C liegen muss die Strecke CS doppelt gezählt werden und dann ist das Minimum für S = C gegeben. Ich füge einen Beweis bei:
Wenn ED nach oben parallel verschoben wird, dann bewegt sich S auf einer Geraden. Wenn man die Strecke CS doppelt zählt, folgt:

$\left|\overline{AC}\right| < \left|\overline{AS}\right| + \left|\overline{SC}\right|$ und $\left|\overline{BC}\right| < \left|\overline{BS}\right| + \left|\overline{SC}\right|$ < $\left|\overline{BS}\right| + \left|\overline{SC}\right|$ Hieraus folgt durch Addition:

$\left|\overline{AC}\right| + \left|\overline{BC}\right| < \left|\overline{AS}\right| + \left|\overline{BS}\right| + 2\left|\overline{SC}\right|$



Der Fermatpunkt F im Dreieck ABC ergibt nur dann das kürzeste System, wenn jede Strecke nur einmal gezählt wird.

Aufgabe 2.3.5(8):

$\left|\overline{AD}\right| = \left|\overline{BC}\right| = 15,\ \left|\overline{DC}\right| = 7,\ \left|\overline{AC}\right| = \left|\overline{BD}\right| = 20 \Longrightarrow$

$\left|\overline{AD}\right| + \left|\overline{DC}\right| + \left|\overline{CB}\right| < \left|\overline{AC}\right| + \left|\overline{DB}\right| = \left|\overline{FA}\right| + \left|\overline{FB}\right| + \left|\overline{FC}\right| + \left|\overline{FD}\right|$.

Die drei Vierecksseiten AD, DC und CB stellen immer ein kürzeres Verbindungssystem als die beiden Diagonalen dar, wenn $\gamma \geq 120°$ und $\delta \geq 120°$.

Aufgabe 2.5.1.1(10):

a) Dreieck AFB: $\left|\overline{AF}\right| = \left|\overline{BF}\right| = 3\sqrt{2}$ und $\left|\overline{AB}\right| = 4\sqrt{3}$ also $\cos(\angle AFB) = -1/3$.

b) Dreieck CFD: $CF = 3\sqrt{2}$, $CD = \sqrt{16+h^2}$, $DF = h - \sqrt{2}$ also $\cos(\angle CFD) = -1/3$. Da die Größe des Winkels $\angle CFD$ unabhängig von der Pyramidenhöhe ist, kann man $\left|\overline{DF}\right| = \left|\overline{CF}\right|$ wählen. Es handelt sich also um ein reguläres Tetraeder. D. h.: Die Verbindungsgerade der Mittelpunkte der Seiten AB und CD halbiert die Winkel AFB und CFD.

Aufgabe 2.5.1.2(11):

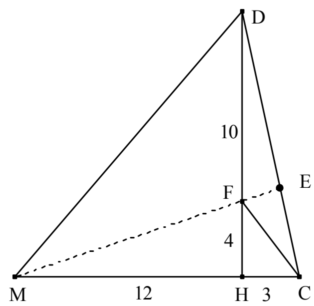
a) $L(x) = \left|\overline{FA}\right| + \left|\overline{FB}\right| + \left|\overline{FC}\right| + \left|\overline{FD}\right| = 2\sqrt{1440 + x^2 + z^2} + \sqrt{(15-x)^2 + z^2} + (14 - z)$

Partielle Differentiation nach x und z und Einsetzen von x = 12 und z = 4 ergibt bei beiden den Wert 0.

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{2x}{\sqrt{1440 + x^2 + z^2}} - \frac{15 - x}{\sqrt{(15-x)^2 + z^2}} \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{2z}{\sqrt{1440 + x^2 + z^2}} + \frac{z}{\sqrt{(15-x)^2 + z^2}} - 1$$

b) Man erhält: $\left|\overline{AB}\right| = 24\sqrt{10}$, $\left|\overline{AC}\right| = \left|\overline{BC}\right| = \sqrt{1665}$, $\left|\overline{CD}\right| = \sqrt{205}$, $\left|\overline{AD}\right| = \left|\overline{BD}\right| = \sqrt{1780}$, $\left|\overline{AF}\right| = \left|\overline{BF}\right| = 40$, $\left|\overline{CF}\right| = 5$, $\left|\overline{DF}\right| = 10$

Also ist $\cos(\angle AFB) = \cos(\angle CFD) = -0{,}8$ und $\cos(\angle AFC) = \cos(\angle BFD) = -0{,}1$M ist der Mittelpunkt der Seite AB.



