Hans Engelhaupt †

Kürzeste Wege, Teil I

HANS ENGELHAUPT (26. 10. 1936 – 18. 5. 2003) hat 2002 bei „Mathematikinformation" eine Arbeit über „Kürzeste Wege" eingereicht, die im Stil der Zeitschrift überarbeitet hätte werden sollen. Leider konnte er dies nicht mehr vollenden. Aus mehreren Ansätzen haben ARTHUR KRÄMER und KARLHORST MEYER, soweit dies möglich war, die folgende Abhandlung möglichst nahe an ENGELHAUPT überarbeitet. Die Lösungen werden aus technischen Gründen erst in der Nummer 42 der „Mathematikinformation" veröffentlicht. Der Leser möge dies entschuldigen.

Der Mathematikstil von ENGELHAUPT ist nicht immer leicht lesbar, da insbesondere bei den Lösungen oft nur der Weg grob skizziert wird. Im Rahmen des zur Verfügung stehenden Druckumfangs war es nicht möglich, allen Aufgaben im Sinne von Schülern komplette Lösungen zu geben.

So kann man den Schülerinnen und Schülern u. U. auch die Lösungen mit der Aufforderung in die Hand geben, sie in ihren Detailschritten zu begründen und auszuarbeiten.

Es fragt sich überhaupt, weshalb die vorliegende Abhandlung in die „Mathematikinformation" zu einer Zeit des Umbruchs aufgenommen worden ist, da es sich doch vor allem um Probleme des 19. Jahrhunderts handelt, noch dazu man heute mit Methoden der diskreten Mathematik ganz anders an die dargestellten Fragen herangeht. Auch sind einige einfacheren der hier dargestellten Aufgaben in ähnlicher Form in den gängigen Wettbewerben bereits vorgekommen. Die Idee der Arbeit ist also keineswegs neu und kann sicher auch an anderer Stelle gefunden werden (siehe das Literaturverzeichnis). Da aber die genannten Werke für den Lehrer kaum zugänglich sind und ihre Inhalte einhundert Jahre kein Thema der Schulbuchliteratur mehr gewesen sind, lohnt es sich, unter modernen didaktischen Absichten, die Abhandlung von ENGELHAUPT zu veröffentlichen.

Der neue Stil im Mathematikunterricht sucht nach komplexen Fragestellungen, die die Lernenden zwingen, immer wieder ihr Wissen zu rekapitulieren und die Probleme nicht nur mit dem eben Gelernten zu lösen. Der vorliegende Artikel gibt ein umfangreiches Beispielmaterial hierfür. Besonders schön ist an den Beispielen, dass sie ein gemeinsames Ziel verfolgen, eben „kürzeste Wege". Hierbei geht es nicht nur darum, den Lernenden zu zwingen, umfangreiche Lösungsstrategien zu entwickeln, sondern gleichzeitig viele Kapitel des Unterrichtes in Algebra wie auch Geometrie präsent zu haben.

Es ist dabei nicht daran gedacht, über das vorgelegte Thema einen zusammenhängenden Unterricht anzubieten. Vielmehr schwebt den Autoren vor, hinsichtlich der neu zu schaffenden Binnendifferenzierung des Unterrichts der Kollegin und dem Kollegen ein Material zur Verfügung zu stellen, das man dem gehobenen Drittel einer Klasse anbieten kann, wenn man zu Beginn des Schuljahres einen etwa 5-stündigen Ergänzungsunterricht (Intensivierungsstunden, Pluskurs, Arbeitsgemeinschaft u. v. m.) den „Besseren" gegeben hat, wie dies bereits einige Male ausprobiert worden ist. Zur Erleichterung der Lehrerarbeit findet man hinter den Aufgabennummern Hinweise, in welcher Jahrgangsstufe die jeweilige Frage den Inhalten des Normalunterrichts entspricht. So bedeutet z. B. *Aufgabe 3.2.7(8)*, dass die 7. Aufgabe des Kapitels 3.2. für die Klasse 8 geeignet ist.

Im vorliegenden Artikel werden an unterschiedlichen, geometrischen Sachverhalten Methoden zur Konstruktion des kürzesten Weges, der kürzesten Streckensumme oder des kürzesten Verbindungssystems dargestellt. Fast alle Beispiele illustrieren immer wieder nur den fundamentalen Satz der Ebene:

Die Strecke ist die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten.

Dies ist der rote Faden, auf dem die wichtigsten Veranschaulichungen aufgereiht sind. Es ist auch die eigentliche Überschrift. Die vielen Beispiele sind einzeln gut geeignet in verschiedenen Jahrgangsstufen ab Klassenstufe 7 als interessante Ergänzung der passenden Unterrichtssequenz. Die zahlreichen Aufgaben vertiefen zum einen die Sachverhalte, ergänzen die konstruktiv gefundenen Lösungen der kürzesten Streckensummen durch Berechnungen und zeigen aber zum anderen auch weitergehende Eigenschaften der jeweiligen Figuren auf. Die Inhalte wie auch der Schwierigkeitsgrad der einzelnen Aufgaben sind bewusst breit gestreut, so dass der Lehrer gezielt eine Auswahl treffen kann, die seinen Vorstellungen und dem Wissensstand der Schüler entspricht. Bei einem Großteil der Aufgaben lässt sich durch den Einsatz einer Dynamischen Geometrie-Software die Aufgabenstellung in einfacher Weise experimentell gestalten und variieren. Der Schüler kann so aktiver an der Lösungsfindung mitarbeiten. Aus diesen Gründen können einzelne Sequenzen oder auch der ganze Artikel als anregendes Thema für Intensivierungsstunden, Arbeitsgemeinschaften u. a. eingesetzt werden.

Nun wünschen wir den Leserinnen und Lesern viel Spaß an den Ausführungen von ENGELHAUPT.

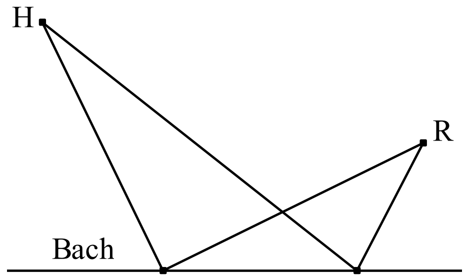
Inhaltsverzeichnis

Lösungshinweise siehe „Mathematikinfomation Nr. 42“ (erscheint 15. 1. 2005).

1. Einführende Beispiele

1.1 Das Reflexionsprinzip

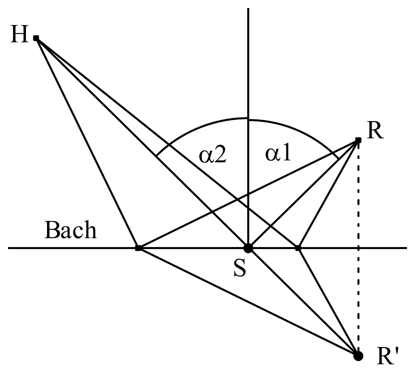
1.1.1 Reflexion an einer Geraden



Beispiel 1.1.1: Ein Haus H und ein Rosenbeet R liegen auf der gleichen Seite eines geradlinig verlaufenden Baches. Der Gärtner geht mit zwei Gießkannen vom Haus zum Bach, füllt die Kannen und geht zum Rosenbeet. An welcher Stelle des Baches muss er Wasser schöpfen, damit die Länge seines Weges minimal wird?

Ob der Gärtner unter dem Aspekt der Aufgabe handelt, ist fraglich, da er u. U. bemüht ist, die volle Kanne möglichst kurz zu tragen. Wie läuft er dann? Dieser Aspekt bleibt hier unberücksichtigt.

Problemstellung: Zwei gegebene Punkte H und R können durch *mehrere* Streckenzüge unterschiedlicher Länge verbunden werden; der *kürzeste* ist gesucht. Zur Ermittlung des kürzesten Streckenzugs oder der kleinsten Streckensumme kann man mehrere Strategien verfolgen. Bei vielen Beispielen führt die folgende zum Ziel.



1. Lösung: Man untersucht, ob sich unter den gegebenen Bedingungen zwei Punkte so finden lassen, dass unter allen möglichen Wegen zwischen ihnen ein Weg geradlinig und gleich lang einem geforderten Weg ist; es muss dann dieser der kürzeste sein.

Ausführung: Spiegelt man den Punkt R am Bach, so entspricht jedem Weg von einem Punkt des Baches zum Rosenbeet ein gleichlanger Weg zum Spiegelpunkt R'. Die Strecke $\overline{HR'}$ schneidet den Bach in dem Punkt S, der zur kleinsten Streckensumme $|\overline{HS}|+|\overline{SR}|$ führt. Der Winkel HSR wird dann vom Lot zum Bach im Punkt S halbiert. Für den kürzesten Weg gilt also das Reflexionsgesetz mit dem Bach als Spiegel.

Anmerkung: Für einen Lichtstrahl zwischen zwei Punkten gilt bekanntlich: *Ein Lichtstrahl von einem Punkt zu einem andern nimmt bei einer Reflexion am ebenen Spiegel immer den kürzesten Weg.* Damit wurde die Gültigkeit des Reflexionsgesetzes gezeigt.

Satz 1.1.1: Bei Reflexion gilt stets: Der Einfallswinkel ist gleich dem Ausfallswinkel, d. h. das Einfallslot ist stets **Winkelhalbierende** zwischen dem einfallenden und ausfallenden Strahl. Die Reflexion verläuft auf dem kürzesten Weg.

2. Lösung zu Beispiel 1.1.1: Man kann natürlich die Aufgabe auch mit Hilfe der Differentialrechnung lösen: In einem kartesischen Koordinatensystem sei H(0|h), R(r|s) und S(x|0).

Streckensumme $L(x) = \sqrt{x^2+h^2}+\sqrt{(r-x)^2+s^2}$ ===> $L'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}} - \frac{r-x}{\sqrt{(r-x)^2+s^2}} = 0$

Die beiden Brüche lassen sich als cos (90° – α) und cos (90° – β) deuten. Aus der Gleichheit folgt das obige Ergebnis „Einfallswinkel ist gleich dem Ausfallswinkel“.

Aufgabe 1.1.1.1(8):

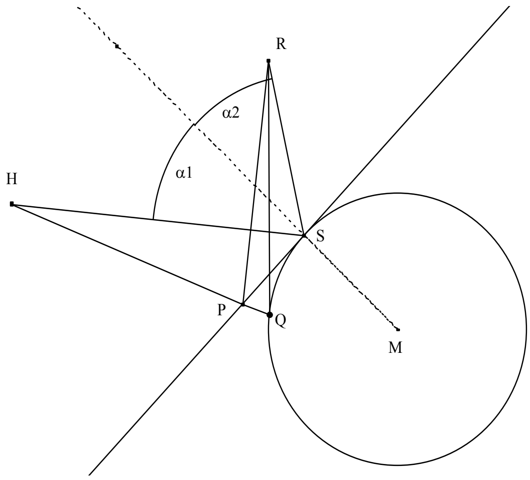
a) In einem kartesischen Koordinatensystem sei H(0|6) und R(6|2). Berechne X(x|0) so, dass der Streckenzug H-X-R minimale Länge besitzt und berechne diese Länge.

b) Löse diese Aufgabe auch für die Punkte A(0|8,5), B(3,5|12) und Z(z|z) (bzw. A(-1|2), B(9|6) und Z(2z|z)) so, dass der Streckenzug A-Z-B minimale Länge besitzt.

Aufgabe 1.1.1.2(8): In einem kartesischen Koordinatensystem (Einheit = 10m) hat das Haus H des Gärtners die Koordinaten H(0|3,2), das Rosenbeet R(4,5|–3,6). Ein Bach mit einer feuchten Uferzone wird begrenzt von den Geraden y = 0 und y = 0,8.

a) Der Gärtner geht vom Haus zum Rosenbeet, wobei er durch den seichten Bach auf der Geraden x = k watet. Wähle k so, dass die Länge L des Weges des Gärtners minimal wird.
b) Der Gärtner hat ein Tulpenbeet T(9,6|–3,6). Zwischen den Geraden x = 5,2 und x = 6,8 ist ein Sumpfstreifen, den der Gärtner mit einem Steg der Länge 16m überbrücken will. Wo muss der Gärtner nun durch den Bach waten und wo muss der Gärtner den Steg bauen, damit der Weg vom Haus über den Bach und den Steg zum Tulpenbeet minimal wird ?

1.1.2 Reflexion am Kreis



Beispiel 1.1.2: Ein Haus H und ein Rosenbeet R liegen in der Nähe eines kreisförmigen Sees. Der Gärtner geht mit zwei Gießkannen vom Haus zum See, füllt die Kannen und geht zum Rosenbeet. An welcher Stelle des Sees muss er Wasser schöpfen, damit die Weglänge minimal wird?

Lösung: Man wählt den Punkt S auf dem Kreis so, dass die Tangente t an den Kreis in S den Spiegel vom Beispiel in 1.1.1 bildet. Dieser Weg ist der kürzeste von H zum Kreis und weiter zu R.

Beweis:
1. HR meidet den Kreis. Q sei ein Punkt auf dem Kreis. Die Strecke QH schneidet die Tangente t im Punkt P, wobei dieser links vom Punkt S liegen möge.
Nach Beispiel 1.1.1 gilt dann: $|\overline{HS}| + |\overline{SR}| < |\overline{HP}| + |\overline{PR}| < |\overline{HP}| + |\overline{PQ}| + |\overline{QR}| = |\overline{HQ}| + |\overline{QR}|$
Der Beweis erfolgt analog, wenn der Punkt P rechts von der Geraden MS liegt.

Ergebnis: Man erhält also den kürzesten Verbindungsweg, wenn die Gerade MS den Winkel RSH halbiert.

2. HR ist Kreistangente, dann ist $|\overline{HR}|$ geradlinig und damit die kürzeste Entfernung.

3. Wenn aber die Strecke HR den See schneidet, dann muss der Gärtner tangential an den See gehen, um den See weiter, bis er tangential zum Rosenbeet gehen kann. Von den beiden möglichen Wegen wählt er den kürzeren.