Zu zeigen ist noch:
Teil 1: Die Gerade MF die Winkel AFB und CFD halbiert.
M sei der Ursprung eines Koordinatensystems, MC x-Achse und die Ebene MC x – z – Ebene.
Dann ist $M(0|0|0)$, $A(0|-12\sqrt{10}|0)$, $B(0|12\sqrt{10}|0)$, $C(15|0|0)$, $D(12|0|14)$, $F(12|0|4)$,
Die Winkelhalbierende FE teilt $\overline{CD}$ im

Verhältnis $\left|\overline{FC}\right|$: $\left|\overline{FD}\right|$ = 5:10 = 1:2. Also hat E die Koordinaten E(14|0|14/3).

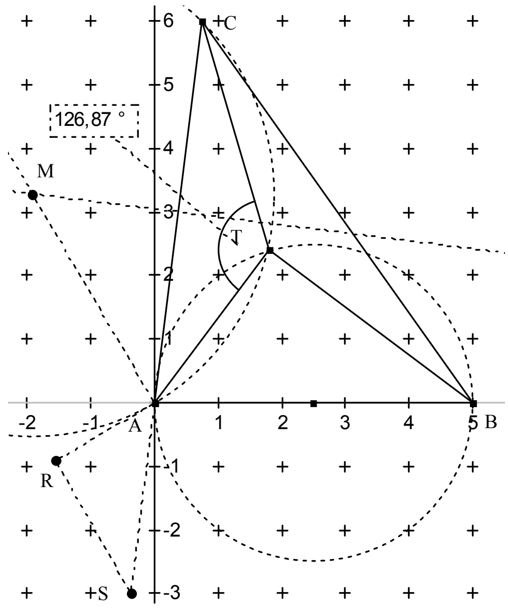
In der x – z – Ebene hat die Gerade MF die Gleichung z = 1/3x. Auf dieser Geraden liegt E. Damit ist Teil 1 bewiesen.

Teil 2: Die Winkelhalbierende FG des Winkels $\angle$AFC den Winkel BFD halbiert. Der Punkt G liegt auf AC. Die Winkelhalbierende FG des Winkels AFC teilt AC im Verhältnis

$\left|\overline{AF}\right|$: $\left|\overline{FC}\right|$ = 40:5 = 8:1 = $\left|\overline{AG}\right|$: $\left|\overline{GC}\right|$. Hieraus ergeben sich die Koordinaten von $G\left(\frac{40}{3}\,|-\frac{4}{3}\sqrt{10}\,|\,0\right)$.

Die Winkelhalbierende FK des Winkels BFD teilt $\overline{BD}$ im Verhältnis $\left|\overline{BF}\right|$: $\left|\overline{FD}\right|$ = 40:10 = 4:1 = BK:FD. K hat also die Koordinaten $K\left(\frac{48}{5}\,|\,\frac{12}{5}\sqrt{10}\,|\,\frac{56}{5}\right)$. Damit weiß man auch:

F teilt die Strecke $\overline{GH}$ im Verhältnis 5 : 9.



Aufgabe 2.5.2.1(11):

Der FERMATpunkt F muss auf MS liegen. Setzt man $\left|\overline{MF}\right|$ = x , so ist die Länge des Verbindungssystems

$L(x) = 4\sqrt{25+x^2} + h - x$ und damit

$L'(x) = \dfrac{4x}{\sqrt{25+x^2}} - 1$ also $x_{min} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$; natürlich gilt dies nur für $h > x_{min}$; also ist

$L(x_{min}) = h + 4\sqrt{\dfrac{76}{3}} - \dfrac{\sqrt{3}}{3} \approx h + 19{,}55$ Ist $h < x_{min}$, so ist S der FERMATpunkt.

Aufgabe 2.6.1(10):

Die Summe 3·TA + 4·TB + 5·TC soll ein Minimum werden. Die Winkel am Punkt T sind die Außenwinkel des Dreiecks mit dem Seiten-verhältnis 3:4:5; also ist $\angle$ATB = 90°

Den zweiten Fasskreis erhält man über das Dreieck ARS mit dem Seitenverhältnis 3:4:5.

Es gilt:

1. $\left|\overline{AT}\right|$ = 3, $\left|\overline{BT}\right|$ = 4

2. $\left|\overline{CT}\right|$ = 3,75, $\left|\overline{AC}\right|$ = ¾ $\sqrt{65}$. Hieraus folgt:

$$\cos(\angle ATB) = \frac{9 + 3{,}75^2 - \frac{9\cdot 65}{16}}{2\cdot 3{,}75\cdot 3} = \frac{144+225-585}{360} = \frac{-216}{360} = \frac{-3}{5} = -0{,}6$$ und cos($\angle$RAS) = 0,6. Also ist $\angle$ATB ist der Außenwinkel von $\angle$RAS im Dreieck ARS.

3. Das Minimum der Summe der Wegstrecken alller 46 Jungen ist 12·3 + 16·4 + 20·3,75 = 175.

Aufgabe 3.2.1(9):

Das STEINERnetz, bei dem die Eckpunkte der Seite b mit einem STEINERpunkt verbunden sind, existiert immer. Mit zunehmender Länge a vergrößert sich nur die Strecke S1S2 .

$L_1 = \left|\overline{AS_1}\right| + \left|\overline{BS_2}\right| + \left|\overline{CS_2}\right| + \left|\overline{DS_1}\right| + \left|\overline{S_1S_2}\right| =$

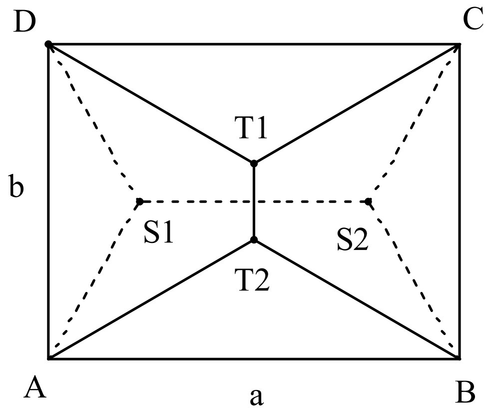
$= a + b\sqrt{3}$

Analog für das zweite Steinernetz:

$L_2 = a\sqrt{3} + b$

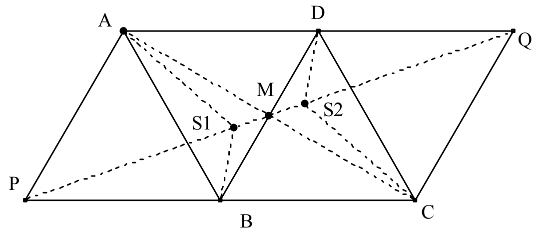
Also ist $L_1 < L_2$ genau dann, wenn $b < a$ ist.

Mit zunehmender Länge a bewegen sich die Punkte T_1 und T_2 aufeinander zu. Sie fallen zusammen, wenn $a = b\sqrt{3}$. Wenn $a > b\sqrt{3}$ gibt es kein zweites STEINERsystem.



Aufgabe 3.2.2(9):

Beide STEINERnetze haben die gleiche Länge; diese ist doppelt so groß wie die Länge des STEINERNetzes im Dreieck ABM und diese ist nach Aufgabe 2.2.1a_1 gleich $\frac{a}{2}\sqrt{7}$. Also ist $L = a\sqrt{7}$.



Aufgabe 3.2.3(9):

Annahme: Es sind s STEINERpunkte und 4 Festpunkte vorhanden; dann gibt es 4 + s – 1 Verbindungsstrecken, da ein Baum immer eine Kante weniger als Eckpunkte hat. Andrerseits enden an jedem Steinerpunkt genau drei Verbindungsstrecken, an jedem Festpunkt mindestens eine. Also ist $4 + s - 1 \geq ½\cdot 4 + ½\cdot 3s$ da jede Kante genau zwei Eckpunkte besitzt. Also muss $s < 2$ sein.