Aufgabe 1.1.2.1(9): Gegeben sind die Punkte A(-2|11) und B(9|13) sowie der Kreis k: $x^2 + y^2 = 50$. Auf dem Kreis k liegt ein Punkt C so, dass die Streckensumme $|\overline{AC}| + |\overline{CB}|$ minimal wird. Beweise, dass dies für den Punkt C(1|7) gilt.

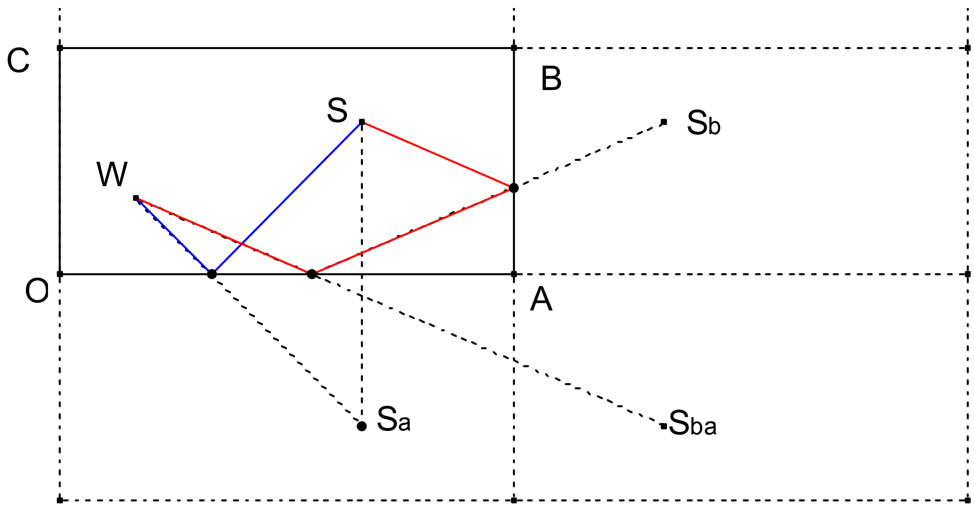
Aufgabe 1.1.2.2(9): Gegeben sind die Punkte A(-4|-4) und B(4|4) sowie der Kreis k: $x^2 + y^2 = 16$. Konstruiere den kürzesten Weg vom Punkt A um den Kreis zum Punkt B und berechne die Weglänge.

1.1.3 Reflexionen am Billardtisch

Beispiel 1.1.3: Ein rechteckiger Billardtisch OABC hat die Länge $|\overline{OA}|$ = 2,40 m und die Breite $|\overline{OC}|$ = 1,20 m. Die Tischkanten seien parallel zu den Koordinatenachsen, O der Koordinatenursprung. Eine weiße Kugel liegt an der Stelle W(0,4 m|0,4 m), eine schwarze an der Stelle S(1,6 m|0,8 m). Zeichne den Tisch im Maßstab 1 : 40.

a) In welche Richtung muss man die weiße Kugel stoßen, damit sie nach einer Reflexion an der Bande a = OA die schwarze Kugel trifft? Es werden eine zeichnerische Lösung im gegebenen Maßstab und eine Berechnung der Reflexionsstelle an der Bande verlangt. Dies ist dann der kürzeste Weg von der weißen Kugel über die Bande zur schwarzen Kugel.
b) Die Kugel soll an den Banden a = OA und b = AB in dieser Reihenfolge reflektiert werden, um dann die schwarze Kugel zu treffen.

Die *Lösung* im Fall b) ist die zweimalige Anwendung des Reflexionsgesetzes, wobei die schwarze Kugel zusammen mit dem Billardtisch an den jeweiligen Banden in umgekehrter Reihenfolge gespiegelt wird, d. h zuerst wird an der Bande AB und dann das erhaltene Spiegelbild an der Bande OA gespiegelt. Diese Reihenfolge empfiehlt sich vor allem bei mehrfachen Spiegelungen, da der Stoß auf die weiße Kugel erfolgt. Dadurch kann der Spieler die Richtung des Stoßes genau erkennen. Natürlich ist der so erhaltene auch der kürzeste Weg über die beiden Banden von der weißen zur schwarzen Kugel.



Aufgabe 1.1.3.1(9): Fertige für das obige Beispiel eine maßstabsgetreue Zeichnung an und berechne die genauen Reflexionspunkte mit den Banden und die Länge der beiden Wege der weißen Kugel.

Aufgabe 1.1.3.2(9): Im Punkt S(2|0,5) auf einem Billardtisch (Länge 6, Breite 4) liegt eine Kugel. In welche Richtung muss man die Kugel kräftig anstoßen, damit sie nach einmaliger Reflexion an jeder Bande wieder zum Anfangspunkt S zurückkehrt, also einen Rundweg ausführt? Beschreibe die Form des Rundwegs und berechne seine Länge.

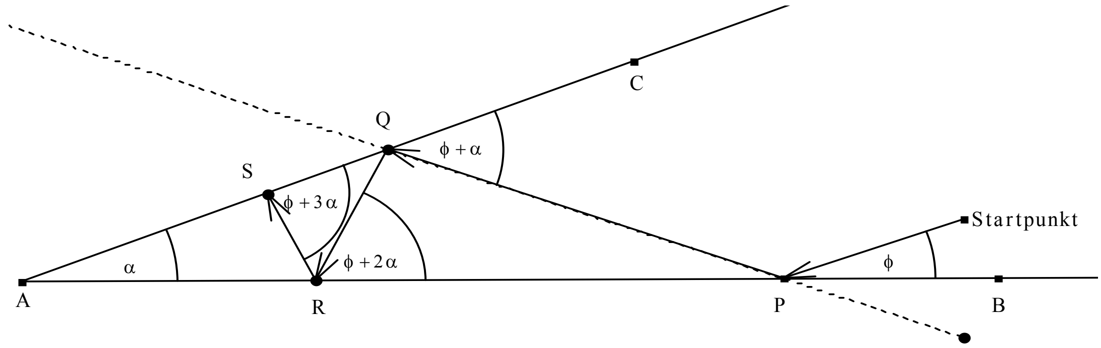
Aufgabe 1.1.3.3(7): Im Punkt P(1|1) auf einem Billardtisch der Länge 6,00 m und der Breite 3,00 m liegt eine Kugel. In welche Richtung muss man die Kugel (besonders kräftig) anstoßen, damit sie nach Reflexion an sechs Banden zum ersten Mal wieder an den Anfangspunkt P zurückkehrt? Berechne die Längen aller möglichen derartigen Rundwege.

Aufgabe 1.1.3.4(9): Ein rechteckiges Spielfeld ist 50 m lang und 30 m breit. Eine Junge steht auf dem Feld; sein Abstand von der kürzeren Seite beträgt 10 m, der von der längeren a.

a) Der Junge soll möglichst schnell zunächst zu einer langen Seite, dann zur entfernteren kurzen Seite und schließlich über die zweite lange Seite des Spielfeldes zum Ausgangspunkt zurücklaufen. Konstruiere den kürzesten Weg und berechne seine Länge für a = 15 m.
b) Der Junge kann sich die Reihenfolge der drei Seiten heraussuchen; es müssen aber drei verschiedene Seiten sein. Wie viele verschiedene, „kürzeste“ Rundwege gibt es und welcher ist der absolut kürzeste in Abhängigkeit von a?

1.1.4 Reflexionen am Winkelspiegel

Ein Lichtstrahl ausgehend vom Startpunkt T fällt in einen Winkelspiegel mit dem Winkel α und bildet mit dem einen Schenkel einen Winkel $\phi < 90°$. Die Konstruktionen mit Hilfe von Spiegelungen oder Loten im Reflexionspunkt sind der besseren Übersichtlichkeit wegen weggelassen.



Es stellen sich nun verschiedene Fragen über den weiteren Verlauf des Lichtstrahls:

Kommt der Strahl immer wieder aus dem Winkelspiegel heraus?
Wenn ja, welchen Winkel bildet dann der nach rechts austretende Strahl mit der Richtung des vom Startpunkt aus einfallenden Strahls?
Wie viele Reflexionen können auftreten?

Betrachtet man der Reihe nach die Winkel, die der reflektierte Strahl mit den Spiegeln bildet, so gilt:
$\angle PQC$ ist Außenwinkel des Dreiecks APQ; deshalb gilt: $\angle PQC = \phi + \alpha$
$\angle PRQ$ ist Außenwinkel des Dreiecks ARQ; deshalb gilt: $\angle PRQ = \phi + 2\alpha$ analog: $\angle RSQ = \phi + 3\alpha$

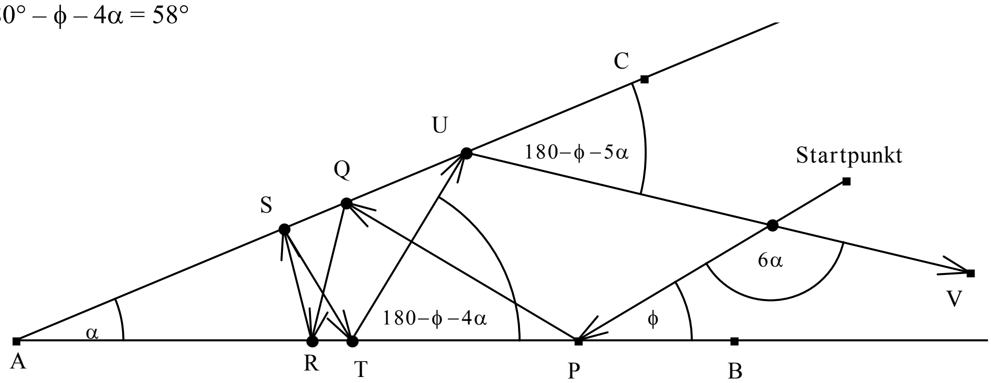
Satz 1.1.4.1:
Allgemein gilt nach der (k+1)-ten Reflexion:
Genau dann, wenn $\phi + k\alpha < 90°$ ist, nähert sich der Strahl dem Scheitel A nach dieser Reflexion.
Genau dann, wenn $\phi + k\alpha > 90°$ ist, entfernt sich der Strahl vom Scheitel A nach dieser Reflexion.
Genau dann, wenn $\phi + k\alpha = 90°$ ist, läuft der Strahl nach dieser Reflexion auf dem gleichen Weg zurück und die Zahl der Reflexionen ist ungerade.

Satz 1.1.4.2: Eine Zweifachspiegelung an zwei Achsen, die den Winkel α einschließen, entspricht einer Drehung um 2α um den Schnittpunkt der zwei Achsen. Der Drehsinn ergibt sich aus der Reihenfolge der Spiegelachsen.

Aus diesem Satz folgt unmittelbar:

Korollar 1.1.4.3:
Hat man eine gerade Anzahl n von Reflexionen, dann ist der Winkel zwischen einfallendem und ausfallendem Strahl unabhängig vom Winkel ϕ immer gleich $n\alpha$.

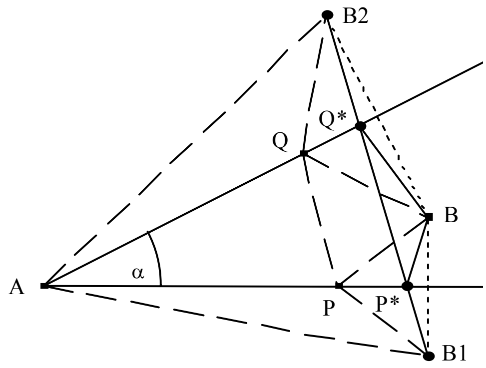
Beispiel 1.1.4.1: $\alpha = 23°$ und $\phi = 30°$. Siehe die Zeichnung.
Die Winkelberechnungen ergeben:
$\angle VUC = 180° - \phi - 5\alpha$
$\angle PTU = 180° - \phi - 4\alpha = 58°$



Da $\varphi + 2\alpha = 76° < 90° < 99° = \phi + 3\alpha$ ist, gibt es insgesamt sechs Reflexionen und der Winkel zwischen einfallendem und ausfallendem Strahl beträgt 6α.

Beispiel 1.1.4.2: $\alpha = 27°$, $\phi = 73°$

Gesucht ist der kürzeste „Rundweg“ von einem Punkt B im Winkelfeld mit jeweils einer Reflexion an jedem der beiden Schenkel.



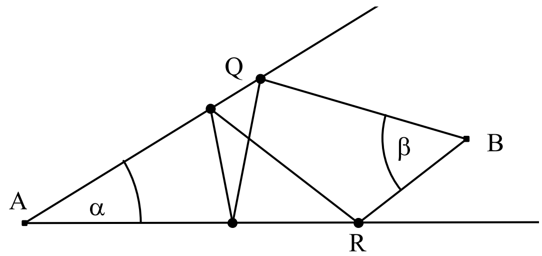
Die Länge eines jeden Rundwegs BPQB von B mit je einer Reflexion an jedem der zwei Spiegel entspricht einem Streckenzug von B1 nach B2, wobei B1 und B2 die Spiegelpunkte von B an den Schenkeln des Winkelspiegels sind. Der Rundweg wird am kürzesten, wenn der Streckenzug zur Strecke B1P*Q*B2 wird. Dies tritt genau bei Reflexion an den Schenkeln ein. Die Punkte B, B1 und B2 liegen dann auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt A, wobei der Winkel B_1AB_2 gleich 2α ist. Die Länge des kürzesten Rundwegs ist dann $L = 2\ AB \sin\alpha$.

Aufgabe 1.1.4.1(9): Zwei Mauern bilden im Punkt A einen Winkel $\alpha < 90°$. Ein Junge steht im Punkt B im Winkelfeld. Der Junge soll einen Rundlauf von B zur ersten Mauer, dann zur zweiten Mauer und wieder nach B zurück machen.

a) Konstruiere den kürzesten Weg für den Jungen.
b) Beweise, dass $\angle QBR = 180° - 2\alpha$ wenn R und Q die Wegpunkte an den Mauern sind.
c) Beweise, dass AB den Winkel QBR halbiert.