Wenn jeder Festpunkt mit einem STEINERpunkt verbunden wird, dann gibt es genau zwei STEINERpunkte. Wenn es nur einen STEINERpunkt gibt, dann ist dieser mit drei Festpunkten und der vierte Festpunkt ist mit einem der STEINERpunkte verbunden; aber der kleiner Winkel zwischen diesen Verbindungsstrecken muss größer oder gleich 120° sein.

Aufgabe 3.3.1(9):

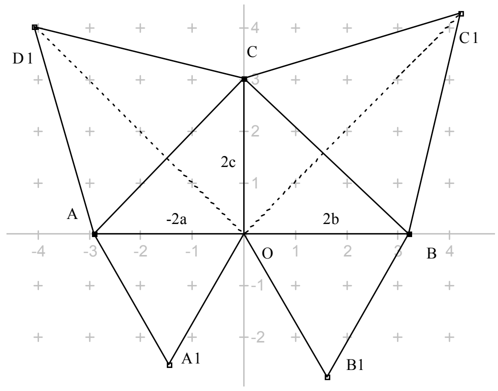
Mit den Bezeichn8ngen des Beweises zu Satz 3.3.1 gilt:

a) Die Gerade PR hat die Steigung $m_{PR} = \dfrac{b + a\sqrt{3} + d + c\sqrt{3}}{a + b\sqrt{3} + c + d\sqrt{3}} = \dfrac{(a+c)\sqrt{3} + (b+d)}{(b+d)\sqrt{3} + (a+c)} = 1$. Analog bekommt man die Steigung der Geraden QS als $m_{QS} = -1$. Die beiden Geraden stehenalso aufeinander senkrecht und haben den

Schnittpunkt $Z([-a + ½\,(b+d)](\sqrt{3} - 1) \mid ½(d - b)(\sqrt{3} - 1))$.

b) Das Viereck ABCD ist ein gleichschenkliges Trapez mit gleich langen, orthogonalen Diagonalen genau dann, wenn a = b und c = d. Dann liegen P und R auf der Geraden y = x. Die Punkte Q und S liegen spiegelbildlich zur Geraden y = x. PQRS ist ein Drachenviereck.

c) Viereck ABCD ist ein Drachenviereck mit gleich langen, orthogonalen Diagonalen genau dann, wenn a = c und a + c = b + d. Hieraus folgt: P und Q, sowie R und S liegen symmetrisch zur y-Achse. Das Viereck PQRS ist ein gleichschenkliges Trapez. Wenn die Diagonalen des Drachenvierecks gleich lang sind, dann sind dies auch die des gleichschenkligen Trapezes.



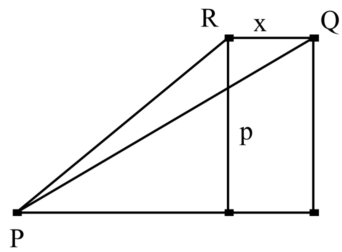
Aufgabe 3.4.1(9):

a) Errichtet man über den vier Seiten des Vierecks AOBC die gleichseitigen Dreiecke nach außen, dann liegt weder der Punkt D_1 im Bereich des Winkels OB_1B noch der Punkt C_1 im Bereich des Winkels AA_1O.

Beweis: $C_1(b+c\sqrt{3}\,|\,b\sqrt{3}+c)$). Aus Aufgabe 3.2.1 folgt für die Steigung m der Geraden OC_1:

$$m = \frac{b\sqrt{3}+c}{b+c\sqrt{3}} < \sqrt{3} \quad \Longleftrightarrow \quad b\sqrt{3}+c < b\sqrt{3}+3c$$

Also ist $\angle BOC_1 < 60°$. Analoges gilt für den Punkt D_1. Es gibt also kein kürzestes Verbindungssystem mit zwei Steinerpunkten.



b) $L_1 = \left|\overline{OD_1}\right| + \left|\overline{OB}\right| =$

$$= \sqrt{\left(a+c\sqrt{3}\right)^2+\left(c+a\sqrt{3}\right)^2} + 2b =$$

$$2\sqrt{a^2+c^2+ac\sqrt{3}} + 2b = 2\sqrt{\left(a+\tfrac{1}{2}c\sqrt{3}\right)^2+\tfrac{1}{4}c^2} + 2b$$

Für $a = -3$, $b = 2$, $c = 2{,}5$ erhält man $L_1 \approx 14{,}62$ und $L_2 = \left|\overline{OC_1}\right| + \left|\overline{AO}\right| \approx 14{,}70$.

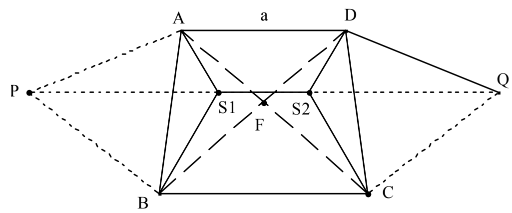
c) Setzt man $b = a + x$ mit $x > 0$, so ist zu zeigen $L_2 < L_1$:

$$\sqrt{\left(a+x+\tfrac{1}{2}c\sqrt{3}\right)^2+\tfrac{1}{4}c^2} < \sqrt{\left(a+\tfrac{1}{2}c\sqrt{3}\right)^2+\tfrac{1}{4}c^2} + x$$

Setzt man $p = a + \tfrac{1}{2}c\sqrt{3}$, so erhält man: $\sqrt{(p+x)^2+\tfrac{1}{4}c^2} < \sqrt{p^2+\tfrac{1}{4}c^2} + x$

Es ist dann $PQ < PR + RQ$. Dies ist aber die Dreiecksungleichung im Dreieck PQR.

Aufgabe 3.4.2(9):



a) Die Länge $L_1 = 3a$ ist von α unabhängig.

b) $L_2 = \left|\overline{AC}\right| + \left|\overline{BD}\right| = 2\left|\overline{BD}\right| = 4a\sin(\tfrac{1}{2}\alpha)$

c) $L_3 = \left|\overline{AS_1}\right| + \left|\overline{BS_1}\right| + \left|\overline{S_1S_2}\right| + \left|\overline{CS_2}\right| + \left|\overline{DS_2}\right|$

$= \left|\overline{PQ}\right| = a + 2a\cos(120° - \alpha)$

Die Längen L_2 und L_3 nehmen mit wachsendem α monoton zu. Das zweite STEINERsystem hat immer eine größere Länge als das gezeichnete.

Fall 1: $\alpha = 90°$ $\quad L_3 = a(1+\sqrt{3}) < L_2 = a\sqrt{2} < L_1 = 3a$

Fall 2: $\left|\overline{BD}\right| = 1{,}5a$ also $\alpha = 97{,}18°$. Dies ist etwa der Fall der Zeichnung: $L_3 \approx 2{,}8a < L_2 = L_1 = 3a$

Fall 3: $\alpha = 120°$. Es folgt: $L_3 = L_1 < L_2 = 2a\sqrt{3}$

Fall 4: $\alpha > 120°$: L_2 nimmt weiter zu. Ein STEINERsystem ist nicht mehr möglich.

Die Verbindungssysteme von Festpunkten ohne Hilfspunkte sind oft die kürzesten, wenn Winkel größer als 120° werden.

Aufgabe 4.1(7):

Es seien t STEINERpunkte. Dann ist die Anzahl der Kanten $n + t - 1$, da das Netz ein Baum ist und jeder Baum mit m Kanten immer $m + 1$ Eckpunkte hat.

Andrerseits müssen an jedem STEINERpunkt genau drei Strecken enden und an jedem Festpunkt mindestens eine Strecke. Hieraus folgt $n + t - 1 \geq (3t + n):2$ und damit ist $n - 2 \geq t$.

$t = n - 2$ gilt, wenn an jedem Festpunkt genau eine Strecke endet. In diesem Fall gibt es für alle Verbindungsstrecken nur drei Richtungen, die miteinander nur Winkel von 120° bilden.

Aufgabe 4.1.1(9):
Figur 1 ist das kürzeste Verbindungssystem ohne Hilfs- und STEINERpunkte: $L_1 = 4a$

Figur 2 ist das kürzeste Verbindungssystem mit dem FERMATpunkt im Quadrat ABCD als Hilfspunkt H:
$L_2 = (1 + 2\sqrt{2})\,a \approx 3{,}828\,a$
Es ist aber nicht das kürzeste Verbindungssystem mit einem Hilfspunkt wie der Beweis in 4.2 zeigt .