Aufgabe 1.1.4.2(7 bzw. 9): Zwei Mauern bilden im Punkt A einen Winkel $\alpha < 90^{o}$ und ein Junge steht im Punkt B im Winkelfeld. Der Junge soll einen Rundlauf von B zur ersten Mauer, dann zur zweiten Mauer und über die erste und zweite Mauer wieder nach B zurück machen.

a) (7) Konstruiere den kürzesten Weg für den Jungen.
b) (7) Beweise, dass $\angle QBR = 180° - 4\alpha$, wenn R und Q die Wegpunkte an den Mauern sind.
c) (9) Berechne die Länge des Weges des Jungen.



Aufgabe 1.1.4.3(7): Ein Lichtstrahl, der in einen Winkelspiegel mit $\alpha = 90°$ einfällt, verlässt den Winkelspiegel bekanntlich unabhängig vom Einfallswinkel immer parallel zum einfallenden Strahl. Konstruiere für zwei weitere Winkel α einen Strahlenverlauf, bei dem einfallender und den Winkelspiegel verlassender Strahl unabhängig vom Einfallswinkel parallel verlaufen.

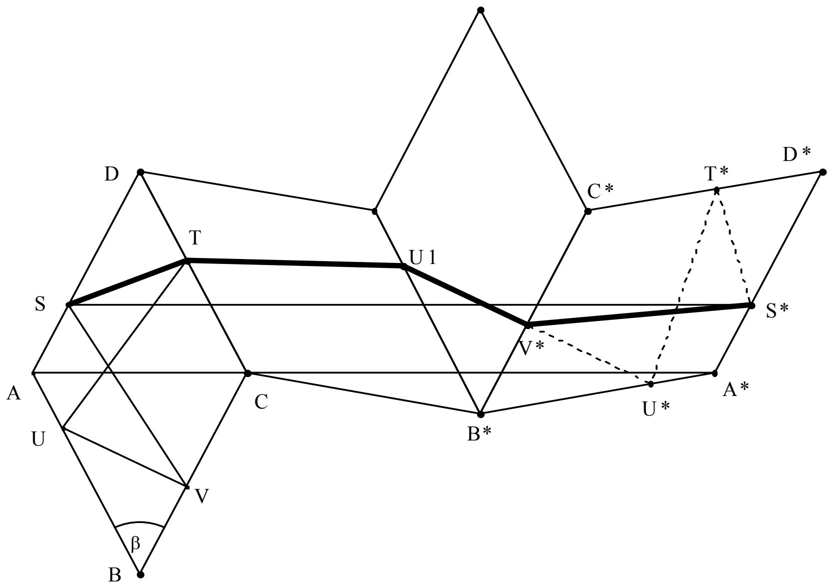
Aufgabe 1.1.4.4(7 bzw. 9): Zwei Mauern bilden im Punkt O(0|0) einen Winkel $\alpha = 45^{o}$. Ein Junge steht im Punkt B(6|1) im Winkelfeld. Die eine Mauer steht über der x-Achse, die andere über der Geraden mit der Gleichung $y = x$. Der Junge hat an der einen Mauer eine Stelle R(r|0) und an der anderen Mauer eine Stelle Q(q|q) markiert. Er soll nun vom Punkt B zur einen Marke, dann zur anderen Marke laufen und auf dem gleichen Weg wieder zum Punkt B zurück.

a) (7) Wo muss der Junge die Marken R und Q anbringen und in welcher Reihenfolge muss er diese anlaufen, damit die Länge L des Weges möglichst kurz wird? Berechne die Länge L.
b) (9) Berechne die Länge allgemein für den Punkt $B(b_1|b_2)$ im Winkelfeld.

1.1.5 Rundwege am rautenförmigen Billardtisch

Beispiel 1.1.5.1: Gegeben ist ein rautenförmiger Billardtisch ABCD mit $\beta < 90°$. Gesucht sind Rundwege einer gestoßenen Billardkugel, wenn sie an jeder der vier Banden genau einmal reflektiert wird.

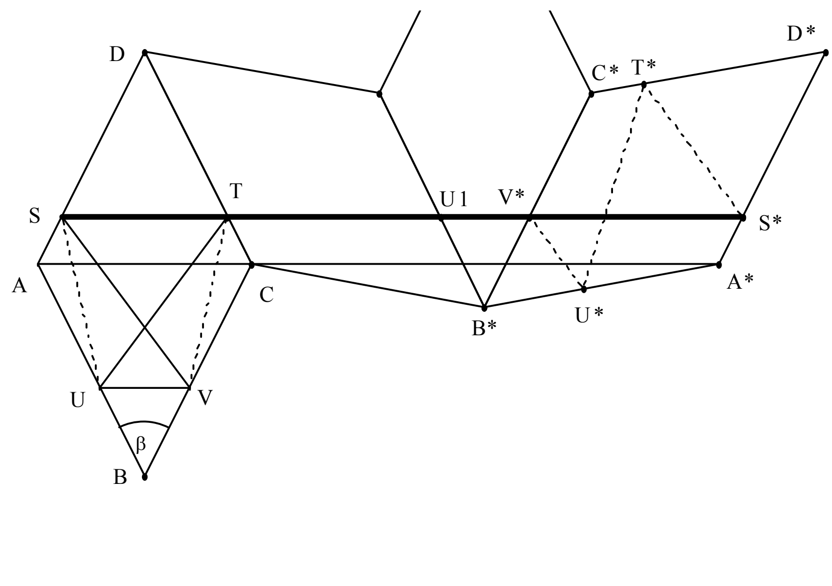
Lösung: Ein geschlossener Rundweg kann nur ein überschlagenes Viereck STUV sein. Der Beweis sei dem Leser überlassen. Gesucht ist ein Rundweg mit dem Startpunkt S auf AD.



Man zeichnet in die Raute zunächst ein beliebiges überschlagenes Viereck STUV , spiegelt die Raute mit dem Viereck STUV dreimal nacheinander an den Seiten der Raute in der entsprechenden Reihenfolge und erhält nach drei Reflexionen als Spiegelbilder A*B*C*D* und S*T*U*V*. Es gilt: $|\overline{AD}| = |\overline{A^*D^*}|$ und $|\overline{AS}| = |\overline{A^*S^*}|$; A* liegt auf der Geraden AC. SS* und AA* sind parallel, ebenso UV und U1V*. Jedem Rundweg STUVS entspricht ein gleichlanger Streckenzug STU1V*S*. Da an jeder Bande das Reflexionsgesetz gelten muss, ergeben sich für den kürzesten Rundweg folgende Bedingungen (siehe die untere Figur):

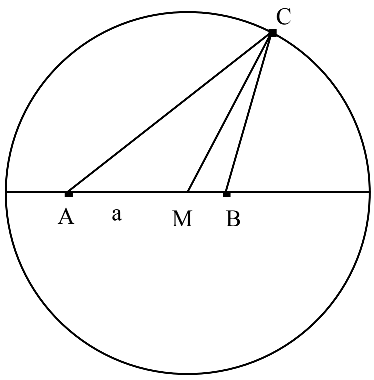
1. Die Punkte S, T, U1, V* und S* müssen *eine* Strecke bilden, damit der Gesamtweg minimal ist.
2. Die Geraden ST, UV und AC müssen wegen 1. und nach Konstruktion parallel sein. D. h.: Die Geraden TU und SV schneiden sich auf BD.
3. Da das Reflexionsgesetz gelten muss, hat der Winkel zwischen UV und SV bzw. zwischen UV und UT die Größe β und damit der Winkel zwischen TU und SV die Größe 180° – 2β.

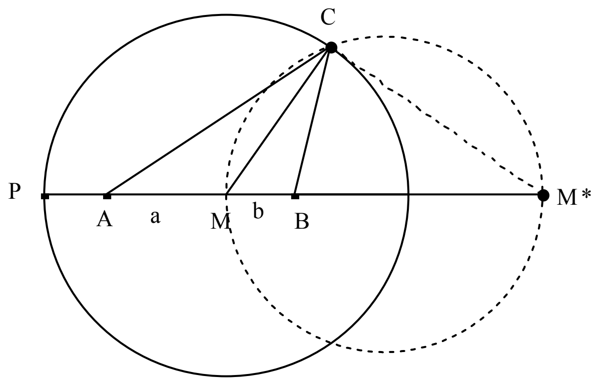
Durch diese Bedingungen ist der Rundweg mit dem Startpunkt S eindeutig bestimmt: Die Punkte STVU bilden ein gleichschenkliges Trapez, wobei ST und UV parallel zur Diagonalen AC sind. Für kleine Werte des Winkels β muss der Startpunkt S nahe bei A liegen, damit die Strecke SV die Seite BC schneidet. Anderenfalls kommt es zu geschlossenen Streckenzügen nur nach mehrfacher Reflexion an jeder Bande: Man kann diesen Sachverhalt genauer untersuchen.
Diese Rundwege STUVS sind die kürzesten, weil „die mehrfach gespiegelten Wege“ einen gleich langen Streckenzug SS* auf einer Geraden ergeben.



1.1.6 Reflexionen am Kreis

Beispiel 1.1.6.1: *Eine Reflexion am Kreis:* Wie müssen auf einem „kreisförmigen Billardtisch“ zwei Kugeln auf einem Kreisdurchmesser liegen, damit durch *eine* Reflexion an der Kreisbande die eine Kugel die andere trifft? In welche Richtung muss man die eine stoßen, damit sie nach einer Reflexion am Kreis die andere trifft? Untersuche die maximale und minimale Streckenzuglänge. Liegen beide Kugeln nicht auf einem Durchmesser, ist den Autoren eine elementargeometrische Lösung nicht bekannt.





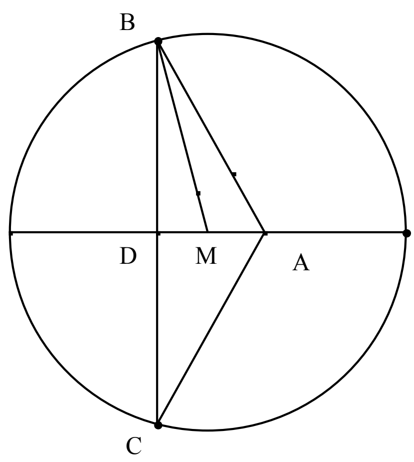
Lösung:
Fall 1: Der Kreismittelpunkt liegt nicht zwischen A und B. Eine einzelne Reflexion an der Kreisbande bei C führt nur zum Ziel, wenn C auf AB liegt.
Fall 2: Der Kreismittelpunkt M liegt zwischen A und B. Es sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit a > b. MC muss den Winkel ACB halbieren. Da die Winkelhalbierende eines Dreieckswinkels die Gegenseite im Verhältnis der anliegenden Seiten teilt, muss der Punkt C auf dem Kreis des APOLLONIUS mit dem Durchmesser MM* liegen. Die Punkte M und M* teilen die Strecke AB von innen und außen im gleichen Verhältnis. Die bekannte Konstruktion von M* ist weggelassen.

a) Ein Schnittpunkt der beiden Kreise existiert, wenn M* außerhalb des gegebenen Kreises liegt. Der Streckenzug ACB hat dann maximale Länge (Aufgabe 1.1.6.2).
b) Existiert der Schnittpunkt der beiden Kreise nicht, dann hat der „mathematische“ Streckenzug von A über den Mittelpunkt zum Kreis und dann zurück nach B die maximale Länge.

Die minimale Länge erhält man durch die Strecke AB.

> *Aufgabe1.1.6.1(9):* Welche Beziehung muss zwischen a, b mit $0 < b < a \leq r$ und dem Kreisradius r bestehen, damit eine Reflexion im Sinne der obigen rechten Zeichnung möglich ist?

Beispiel 1.1.6.2: *Zwei Reflexionen am Kreis:* Gegeben ist eine Kugel im Punkt A auf einem kreisförmigen Billardtisch. In welche Richtung muss man die Kugel stoßen, damit sie nach *zwei* Reflexionen zum Punkt A zurückkehrt?



Die Reflexionspunkte am Kreis seien B und C. Aus Gründen der Symmetrie muss BC auf dem Durchmesser AM senkrecht stehen.
Setzt man $a = \left|\overline{AM}\right|$, $r = \left|\overline{MB}\right|$ und $x = \left|\overline{MD}\right|$,

$y = \left|\overline{BD}\right|$, $z = \left|\overline{AB}\right|$, so folgen drei Gleichungen:

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad (1)$$
$$(a + x)^2 + y^2 = z^2 \qquad (2)$$
$$x : a = y : z \qquad (3)$$

Letzteres weil BM Winkelhalbierende im Dreieck ABD ist. Löst man (1) nach y und (3) nach z auf und setzt dies in (2) ein, so folgt $(a + x)^2 + r^2 - x^2 = \left(\frac{ay}{x}\right)^2$ und damit $2a^2x^2 + 2ax^3 + r^2x^2 - a^2r^2 = 0$.

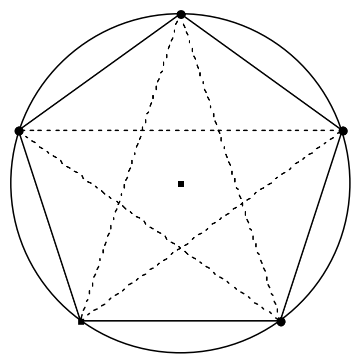
Da $x = -a$ eine algebraische Lösung ist, kann man die letzte Gleichung durch $(x + a)$ dividieren und erhält $2ax^2 + r^2x - ar^2 = 0$ mit den Lösungen $x = \frac{-r^2 \pm r\sqrt{r^2 + 8a^2}}{4a}$.