Figur 3 ist das kürzeste System mit den zwei STEINERpunkten S_1 und S_2 des Quadrates. Es lässt sich nicht weiter verkürzen, da $\angle S_1DE = 120°$. Ein weiterer STEINERpunkt würde auf D liegen.
$L_3 = (2 + \sqrt{3})a \approx 3{,}732\,a$

Figur 4 ist das einzige STEINERnetz mit drei STEINERpunkten, da die beiden 150°–Winkel ein weiteres STEINERnetz mit drei Steinerpunkten ausschließen.
Konstruktion: Man errichtet über AB und EC nach außen die gleichseitigen Dreiecke ABF und ECG und ersetzt die Punkte A und B durch F bzw. C und E durch G. Das STEINERnetz des Dreiecks DFG hat die Länge L_4.
$\left|\overline{DG}\right|^2 = 3a^2$, $\left|\overline{DF}\right|^2 = (2 + \sqrt{3})a^2$ und $\angle GDE = 75°$ Insegsamt ergibt sich: $L_4 = \sqrt{8 + 3\sqrt{3}}\,a \approx 3{,}633\,a$

Figur 5 ist ein Verbindungsnetz, wobei die Punkte S_1 und S_2 die FERMATpunkte in den Dreiecken ABD und DCE sind. Es lässt sich verkürzen, da $\angle S_1DS_2 < 120°$; aber eine Verkürzung würde schließlich Figur 4 ergeben. Man findet: $L_5 = \dfrac{\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6}}{2}\,a \approx 3{,}664\,a$

Figur 6 ist ein Verbindungssystem mit einem STEINERpunkt S1 und dem FERMATpunkt im Viereck S_1CED.
Es ist $L_6 = L_3$.

Aufgabe 4.2.1(9):
Netz 1: Das Netz setzt sich zusammen aus drei Netzen eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seite a (siehe Aufgabe 2.2.1b) ===> $L_1 = 3a\sqrt{3} \approx 5{,}196\,a$

Netz 2: Das Netz setzt sich zusammen aus den kürzesten Netzen von zwei kongruenten Rauten mit der Seite a und einem Winkel von 60° (siehe Aufgabe 3.2.2). Es folgt: $L_2 = 2a\sqrt{7} \approx 5{,}29a$

Netz 3: Das Netz besteht aus fünf Seiten, also ist $L_3 = 5a$. Es ist das kürzeste Verbindungssystem.

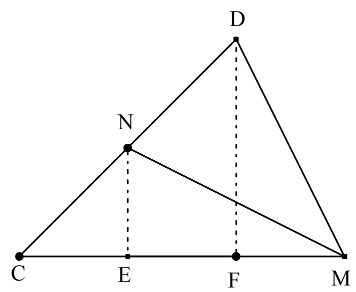
Aufgabe 4.2.2(9):
Das Netz 1 der Aufgabe 4.2.1 ist das kürzeste, da man bei einem Netz ohne Hilfspunkte die Länge 6a erhält.

Aufgabe 4.3.1(9):
Wegen der Symmetrie kann man sich auf eines der drei möglichen STEINERnetze beschränken. Gezeichnet ist das Neigungsdreieck der Seite CD:
Die Mittelpunkte von AB und CD sind M und N, die Fußpunkte der Lote von N und D auf die Grundfläche sind E und F: $\left|\overline{NE}\right| = ½\left|\overline{DF}\right| = \frac{a}{6}\sqrt{6}$

$\left|\overline{EM}\right| = \frac{2}{3}\left|\overline{CM}\right| = \frac{a}{3}\sqrt{3}$

Also ist nach PYTHAGORAS

$\left|\overline{MN}\right| = \frac{a}{2}\sqrt{2}$ und damit $L = a(\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{3}) \approx 2{,}44a$



Aufgabe 4.3.2(9):

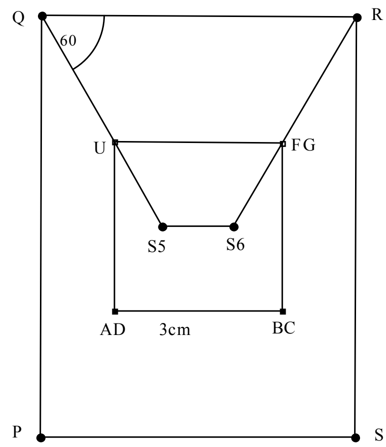
Gezeichnet ist ein Aufriss des Würfels, wobei die Punkte P, Q, R und S so zu einem Rechteck angeordnet werden müssen, dass die Ebenen der gleichseitigen Dreiecke FGR und EHQ mit der Deckfläche EFGH einen Winkel von 60° bilden. U ist der Mittelpunkt von $\overline{EH}$. S_5 und S_6 sind zwei STEINERpunkte.