Aufgabe1.1.6.2(9):

a) Was erhält man bei Beispiel 1.1.6.2 für $a = r$?
b) Wie steht es mit der geometrischen Bedeutung des Falles $x = a$?
c) Fertige für $a = 1{,}25$ cm und $r^2 = 10$ cm^2 eine genaue Zeichnung an und beweise, dass MB den Winkel ABC halbiert.
d) Konstruiere den Rundweg für $a = 2$ cm und $r = 4$ cm.

Beispiel 1.1.6.3: *Rundwege im Kreis durch Reflexionen an der Kreislinie:*

Fall 1: Startet man einen Rundweg auf einem Kreispunkt, so erhält man sicher Rundwege mit beliebig vielen Reflexionen, wenn man darauf achtet, dass die Rundwege regelmäßige Vielecke oder aber auch Sternpolygone sind. Letztere haben sicher keine minimale Länge, weil zu jedem geschlossenen Sternpolygon ein kürzeres reguläres Vieleck gehört (siehe die nebenstehende Abbildung). Man kann leicht zeigen (siehe Aufgabe 1.6.4), dass Rundwege, die auf der Kreisperipherie beginnen, reguläre Figuren sein müssen.



Fall 2: Startet man bei einem inneren Kreispunkt, so löst Aufgabe 1.6.5 das Problem.

Aufgabe 1.1.6.3(7): Beweise: Die auf der Kreisperipherie beginnenden Rundwege auf einem Kreis sind Streckenzüge mit gleich langen Strecken.

Aufgabe 1.1.6.4(7): Startet man bei einem inneren Punkt des Kreises und sucht einen Rundweg durch Reflexionen an der Kreislinie, so sei der erste Einfallswinkel der Reflexion an der Kreislinie α. Stelle in Abhängigkeit von α eine Formel so auf, dass sich der Weg nach n Reflexionen ohne Knick schließt.

1.2. Kürzeste Wege auf der Oberfläche von Körpern

Auf der Oberfläche eines Körpers ist der kürzeste Weg zwischen zwei gegebenen Punkten P und Q gesucht.

Satz 1.2.1: Zwischen zwei Punkten P und Q auf einer Fläche findet man stets kürzeste Entfernungen durch einen gespannten Faden.

Hinweis: Das Ergebnis muss nicht eindeutig sein: Zwischen zwei Punkten auf einem Zylinder kann man einen Faden spannen, der höchstens einmal um den Zylinder herumgeht. Man kann aber auch einen Faden spannen, der zweimal usw. um den Zylinder herumgeht.

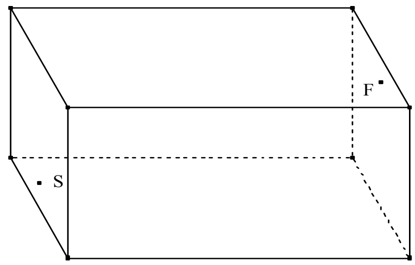
Beweis des Satzes: Man kann die Fläche durch eine endliche Anzahl von Tangentialebenen zwischen P und Q ersetzen und ohne Beschränkung der Allgemeinheit nur zwei solche Ebenen betrachten. Die Zugkräfte, die auf den Faden wirken, können an der Schnittkante jeweils in eine Komponente längs des Fadens und in eine Komponente längs der Kante zerlegt werden. Der Faden verschiebt sich längs der Kante so lange, bis die beiden Kräfte längs der Kante gleich groß sind. Das ist genau dann der Fall, wenn die Winkel zwischen Faden und Kante gleich groß sind.

Man kann nun um die Kante die eine der beiden Ebenen in die andere aufbiegen (**abwickeln**) und erhält den Zusatz:

Zusatz 1.2.2: Spannt man einen Faden auf einer abwickelbaren Ebene, so ist der Weg des Fadens nach der Abwicklung längs einer Geraden.

Es werden im Folgenden nur Körper betrachtet, deren Oberflächen als ebene Netze abgewickelt werden können; die meisten Überlegungen gelten auch für gekrümmte Flächen, wenn man sie durch Polyeder approximieren kann. Man möge sich für den kürzesten Weg jeweils einen gespannten Faden vorstellen. Die Methode ist hier immer die gleiche: Man zeichnet ein Netz des Körpers und sucht auf diesem Netz eine Strecke zwischen den zwei Punkten. Da es aber für den gleichen Körper mehrere verschieden geformte Netze geben kann, können diese Verbindungsstrecken je nach Wahl des Netzes unterschiedliche Längen besitzen. Man muss dann entweder durch Rechnung oder durch Zeichnung entscheiden, welche Verbindungsstrecke die absolut kürzeste Länge besitzt. *Grund:* Die Differentialgeometrie lehrt, dass die hier eingeschlagene Methode im Allgemeinen lokal aber nicht global eindeutig ist.

1.2.1 Kürzeste Wege auf einem Quader



Zunächst eine Aufgabe von HENRY ERNEST DUDENEY:

Beispiel 1.2.1.1: In einem quaderförmigen Raum (Länge 30 Fuß, Breite 12 Fuß, Höhe 12 Fuß) sitzt eine Spinne auf der senkrechten Mittellinie der kleineren Seitenfläche einen Fuß über dem Boden. Eine Fliege sitzt diametral gegenüber, also gespiegelt am Mittelpunkt des Raumes. Bestimme den kürzesten Weg der Spinne zur Fliege, die sitzen bleibt. Die Spinne benutzt kein Netz, sie krabbelt über die Wände.

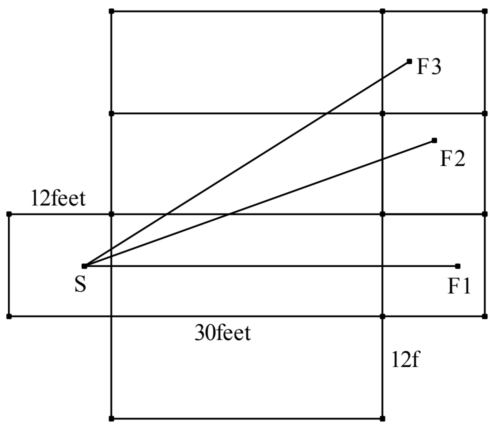
Lösung: Man kann auf drei Arten mit der Seitenfläche, auf der die Fliege sitzt, ein Quadernetz so vervollständigen, dass ein geradliniger Weg zwischen Spinne und Fliege möglich ist:

Es gibt drei " kürzeste " Wege zur Fliege, je nachdem über welche Seitenflächen die Spinne krabbelt. In den Fällen 1, 2 oder 3 krabbelt die Spinne über 3, 4 oder 5 Seitenflächen.
Die Zeichnung der nächsten Seite ist nicht maßstabsgetreu.
Man erhält:

$$L_1 = 30 + 12 = 42$$

$$L_2 = \sqrt{(1 + 30 + 6)^2 + (11 + 6)^2} = \sqrt{37^2 + 17^2} \approx 40{,}72$$

$$L_3 = \sqrt{(30 + 2)^2 + 24^2} = 40$$



Natürlich können die Wege zwei und drei auch spiegelbildlich zur Symmetrieebene des Würfels, in der die Punkte S und F1 liegen, verlaufen. Der Weg 1 kann auch über die Decke gehen. Interessanterweise ist der Weg der kürzeste, bei dem die Spinne über fünf Seitenflächen krabbelt. Dieses merkwürdige Ergebnis ist nur möglich, wenn die Länge des Raumes relativ groß und die Höhe der Spinne über dem Boden relativ klein ist.

Untersuchung dieser Aufgabe für allgemeinere Werte: Es sei c die Höhe der Spinne über der Grundfläche mit $0 \le c < 6$. Die Länge des Raumes betrage a, die Breite und Höhe messen nach wie vor 12 Fuß. Dann gilt:
$L_1 = a + 12$
$L_2^2 = (a + 6 + c)^2 + (18 - c)^2$

$L_3^2 = 24^2 + (a + 2c)^2$

Die folgenden Ungleichungen sind äquivalent:
$L_2 < L_1$
$a^2 + 36 + c^2 + 12a + 2ac + 12c + 324 - 36c + c^2 < a^2 + 24a + 144$
$2c^2 - 24c + 216 < 12a - 2ac$
$(c - 6)^2 + 72 < a(6 - c)$
Für $0 \le c < 6$ folgt hieraus:
$6 - c + 72/(6 - c) < a$ (1)
Analoge Äquivalenzen gelten für
$L_3 < L_2$
$24^2 + a^2 + 4ac + 4c^2 < a^2 + 36 + c^2 + 12a + 2ac + 12c + 324 - 36c + c^2$
$2c^2 + 24c + 216 < 12a - 2ac$
$-c - 18 + 216/(6 - c) < a$ (2)
bzw.
$L_3 < L_1$
$24^2 + a^2 + 4ac + 4c^2 < a^2 + 24a + 144$
$4c^2 + 432 < 24a - 4ac$
$-c - 6 + 144/(6 - c) < a$ (3)

Der Vergleich von (1), (2) und (3) ergibt: Je näher der Startplatz der Spinne an der Seitenflächenmitte liegt, desto größer muss die Länge des Raumes sein, damit L_3 die kürzeste Weglänge ist.

Sitzt die Spinne im Mittelpunkt der Seitenfläche, so ist immer der Weg 1 der kürzeste.

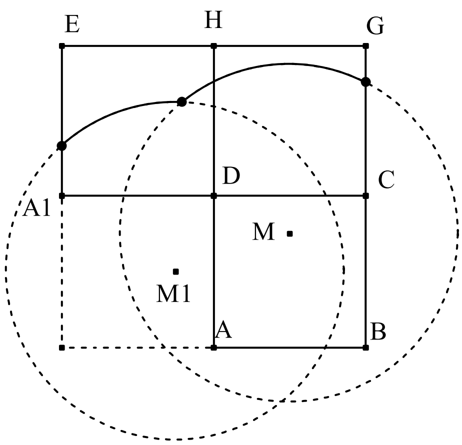
Für c=1 (Aufgabe von DUDENEY) muss a > 24,2 sein. Für a = 24 und c = 1 gilt: $L_3 < L_2 < L_1$.

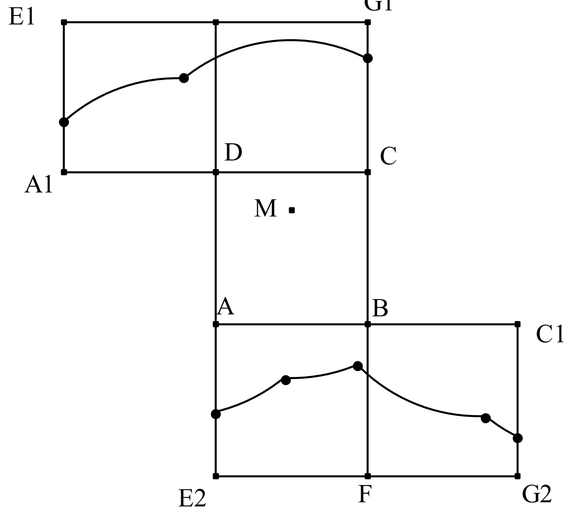
Aufgabe 1.2.1.1(9):

a) Berechne allgemein die Längen der drei verschiedenen, "kürzesten" Wege auf einem Quader (Länge = a, Breite = Höhe = b), wobei die Spinne im Mittelpunkt B der kleineren Seite der Grundfläche sitzt und die Fliege diametral gegenüber. Ordne die Längen der Größe nach in Abhängigkeit von a und b.
b) Löse diese Aufgabe auch für einen Quader (Länge a, Breite b, Höhe c mit a < b < c), wenn die Spinne in einer Ecke der Grundfläche sitzt und die Fliege diametral gegenüber zunächst für a = 7, b = 10, c = 14 und dann allgemein.

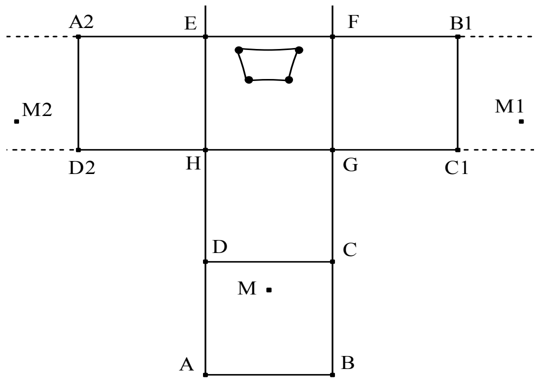
1.2.2 " Kreise " auf der Quaderoberfläche

Beispiel 1.2.2.1: Gegeben ist ein Würfel mit der Kante 4cm. In der Grundfläche ABCD liegt der Punkt M im Abstand 1cm und 2cm von zwei benachbarten Kanten (vgl. die Zeichnungen). Gesucht sind alle Punkte auf der Oberfläche, deren Entfernung 4,5cm vom Punkt M beträgt. Die Entfernung wird hierbei als kürzester Weg auf der Oberfläche des Würfels definiert. Der Weg kann über zwei oder drei Seitenflächen führen. In der linken Figur werden die Punkte in den Seitenflächen A_1DHE und DCGH konstruiert. In der rechten Figur erhält man analog die gesamte "Kreisfigur" für alle Seitenflächen.





Um die gesuchten Punkte in der Seitenfläche A_1DHE zu finden, dreht man die Grundfläche mit dem Punkt M um D um 90° im Uhrzeigersinn und erhält M_1. Von M_1 kommt man über zwei, von M über drei Seitenflächen in die Fläche A_1DHE. Bei jeder Seitenfläche gibt es drei Möglichkeiten für den Kreismittelpunkt. Es ist jeweils zu prüfen, welche Kreise in der betreffenden Seitenfläche liegen. Analog geht man für die anderen Seitenflächen vor.