$\left|\overline{QU}\right| = \frac{a}{2}\sqrt{3}$, $\left|\overline{UT}\right| = \frac{a}{3}\sqrt{3}$, $\left|\overline{QR}\right| = a + \frac{a}{2}\sqrt{3}$,

$\left|\overline{PQ}\right| = 2{,}5a$

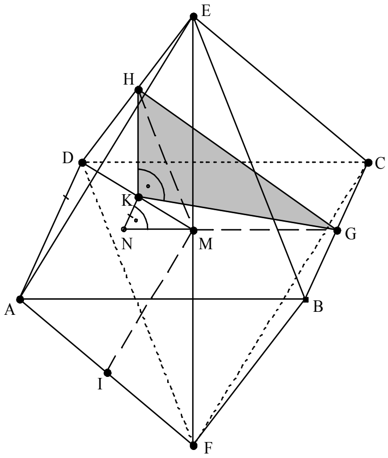
Damit findet man die Länge L des STEINERnetzes des Rechtecks PQRS, wobei die Punkte P und Q mit dem STEINERpunkt S_5 und die Punkte R und S mit dem STEINERpunkt S_6 verbunden sind.

$L = a(1 + 3\sqrt{3}) \approx 6{,}196\,a$

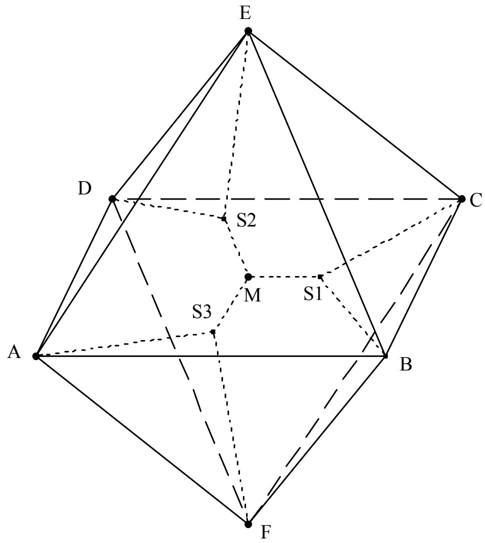


Aufgabe 4.3.3(9):

Man wählt drei Oktaederkanten so, dass keine Ecke zweimal auftritt. Die Punkte G, H und I sind die Mittelpunkte der Kanten BC, DE und AF.



Figur 1



Figur 2

Satz: MG, MH und MI liegen in einer Ebene und bestimmen paarweise einen Winkel von 120°.

Beweis: (Siehe Figur 1) Das Dreieck GNK liegt in der Ebene ABCD, wobei K der Fußpunkt des Lotes von H auf diese Ebene ist. Es gilt: $\left|\overline{KN}\right| = \frac{1}{4}a$, $\left|\overline{GN}\right| = \frac{3}{4}a$, $\left|\overline{KH}\right| = \frac{1}{4}a\sqrt{2}$ also ist: $\left|\overline{GH}\right| = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$

Aus Symmetriegründen folgt $\left|\overline{HI}\right| = \left|\overline{GI}\right| = \left|\overline{GH}\right|$. Das gleichseitige Dreieck GHI hat die Höhe $h = \frac{3}{4}a$. Hieraus folgt $\left|\overline{GM}\right| = \frac{1}{2}a$, wie behauptet ist.

Errichtet man nun über BC, DE und AF gleichseitige Dreiecke nach außen, so dass die Spitzen P, Q und R dieser Dreiecke auf den Halbgeraden MG, MH und MI liegen, dann ist der M der FERMATpunkt des gleichseitigen Dreiecks PQR. Die Länge L des kürzesten Systems ist die dreifache Länge des gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks BCM; es gilt: $L = \frac{3}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)a \approx 4{,}10a$