Aufgabe 1.2.2.1(7): Gesucht sind bei den Vorgaben des Beispiels 2.2.1 alle Punkte, deren Entfernung 7,5 cm vom Punkt M beträgt. Für die Kreispunkte in der Deckfläche sind immer alle Wege zu untersuchen, die über drei , vier oder fünf Flächen führen können. Im gewählten Beispiel kommen Wege von M in die Seitenfläche EFGH über vier oder fünf Flächen nicht zur Auswirkung, da sie nur zu Punkten führen, die von einem Weg über drei Flächen bereits mit kürzerer Weglänge erreichbar sind. *Zeige:* Der "Kreis" mit dem Radius 7,5cm besteht aus vier Kreisbögen mit den Mittelpunkten M, M_1, M_2 und M_3, was in der nebenstehenden Zeichnung fehlt.

Aufgabe 1.2.2.2(7): Gegeben ist ein Würfel mit der Seitenlänge 4cm. Zeichne um M die "Kreise" auf der Oberfläche des Würfels mit den Radien 2,5 cm, 5,0 cm und 7,5 cm, wenn M auf einem Seitenmittelpunkt (auf einem Eckpunkt) der Grundfläche liegt.

Aufgabe 1.2..2.3(7): Gegeben ist ein Quader (Länge 6,0 cm , Breite 4,0 cm , Höhe 2,0 cm). In der Grundfläche liegt der Punkt M im Abstand 1,0cm von einer längeren und 3,0cm von einer kürzeren Rechteckseite. Zeichne auf einem Quadernetz alle die Punkte ein, deren kürzeste Entfernung von M (gemessen als Weg auf der Quaderoberfläche) 2,5 cm , 4,0 cm und 6,0 cm beträgt.

Aufgabe 1.2.2.4(5):
a) Zeichne alle inkongruenten Netze eines Würfels.
b) Bestimme die Anzahlen aller inkongruenten Netze eines Quaders mit quadratischer Grundfläche und die eines Quaders mit drei verschieden langen Seiten.

Aufgabe 1.2.2.5(5): Zeichne in der Art des Netztyps 8 (siehe Lösung von Aufgabe 1.2.2.4) alle drei Quadernetze mit a = 2,0cm, b = 3,0cm ,c = 4,0cm.

Aufgabe 1.2.2.6(5): Welches der Netze von Aufgabe 1.2.2.4 hat den kleinsten, welches hat den größten Umfang? Berechne diesen allgemein in Abhängigkeit von den Längen der Kanten.

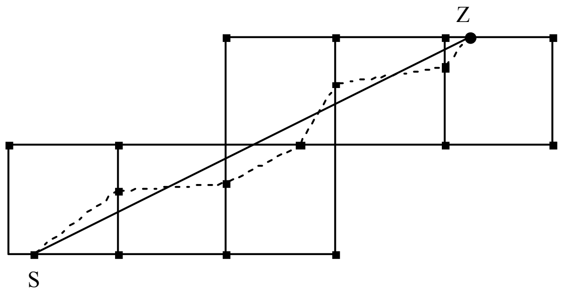
1.2.3 Kürzeste Rundwege

Beispiel 1.2.3.1: Ein Marienkäfer befindet sich auf irgendeiner Seitenfläche eines Würfels an einem beliebigen Punkt. Er will einen Rundweg um den Würfel machen und dabei über das *Innengebiet* von jeder Seitenfläche laufen. Welcher Weg ist der kürzeste und wie lang ist dieser?

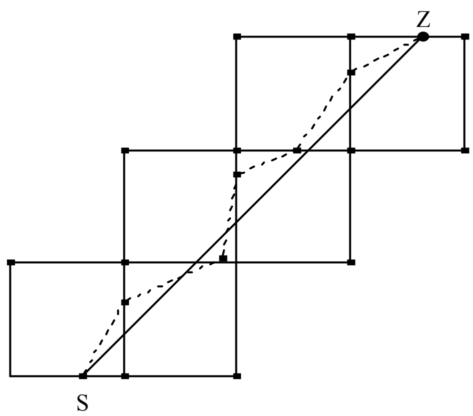
Da jeder Rundweg über sechs Kanten führt, kann man den Startpunkt S auf das Innere einer Kante legen. Man wählt nun ein Netz, in dem eine Strecke vom Startpunkt S zum Zielpunkt Z über alle sechs Flächen führt. Die Punkte Z und S müssen beim Falten des Netzes zum Würfel zusammenfallen. Das ist nur möglich bei den Netzen Nummer 7 und Nummer 8. Die Strecken SZ sind für alle Startpunkte S auf einer Kante zueinander parallel und gleich lang. Jeder Rundweg (in der Zeichnung gestrichelt) vom Startpunkt S endet am Zielpunkt Z. Die Länge des Rundweges wird minimal, wenn sich der Käfer entlang einer Strecke SZ bewegt.

Die Länge des Weges im Netz Nummer 7 ist $2a\sqrt{5}$; die Länge des Weges im Netz Nummer 8 ist $3a\sqrt{2}$.

Der Rundweg im Netz Nummer 8 ist kürzer. Im Folgenden wird immer ein Rundweg im Netz 8 zugrunde gelegt.



Netz 7



Netz 8

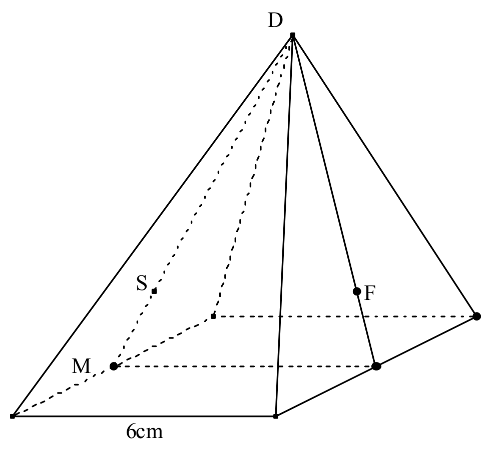
Für einen beliebigen Startpunkt auf einer Seitenfläche muss sich der Käfer immer diagonal in einer Fläche bewegen. Es gibt also im Allgemeinen durch einen Punkt auf der Würfeloberfläche zwei kürzeste Wege, da sich der Käfer beim Start in etwa parallel zu einer der beiden Flächendiagonalen bewegen kann.
Befindet sich der Startpunkt auf einer Flächendiagonale, so gibt es nur einen kürzesten Weg über die Innengebiete der sechs Flächen, nämlich parallel zur anderen Flächendiagonale. Ist S der Mittelpunkt einer Seitenkante, so ist der Rundweg ein regelmäßiges Sechseck (siehe Aufgabe 2.3.1). Auf der Würfeloberfläche gibt es also vier verschiedene regelmäßige Sechsecke. Parallel zu diesen regelmäßigen Sechsecken gibt es gleichwinklige Sechsecke, in denen die Summe der Längen benachbarter Seiten gleich $a\sqrt{2}$ ist.
Befindet sich der Käfer im Mittelpunkt einer Seitenfläche, so gibt es keinen Rundweg in der geforderten Form.

Aufgabe 1.2.3.1(9): Zeichne in ein Schrägbild eines Würfels den kürzesten Rundweg durch die Mitten von Seitenkanten. Beweise, dass alle Winkel gleich 120° sind und dass das Sechseck, das sie bestimmen, ein regelmäßiges, ebenes Sechseck ist in einer Ebene senkrecht zu einer Raumdiagonale. Bastle ein Würfelmodell, auf das du den kürzesten Rundweg einzeichnest.

Aufgabe 1.2.3.2(9): Beweise anhand eines Quadernetzes in der Form von Netztyp 8 beim Würfel, dass der kürzeste Rundweg auf einem Quader (Seitenlängen: a, b und c) nicht kürzer als $(a + b + c)\sqrt{2}$ sein kann.

a) Beweise, dass auf einem Quader (Seitenlängen a = b, c) ein derartiger Rundweg nur existiert, wenn $b < 2c$. Kennzeichne auf einem Quader mit a = 2,0 cm und c = 3,0 cm alle Punkte, für die ein kürzester Rundweg der Länge $L = (2a + c)\sqrt{2}$ möglich ist.
b) Kennzeichne auf der größten Seitenfläche eines Quaders mit a = 4,0 cm, b = 3,0 cm, c = 2,0 cm alle Punkte, für die ein kürzester Rundweg der Länge L möglich ist.

Aufgabe 1.2.3.3(9 oder 10): Gegeben ist eine gerade, quadratische Pyramide (Grundkante 6,0cm, Seitenflächenhöhe $|\overline{MD}|$ = 6,0 cm). Auf der Symmetrieachse einer Seitenfläche liegt der Punkt S so, dass $|\overline{MS}|$ = a cm. Auf der Symmetrieachse der gegenüberliegenden Seitenfläche liegt in gleicher Höhe über der Grundfläche der Punkt F.



a) Konstruiere und berechne den kürzesten Weg von S nach F für a = 0,5 cm und für a = 2,5 cm. Zeichne auf ein vollständiges Pyramidennetz für a = 2,5 cm den kürzesten Weg ein.

b) Konstruiere und berechne a so, dass die kürzesten Wege über die Grundfläche und über die Seitenflächen gleich lang werden.

Aufgabe 1.2.3.4(9 oder 10): Gegeben ist die Pyramide von Aufgabe 1.2.3.3 mit $\left|\overline{MD}\right|$ = 9,0 cm, quadratischer Grundfläche mit der Kantenlänge 6,0 cm und $\left|\overline{MS}\right|$ = a. Konstruiere und berechne die Länge des kürzesten Rundweges vom Punkt S über die vier Seitenflächen zurück nach S.

Aufgabe 1.2.3.5(9): Zeichne die beiden inkongruenten Netze eines regelmäßigen Tetraeders mit der Seite a. In eines von diesen lassen sich die Spuren der kürzesten Rundwege, die durch das Innengebiet der vier Seitenflächen führen, einzeichnen. Bestimme Länge und Form der kürzesten Rundwege. Zeichne in ein Schrägbild eines Tetraeders einen kürzesten Rundweg durch einen Seitenmittelpunkt ein. Wie viele kürzeste Rundwege gibt es durch einen beliebigen Punkt auf der Tetraederoberfläche? Veranschauliche die Rundwege an einem zum Tetraeder gefaltetes Netz.

Aufgabe 1.2.3.6(9): Bestimme den kürzesten Rundweg auf einem regelmäßigen Oktaeder mit der Kantenlänge a. Suche ein zur Bestimmung eines kürzesten Rundwegs, der über alle Seitenflächen geht, ein geeignetes Oktaedernetz. Beschreibe die Form des Rundwegs, der durch einen Seitenpunkt verläuft, der die Seite im Verhältnis 1:3 teilt.

Aufgabe 1.2.3.7(10): Gegeben ist ein gerader Kreiskegel (Grundkreisradius 2,0 cm, Mantellinie 6,0 cm). Auf einer Mantellinie sitzt ein Käfer 3,0 cm von der Spitze entfernt. Er will einmal um den Kegel herum laufen und zum Ausgangspunkt zurückkehren. Zeichne das Netz des Kegelmantels, falte den Kegel und überlege dir an diesem Modell die folgenden Fragen: Wie verläuft der kürzeste Weg und wie lang ist dieser? Wie nahe kommt der Käfer der Spitze? Ist der kürzeste Weg eine Ellipse? Liegt dieser Weg in einer Ebene?

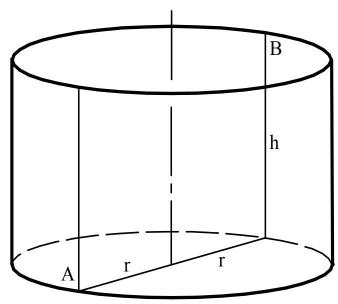
Aufgabe 1.2.3.8(9): Gegeben ist ein gerader Kegelstumpf (R = 12,0 cm, r = 6,0 cm, Mantellinie s = 24,0 cm). Ein Käfer sitzt auf dem Grundkreis im Punkt A einer Mantellinie AB mit dem Mittelpunkt M. Er will um den Kegelstumpf herumkrabbeln und dabei langsam an Höhe gewinnen, bis er schließlich zum Punkt M gelangt.

a) Wie lang ist der kürzeste Weg vom Punkt A zum Punkt M, wenn der Käfer dabei den Kegelstumpf einmal umrundet? Konstruktion auf dem Kegelstumpfmantel!
b) Warum ist dieser Weg aber nicht im Sinne des Käfers?

Aufgabe 1.2.3.9(9): Gegeben ist ein gerader Kegelstumpf (R = 6,0 cm, r = 2,0 cm, Mantellinie s = 48,0 cm). Ein Käfer sitzt auf dem Grundkreis im Punkt A einer Mantellinie AD, auf der die Punkte B und C die Strecken $\left|\overline{AB}\right| = \left|\overline{BC}\right| = \left|\overline{CD}\right|$ bilden. Der Käfer will auf dem kürzesten Weg dreimal um den Kegelstumpf herumkrabbeln und zwar über die Punkte B und C zum Punkt D. Konstruiere den kürzesten Weg und berechne seine Länge.

Aufgabe 1.2.3.10(9): Ein zylindrisches Wasserglas (Umfang 24,0cm , Höhe 16,0cm, die Dicke ist zu vernachlässigen) ist gegeben. Auf der Außenseite 2,0cm unterhalb des oberen Randes sitzt ein Marienkäfer; auf der Innenseite 2,0cm über dem unteren Rand sitzt ein zweiter Marienkäfer so, dass die direkte Verbindungslinie der beiden Käfer die Symmetrieachse des Wasserglases schneidet. Berechne den kürzesten Weg von einem Käfer zum anderen.

Aufgabe 1.2.3.11(8): In einem zylindrischen Wasserglas (Radius r, Höhe h) will ein Käfer A auf dem kürzesten Weg zum Käfer B krabbeln (siehe die Skizze). Zwei junge Mathematiker Matze und Geo überlegen. Matze sagt: „Der kürzeste Weg ist über den Durchmesser und dann senkrecht hoch“. Geo sagt: „Man kann sich die Mantelfläche längs einer Senkrechten aufgeschnitten denken und der Käfer kann dann in der Mantelfläche schräg hoch krabbeln“. Entscheide, wer Recht hat.



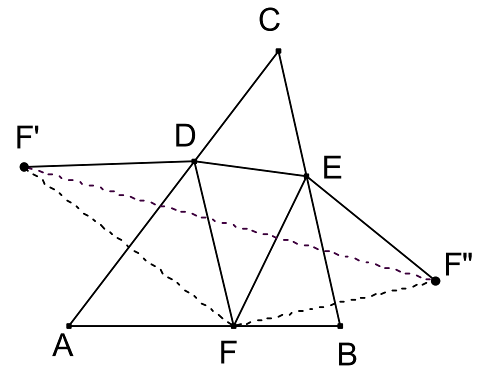
1.3. Einbeschriebene Vielecke mit minimalem Umfang

1.3.1 Das Problem von FAGNANO

Beispiel 1.3.1.1: Einem spitzwinkligen Dreieck ABC ist ein Dreieck DEF mit minimalem Umfang einzubeschreiben, wobei auf jeder Dreiecksseite des Dreiecks ABC eine Ecke des Dreiecks DEF liegt.

Das Problem wurde 1775 von FAGNANO gestellt und mithilfe der Differenzialrechnung gelöst.

Vorüberlegung: Man legt einen Punkt F beliebig auf AB fest und sucht Punkte D und E auf AC und BC so, dass das Dreieck DEF minimalen Umfang besitzt.



Zunächst wählt man beliebige Punkte D und E auf AC und BC. Den Umfang des Dreiecks DEF erhält man als Streckenzug F'DEF", wobei F' und F" die Spiegelpunkte vom Punkt F an den Seiten AC und BC sind.

Man erhält also zu einem fest auf der Seite AB gewählten Punkt F ein Dreieck DEF mit minimalem Umfang, wenn die Punkte D und E auf der Strecke F'F" liegen.
An welcher Stelle muss ein Punkt F auf der Seite AB gewählt werden, damit der Umfang des Dreiecks DEF ein absolutes Minimum wird?

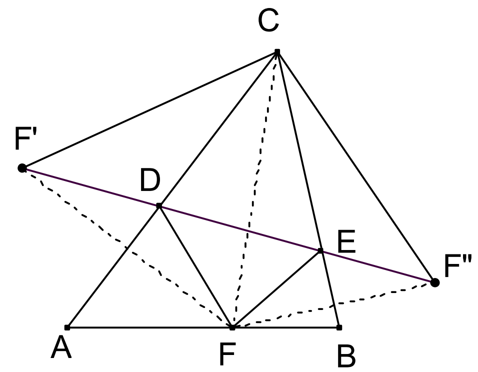
Lemma 1.3.1.1: Das Dreieck F'CF" ist gleichschenklig mit dem Winkel F'CF" = 2γ unabhängig von der Lage des Punktes F.

Beweis: Da F' und F" die Spiegelpunkte von Punkt F an den Seiten AC und BC des Dreiecks ABC sind, folgt:

$$\left|\overline{CF'}\right| = \left|\overline{CF}\right| = \left|\overline{CF''}\right| \qquad (1)$$

$$\angle F'CA = \angle ACF, \quad \angle FCB = \angle BCF'' \qquad (2)$$

Hieraus folgt die Behauptung.



Der Umfang des Dreiecks DEF wird umso kleiner, je kleiner die Länge der Strecke F'F" ist. Diese wird am kleinsten, wenn die Strecke FC am kleinsten wird. Dies tritt ein, wenn F der Fußpunkt der Höhe h_c ist. Da diese Überlegungen auch für einen Ausgangspunkt auf den Seiten AC und BC gelten, folgt:

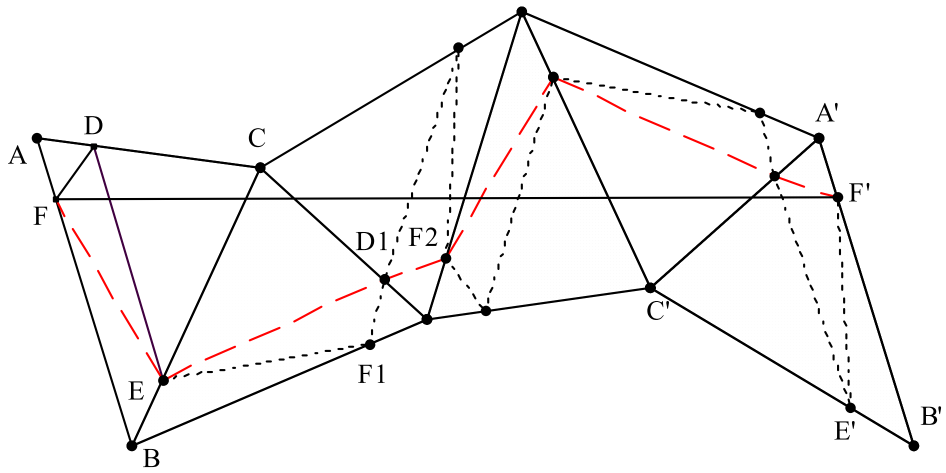
Satz 1.3.1.2: Das einem spitzwinkligen Dreieck einbeschriebene Dreieck mit kleinstem Umfang ist das Höhenfußpunktdreieck.

Ist das Dreieck ABC rechtwinklig mit der Hypotenuse AB, so entartet das Dreieck F'CF" zu einer Strecke und das Dreieck DEF mit minimalem Umfang zur Doppelstrecke h_c.
Ist das Dreieck ABC stumpfwinklig mit $\gamma > 90°$, so bildet die Doppelstrecke h_c ebenfalls eine bessere Lösung als jedes andere einbeschriebene Dreieck.

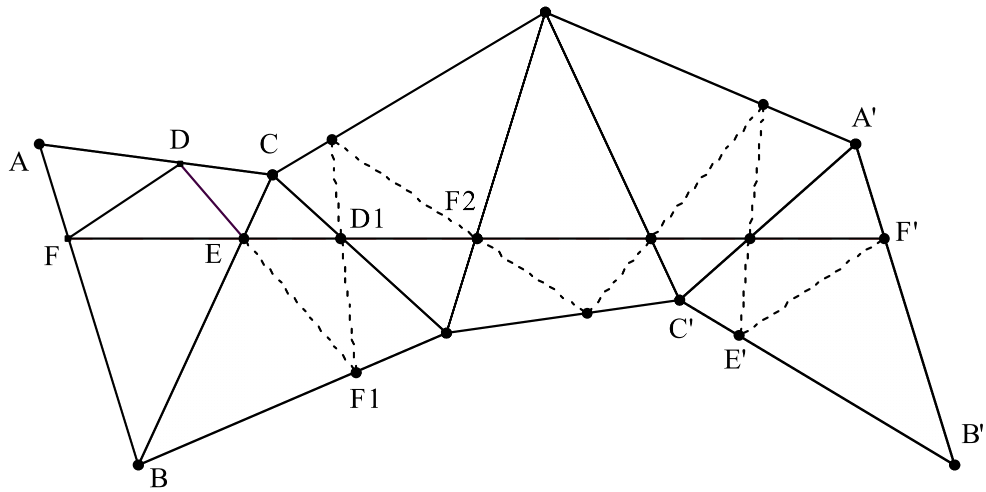
1.3.2 Darstellung des Umfangs des Höhenfußpunktdreiecks als Strecke

Ein Dreieck ABC mit beliebig einbeschriebenem Dreieck DEF wird fünfmal nacheinander an aufeinander folgenden Dreiecksseiten gespiegelt. Die Seite AB wird bei den ersten zwei Spiegelungen um 2β + 2α im Uhrzeigersinn gedreht, bei der dritten Spiegelung liegt sie fest auf der Achse und bei den beiden nächsten wird sie um 2β + 2α zurückgedreht. Die Seiten AB und A'B' sind also parallel. Die Seiten eines beliebigen einbeschriebenen

Dreiecks DEF lassen sich dabei zu einem Streckenzug FF' (siehe - - - - - -) anordnen, dessen Länge der doppelte Umfang des Dreiecks DEF ist. Hält man F auf AB fest und variiert die Punkte D und E, so bleibt trotzdem die Lage von F' fest. Verschiebt man stattdessen F auf AB, so sind alle Strecken FF' zueinander parallel. Jeder Streckenzug FF' lässt sich als zweifacher Rundweg im Dreieck ABC deuten.



Der Umfang des Dreiecks DEF wird minimal, wenn aus dem Streckenzug eine Strecke FF' wird. Dies tritt genau dann ein, wenn das Dreieck DEF Höhenfußpunktdreieck des Dreiecks ABC ist; denn dann halbiert die Höhe AE des Dreiecks ABC den Winkel FED. Die Punkte F, E und D_1 liegen auf einer Geraden. Analoges gilt für die nächsten Spiegelungen nur, wenn FED Höhenfußpunkt des Dreiecks ABC ist. In diesem Fall entspricht die Strecke FF' einer doppelten Überdeckung des Umfangs des Höhenfußpunktdreiecks.



Wählt man ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit $\gamma = 90°$, so liegen die Punkte D, E und F sowie ihre Spiegelpunkte nur dann auf der Strecke FF', wenn D, E und F auf der Höhe h_c liegen.
Für ein stumpfwinkliges Dreieck ABC liegt ein Teil der Strecke FF' immer außerhalb der Figur. Dies lässt sich gut mit einem dynamischen Geometrieprogramm demonstrieren.

Verschiebt man die Strecke FF' parallel, wobei F auf der Seite AB entlanggleitet, so entspricht dies einem zweifachen Umlauf im Dreiecksinnern, dessen Teilstrecken parallel zu den Seiten des Höhenfußpunktdreiecks verlaufen. Dieser zweifache Rundlauf hat die doppelte Länge des Umfangs des FAGNANOdreiecks (siehe Aufgabe 3.2.2c).

Satz 1.3.2.1: In jedem spitzwinkligen Dreieck sind die Höhen Winkelhalbierende im Höhenfußdreieck.

> *Aufgabe 1.3.2.1(10):* Gegeben ist das spitzwinklige Dreieck ABC mit seinem Höhenfußpunktdreieck DEF (D auf BC, E auf AC, F auf AB).

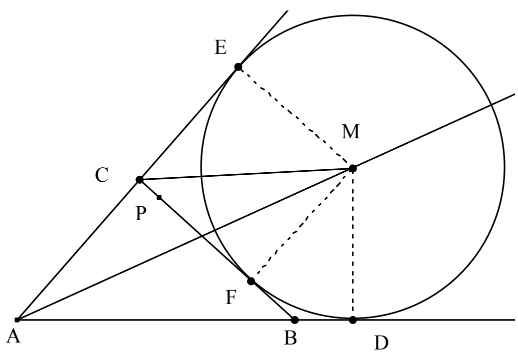
a) Beweise, dass die vier Dreiecke AFE, BDF, CED und ABC ähnlich sind.
b) Beweise, dass die Höhen des Dreiecks ABC die Winkelhalbierenden des Dreiecks DEF sind.
c) Leite ausgehend vom Ergebnis der Aufgabe a) eine Formel für den Umfang u des Höhenfußpunktdreiecks her. *Ergebnis:* $u = a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma$
d) Stelle ausgehend von der Beweisfigur des FAGNANOdreiecks drei weitere Formeln für den Umfang u auf. *Teilergebnis:* Eine lautet: $u = 2b \sin \alpha \sin \gamma$]
e) Zeige durch trigonometrische Umformungen die Äquivalenz aller vier Formeln.

Aufgabe 1.3.2.2(8): Ein Junge steht im Innern eines gleichseitigen Dreiecks.
a) Er macht einen Rundlauf, bei dem er alle drei Seiten berührt. Sein Freund, der ihn beobachtet hat, sagt: „Du hast dich gut aufgestellt; denn dein Rundlauf war der kürzeste, der möglich ist“. An welchem Punkt begann der Rundlauf? Wie lang war er?
b) Jetzt macht der Junge einen „zweifach minimalen Rundgang“ im gleichseitigen Dreieck, d. h. er macht einen Rundlauf, bei dem er jede Seite zweifach trifft. Wo kann er starten, welche verschiedenen Möglichkeiten gibt es und wie lang ist sein Weg?

1.3.3 Dreieck im Winkelfeld

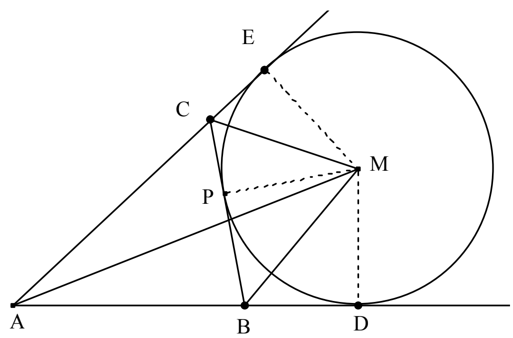
Gegeben ist ein Winkel α mit dem Scheitel A und ein Punkt P im Winkelfeld von α. Eine Gerade g durch den Punkt P schneidet die Schenkel des Winkels α in den Punkten B und C. Wie muss man die Gerade g wählen, damit das Dreieck ABC minimalen Umfang besitzt?

Lösung:
Man zeichnet durch den Punkt P eine beliebige Gerade BC und den Ankreis zur Seite BC. Der Ankreis berührt die Seiten des Dreiecks ABC oder deren Verlängerungen in den Punkten D, E und F. Für den Umfang u des Dreiecks ABC gilt: u = AD + AE. Der Umfang wird minimal, wenn der Radius des Ankreises möglichst klein wird. Dies ist der Fall, wenn PM Radius des Umkreises ist.



Aufgabe 1.3.3.1(10): Konstruiere zu einem gegebenen Winkel α in A und einem im Winkelfeld gegebenen Punkt P das Dreieck ABC mit minimalem Umfang, auf dem P liegt.

Aufgabe 1.3.3.2(8): Der Kreis um M berührt in E bzw. D zwei sich in A schneidende Geraden. Durch P auf dem kürzeren Kreisbogen ED legt man eine Tangente BC (siehe die Zeichnung). Beweise:
a) Alle Dreiecke ABC haben den gleichen Umfang.
b) Der Winkel BMC ist für alle Dreiecke ABC gleich groß. Berechne dessen Größe in Abhängigkeit von der Größe des Winkels BAC.



1.3.4 Einbeschriebene Vierecke

Beispiel 1.3.4.1: Einem Quadrat soll ein Quadrat mit minimalem Umfang einbeschrieben werden.

Ein einbeschriebenes Quadrat EFGH entsteht wenn die Punkte E, F, G und H die Quadratseiten im gleichen Verhältnis teilen. Setzt man $a = |\overline{AB}|$ und $x = |\overline{AE}|$, dann wird der Umfang u minimal , wenn $|\overline{HE}|$ minimal wird.

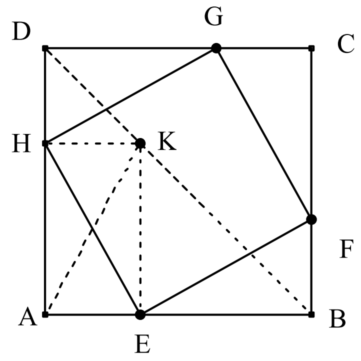
Ergänzt man die Punkte A, E und H zum Rechteck AEKH, dann liegt K immer auf der Diagonalen BD, da das Dreieck KHD gleichschenklig rechtwinklig ist. Weiterhin gilt: $|\overline{AK}| = |\overline{HE}|$

Hieraus folgt: Der Umfang u des einbeschriebenen Quadrats wird minimal, wenn AK das Lot auf BD ist und damit gilt: $|\overline{AH}| = |\overline{HD}| = \frac{1}{2}a$

Oder mit Analysis findet man:

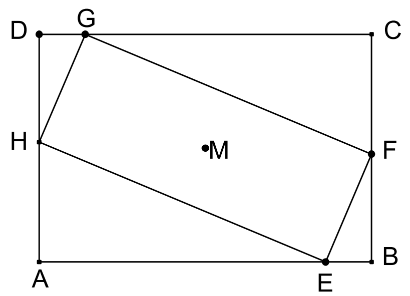
$|\overline{HE}|^2 = f(x) = x^2 + (a - x)^2$,

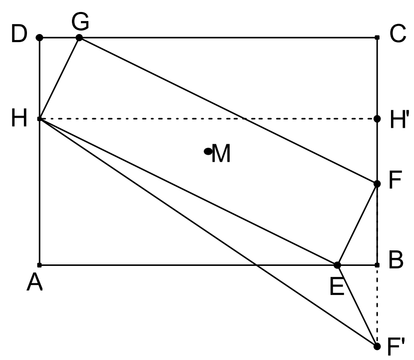
$f'(x) = 2x - 2(a - x) = 0$ und damit: $x = \frac{1}{2}a$



Beispiel 1.3.4.2: Warum kann einem Rechteck kein Rechteck mit minimalem Umfang einbeschrieben werden?

Man erhält alle einbeschriebenen Rechtecke EFGH, indem man auf der kürzeren Rechtecksseite einen Punkt H beliebig wählt, einen Kreis um den Mittelpunkt M des Rechtecks mit $r = |\overline{MH}|$ zeichnet. Die Schnittpunkte des Kreises mit den Rechtecksseiten bestimmen zwei einbeschriebene Rechtecke. In der Figur ist nur eines eingezeichnet.





Lösung:
Man spiegelt F an B und erhält F'; die Parallele durch H zu AB schneidet BC in H'.
Der halbe Umfang des Rechtecks EFGH ist $|\overline{HE}| + |\overline{EF}| = |\overline{HE}| + |\overline{EF'}|$.

Nun gilt $|\overline{H'F'}| = |\overline{BC}| = b$ und damit $|\overline{HE}| + |\overline{EF'}| > |\overline{HF'}|$, da E nie auf HF' liegen kann. Damit folgt:

$|\overline{HE}| + |\overline{EF}| > |\overline{HF'}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Das Rechteck EFGH entartet also zur doppelten Diagonale BD.

Aufgabe 1.3.4.1(9): Einem spitzwinkligen (rechtwinkligen, stumpfwinkligen) Dreieck ABC ist ein Quadrat mit minimalem Umfang so einzubeschreiben dass eine Quadratseite auf einer Dreiecksseite liegt.

Aufgabe 1.3.4.2(8): Im Sehnenviereck ABCD ist E der Diagonalenschnittpunkt. Vom Punkt E werden die Lote auf die Seiten des Sehnenvierecks gefällt. Die Fußpunkte P, Q , R und S bestimmen ein einbeschriebenes Viereck. Beweise, dass das Viereck PQRS minimalen Umfang im Vergleich zu allen anderen einbeschriebenen Vierecken hat. *Hinweis:* Spiegle Viereck ABCD nacheinander an drei aufeinander folgenden Seiten.

Aufgabe 1.3.4.3(9): Eine 2km lange Straße AB verläuft genau in West-Ost-Richtung. Von B verläuft eine zweite Straße nach Norden. Zwei Radfahrer Max und Emil starten gleichzeitig mit den Geschwindigkeiten 8 m/s bzw. 6 m/s. Max fährt vom Punkt A nach Osten und Emil vom Punkt B nach Norden. Bestimme die kürzeste Entfernung der beiden Radfahrer und berechne den zugehörigen Zeitpunkt.

Aufgabe 1.3.4.4(9): Eine 2km lange Straße AB verläuft genau in West-Ost-Richtung. Von B verläuft eine zweite Straße nach Nord-West. Zwei Radfahrer Max und Emil starten gleichzeitig mit den gleichen Geschwindigkeiten von 8 m/s. Max fährt vom Punkt A nach Osten und Emil vom Punkt B nach Nord-West. Bestimme die kürzeste Entfernung der beiden Radfahrer und berechne den zugehörigen Zeitpunkt.

2. Untersuchungen um den FERMATpunkt

Ein **„kürzestes“ Verbindungssystem von drei Punkten ohne Hilfspunkte** besteht aus 2 Seiten des so gebildeten Dreiecks.

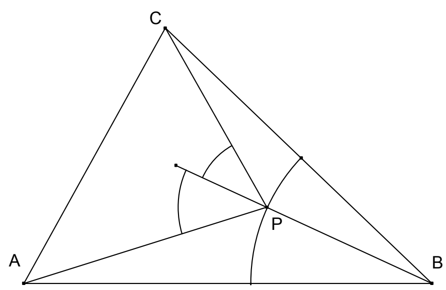
Der französische Mathematiker PIERRE DE FERMAT (1601– 1665) stellte EVANGELISTE TORRICELLI (1608–1647) folgendes Problem, das TORRICELLI auf verschiedene Arten löste.

Satz von FERMAT 2.1: Es gibt im Innern eines jeden Dreiecks, dessen Winkel alle kleiner als 120° sind, genau einen Punkt F so, dass die Summe der Entfernungen von den drei Ecken des Dreiecks minimal ist.

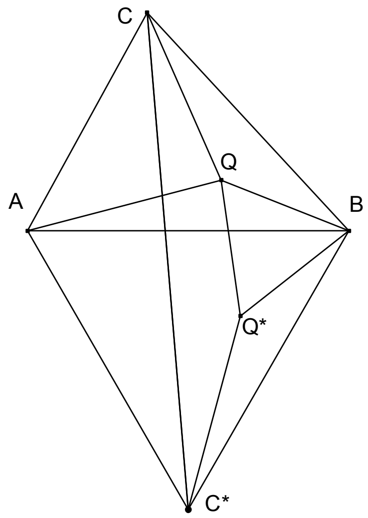
Dieser Punkt F heißt FERMATpunkt. Für diesen Satz folgen nun fünf völlig verschiedene Beweise aus drei Jahrhunderten, die auf bemerkenswerte Weise die Vielfalt mathematischer Lösungsmethoden aufzeigen:

2.1 Fünf Beweise für die Lage des FERMATpunktes

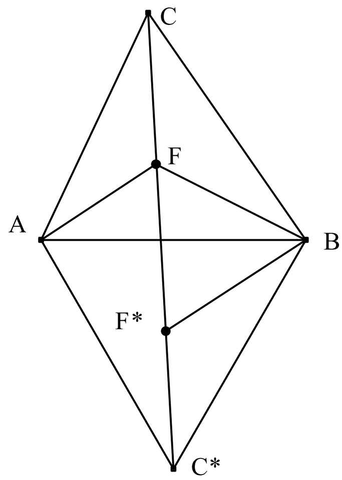
Beweis 1:
Man wählt für BP eine beliebige Länge und sucht auf dem Kreisbogen um B den Punkt P, für den der Streckenzug AP + PC minimal wird. Dies ist der Fall, wenn BP Winkelhalbierende des Winkels APC ist. Hieraus folgt $\angle APB = \angle CPB$.
Führt man die gleiche Überlegung für jede Ecke durch, so folgt: Die Streckensumme wird genau dann minimal, wenn gilt:
$\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = 120°$
P ist also Schnittpunkt von 2 Peripheriewinkelkreisen zu 120° über 2 Dreiecksseiten. Da aber



diese Kreise eine Dreiecksecke gemeinsam haben, gibt es genau einen weiteren Schnittpunkt, der nur im Inneren des Dreiecks ABC liegt, falls alle seine Winkel kleiner als 120^{o} sind.



Beweis 2 nach J. E. HOFMANN:
Wählt man im Dreieck ABC einen Punkt Q beliebig im Innern, verbindet ihn mit den Ecken des Dreiecks ABC und dreht das Dreieck AQB um B um 60° im Gegenuhrzeigersinn, so sind die Dreiecke BQQ* und ABC* gleichseitig. Die Streckenzüge CQ + QB + QA und CQ +QQ* + Q*C* haben gleiche Länge, wobei der zweite unabhängig von der Wahl von Q immer am gleichen, festen Punkt C* endet. Die Länge dieses Streckenzuges wird minimal, wenn Q und Q* auf CC* liegen. Dann wird Q zum FERMATpunkt F. Dies lässt sich leicht erreichen. Diese Figur – manchmal auch FERMATfigur genannt – zeigt Folgendes:



BFF* ist gleichseitig, also ist $\angle BFC^* = 60°$ und deshalb $\angle BFC = 120°$ bzw. $\angle BF^*C^* = 120°$. Da die Dreiecke ABF und C*BF* drehsymmetrisch liegen, ist also auch

$\angle AFB = 120^{o}$. (1)

ABC* ist gleichseitig und deshalb

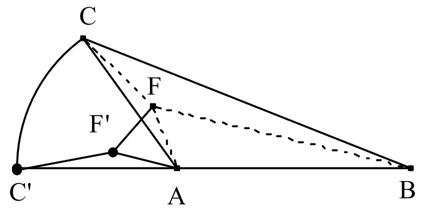
$\angle AC^*B = 60^{o}$. (2)

Aus (1) und (2) folgt:

Das Viereck AFBC* ist ein Sehnenviereck. (3)

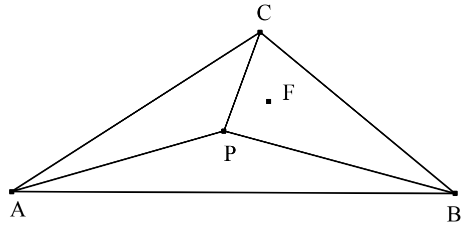
Damit hat man über den Umkreis des Dreiecks ABC* einen weiteren Konstruktionsweg für F.

Es wird noch die Existenzfrage für F geklärt:
Gibt es in jedem Dreieck einen Punkt F so, dass FA, FB und FC jeweils 120°–Winkel einschließen?



Annahme: Im Dreieck ABC mit $\alpha > 120°$ gibt es einen Punkt F, für den $|\overline{FA}|+|\overline{FB}|+|\overline{FC}|$ minimal wird. Man dreht das Dreieck AFC um A gegen den Uhrzeiger so, dass C' auf die Gerade AB fällt. Der Drehwinkel FAF' ist nach Annahme kleiner als 60°. Also gilt: $|\overline{FF'}| < |\overline{AF}|$, $|\overline{CF}| = |\overline{C'F'}|$.
Damit erhält man:
$|\overline{FA}|+|\overline{FB}|+|\overline{FC}| > |\overline{FF'}|+|\overline{FB}|+|\overline{F'C'}| > |\overline{C'B}| = |\overline{AB}| + |\overline{AC}|$, letzteres nach Konstruktion. Das ist aber ein Widerspruch zur Annahme, dass $|\overline{FA}|+|\overline{FB}|+|\overline{FC}|$ minimal ist.

Aufgabe 2.1.1(8): Finde die kleine Lücke im folgenden Beweis und schließe diese.



Beweis zur Existenz nach PETER SCHREIBER:
Gegeben ist ein Dreieck ABC mit $\gamma > 120°$.
Annahme: Im Innern des Dreiecks ABC gibt es einen Punkt P so, dass gilt
$|\overline{PA}|+|\overline{PB}|+|\overline{PC}| < |\overline{AC}|+|\overline{BC}|$.
Da $\angle APB > 120°$ ist, muss mindestens einer der

Winkel $\angle CPA$ oder $\angle BPC$ kleiner als 120° sein. Es sei dies etwa $\angle BPC$. Dann lässt sich für das Dreieck BPC ein innerer Minimalpunkt F konstruieren so, dass

$$|\overline{FP}| + |\overline{FB}| + |\overline{FC}| < |\overline{CP}| + |\overline{BP}|.$$

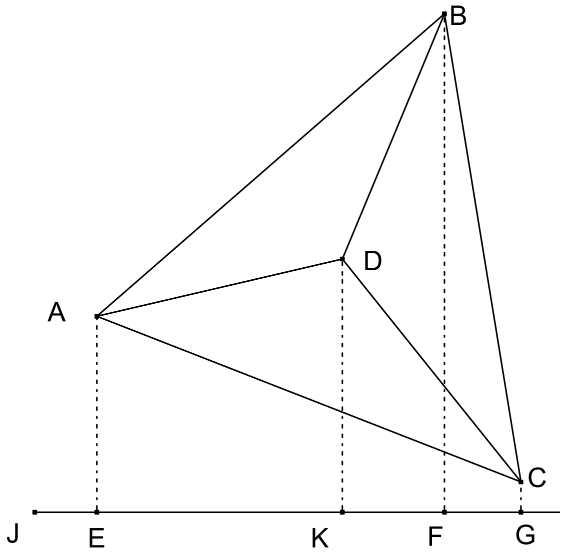
Weiterhin gilt:

$$|\overline{AF}| < |\overline{AP}| + |\overline{PF}|$$

Die Addition der Ungleichungen ergibt: $|\overline{FA}| + |\overline{FB}| + |\overline{FC}| < |\overline{PA}| + |\overline{PB}| + |\overline{PC}|$

Für jeden Punkt $P \neq C$ im Innern des Dreiecks ABC gibt es also ein kürzeres Verbindungssystem.
Für jeden Punkt außerhalb des Dreiecks ABC gilt dies trivialerweise auch. Also wird C im Dreieck ABC mit $\gamma > 120°$ FERMATpunkt.

Beweis 3:
Am 21. November 1816 diskutierte vor der königlichen Akademie der Wissenschaften in Berlin der Extraordinarius JOHANN PHILIPP GRUSON (1768-1857) „Eine geometrische Aufgabe über Minima". Dieser Beweis folgt nun gekürzt mit den Originalbezeichnungen und originaler Rechtschreibung von 1816/17.
Bezeichnungen : A(a|A), B(b|B), C(c|C), D(x|y), α, β, γ sind die Entfernungen von A, B und C vom Punct D.
Dann gilt im rechtwinkligen Triangel:



1) $(x - a)^2 + (y - A)^2 = \alpha^2$
2) $(x - b)^2 + (y - B)^2 = \beta^2$
3) $(x - c)^2 + (y - C)^2 = \gamma^2$
4) $u = \alpha + \beta + \gamma$ u soll nun ein Minimum werden.

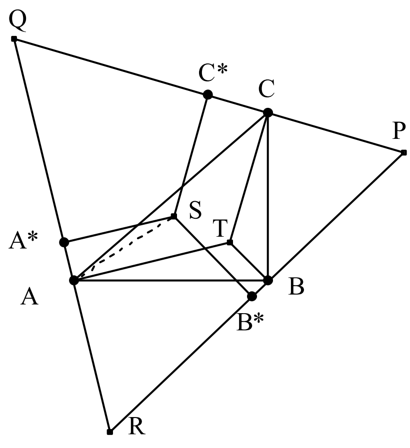
5) $\frac{du}{dx} = \frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dx} + \frac{d\gamma}{dx} = 0$ 6) $\frac{du}{dy} = \frac{d\alpha}{dy} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dy} = 0$

Differentiirt man die Gleichungen 1) bis 3) ebenfalls nach x und y und setzt in 5) und 6) ein, so folgt:

$$\frac{x-a}{\alpha} + \frac{x-b}{\beta} + \frac{x-c}{\gamma} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{y-A}{\alpha} + \frac{y-B}{\beta} + \frac{y-C}{\gamma} = 0$$

Die drei Glieder der ersten Gleichung sind die Sinus der Winkel, welche von dem gesuchten Punct D an die drei gegebenen Puncte gezogenen geraden Linien mit der Ordinate y machen, und die drei Glieder der zweiten Gleichung sind die Cosinus eben dieser Winkel. Bezeichnet man diese Winkel mit α', β', γ', so ist:
7) $\sin\alpha' + \sin\beta' = -\sin\gamma'$
8) $\cos\alpha' + \cos\beta' = -\cos\gamma'$
Quadrieren und Addieren ergibt $1 + 2\cos(\alpha' - \beta') + 1 = 1$. Also ist $\cos(\alpha' - \beta') = -\frac{1}{2}$, d. h.
$\alpha' - \beta' = 120°$ ebenso $\alpha' - \gamma' = 120°$, $\beta' - \gamma' = 120°$. GRUSON zeigt nun noch mittels zweiter Ableitung, dass ein Minimum vorliegt.

Beweis 4 nach TORRICELLI:
TORRICELLI wählt im Innern des Dreiecks ABC den Punkt T so, dass TA, TB und TC bei T gleiche Winkel bilden und zeichnet ein gleichseitiges Dreieck PQR so, dass dessen Seiten auf den Strecken TA, TB und TC senkrecht stehen. Fällt man nun von einem von T verschiedenen Punkt S die Lote auf die Seiten des Dreiecks PQR, so gilt nach dem Satz von VIVIANI (siehe Aufgabe 2.2.5a):

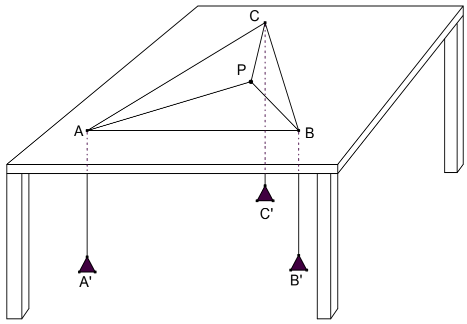


$$|\overline{TA}| + |\overline{TB}| + |\overline{TC}| = |\overline{SA^*}| + |\overline{SB^*}| + |\overline{SC^*}|$$

aber $|\overline{SA^*}| \le |\overline{SA}|$, $|\overline{SB^*}| \le |\overline{SB}|$, $|\overline{SC^*}| \le |\overline{SC}|$,

wobei das Gleichheitszeichen nur einmal stehen kann. Also gilt stets: $|\overline{TA}| + |\overline{TB}| + |\overline{TC}| < |\overline{SA}| + |\overline{SB}| + |\overline{SC}|$

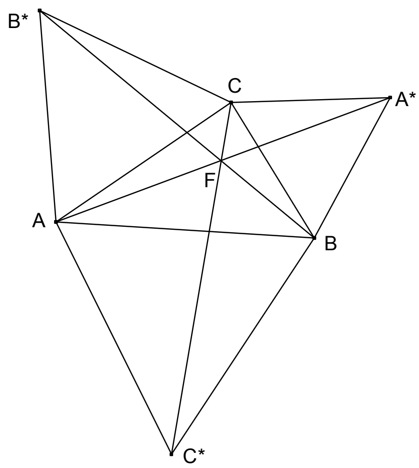
Beweis 5:
Experimentelle Bestimmung des FERMATpunktes:
In den Punkten A, B und C sind Löcher in eine Tischplatte gebohrt. Drei Schnüre sind in P verknotet. Diese werden durch die drei Löcher geführt und mit gleich schweren Gewichten gespannt. Die Gewichte nehmen immer die tiefstmögliche Lage ein, damit die potentielle Energie minimal wird. In dieser Lage ist die Summe der Längen der Schnurstücke oberhalb der Tischplatte am kleinsten. Gleichzeitig sind die drei im Punkt P angreifenden, gleich großen Kräfte im Gleichgewicht. Dies ist nur möglich, wenn die Richtungen der drei Kräfte jeweils einen Winkel von 120° einschließen. Für die praktische Durchführung empfiehlt es sich, die Punkte A, B und C an den Rand des Tisches zu verlegen und die Schnüre über bewegliche Rollen zu führen zur Verringerung der Reibung.



2.2 Konstruktionen des FERMATpunktes

Konstruktion 1:
Man konstruiert über den Dreiecksseiten nach innen die Fasskreisbögen für den Winkel 120°. Diese Fasskreisbögen sind Teilbögen der Umkreise der nach außen über den Dreiecksseiten errichteten gleichseitigen Dreiecke. Die Kreisbögen schneiden sich in einem Punkt, dem FERMATpunkt.

Konstruktion 2 (siehe die nebenstehende Konstruktion):
Man konstruiert die gleichseitigen Dreiecke über den Dreiecksseiten nach außen und verbindet die neuen Ecken A*, B* und C* mit den jeweiligen Dreiecksecken A, B und C.
Z. B. nach Beweis 2 schneiden sich diese drei Verbindungsstrecken im Punkt F und sie bilden miteinander nur 60° - Winkel. Die drei Strecken haben alle die gleiche Länge, die gleich der minimalen Länge des Streckennetzes $|\overline{FA}| + |\overline{FB}| + |\overline{FC}|$ ist.



Aufgabe 2.2.1(9):

a) Gegeben ist das rechtwinklige Dreieck ABC mit der Hypotenuse b. Berechne die Länge des kürzesten Streckennetzes, das die Ecken dieses Dreiecks verbindet, wenn
   1) $\alpha = 60^o$ 2) $\alpha = 45°$ ist.
b) Wie lang ist das kürzeste Streckennetz eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seite c?
c) Berechne für die drei Dreiecke aus a) und b), um wie viel Prozent das Streckennetz mit einem FERMATpunkt kürzer ist als das kürzeste Verbindungssystem ohne Hilfspunkt.

Aufgabe 2.2.2(10): Gegeben ist ein Dreieck ABC, dessen Winkel alle kleiner oder gleich 120° sind. Berechne trigonometrisch die Länge von AA*, BB* und CC*, also die Länge des kürzesten Verbindungssystems der Dreiecksecken und beweise die Äquivalenz der drei Formeln.

Aufgabe 2.2.3(9): Gegeben ist das gleichseitige Dreieck ABC mit seinem Umkreis. Man wählt auf dem kleineren Kreisbogen AB eine Punkt D beliebig. Man beweise, dass $|\overline{CD}| = |\overline{AD}| + |\overline{BD}|$ ist.

Aufgabe 2.2.4(8):

a) Der **Satz von NAPOLEON**: Über den Seiten eines Dreiecks ABC werden nach außen (oder nach innen) die gleichseitigen Dreiecke ABC*, BCA* und CAB* errichtet. Man beweise, dass die Mittelpunkte dieser Dreiecke ein gleichseitiges Dreieck bilden.

b) Verallgemeinerung des Satzes von NAPOLEON auf Vierecke:
Über den Seiten eines Parallelogramms werden nach außen Quadrate errichtet. Man beweise, dass die Mittelpunkte der vier Quadrate wiederum ein Quadrat bilden.

Aufgabe 2.2.5(8): Bestimme alle Punkte im Innern eines Dreiecks ABC, für die die Summe der Längen der drei Lote zu den Seiten minimal wird, wenn das Dreieck ABC
a) gleichseitig ist. b) gleichschenklig ist. c) beliebig ist.

Aufgabe 2.2.6(8): Einem Dreieck ABC ist ein gleichseitiges Dreieck PQR mit maximalem Flächeninhalt umzubeschreiben, wobei A auf QR, B auf RP und C auf PQ liegt.
Hinweis: Suche einen Zusammenhang mit der FERMATfigur.

Aufgabe 2.2.7(10): Über den Seiten AC und BC eines Dreiecks ABC werden nach außen die gleichseitigen Dreiecke ACB_1 und BCA_1 gezeichnet. Der Umkreismittelpunkt U des Dreiecks BCA_1, der Mittelpunkt M von AC und der Punkt B_1 bestimmen ein Dreieck. Beweise, dass dieses Dreieck UMB_1 die Winkel 30°, 60° und 90° besitzt.

Aufgabe 2.2.8(8): Über den Seiten des Dreiecks ABC ($\alpha < 120^\circ$, $\beta < 120^\circ$, $\gamma < 120^\circ$) mit dem FERMAT-punkt werden nach außen die gleichseitigen Dreiecke ABC*, BCA* und CAB* errichtet.

a) Beweise, dass die Länge des kürzesten Verbindungssystems der Punkte A*, B* und C* doppelt so groß ist wie $|\overline{FA}| + |\overline{FB}| + |\overline{FC}|$.

b) Gegeben sind die Punkte A*, B* und C* . Konstruiere das Dreieck ABC.

Aufgabe 2.2.9(9): Ein Haus A hat von einer geradlinig verlaufenden Landstraße 12,00 km Abstand. Ein zweites Haus B auf der gleichen Seite der Straße hat von dieser 10,00 km Abstand. Die Entfernung der Fußpunkte der Lote von diesen zwei Häusern auf die Straße beträgt 10,00 km. Ein Straßensystem mit möglichst geringer Länge soll beide Häuser mit der Landstraße verbinden. Von drei verschiedenen Straßenbaufirmen werden völlig unterschiedliche angeblich kürzeste Verbindungsnetze eingereicht. Überlege, wie diese Vorschläge wohl ausgesehen haben, und bestimme die jeweiligen Längen des Straßennetzes.

Aufgabe 2.2.10(9): Ein Haus A hat von einer geradlinig verlaufenden Landstraße 12,00 km Abstand. Ein zweites Haus B auf der gleichen Seite der Straße hat von dieser $y < 12{,}00$ km Abstand. Die Entfernung der Fußpunkte der Lote von diesen zwei Häusern auf die Straße beträgt x km. Ein Straßensystem mit möglichst geringer Länge soll beide Häuser mit der Landstraße verbinden.

a) Kennzeichne in einem Koordinatensystem die Bereiche für die Lage des Hauses B, für die genau eine der drei Methoden von Aufgabe 2.2.9 das kürzeste Straßensystem erzeugt.

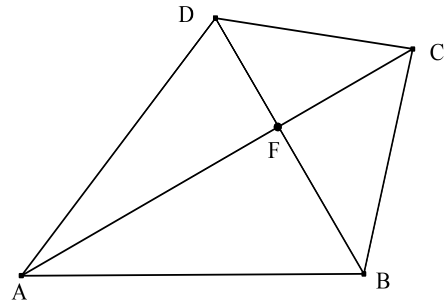
b) Berechne jeweils die kürzeste Länge des Straßensystems für
1) $x = 12$ km und $y = 8$ km.
2) $x = 4$ km und $y = 8$ km.
3) $x = 10$ km und $y = 10$ km.

Aufgabe 2.2.11(9): Die Abwasserkanäle zweier Dörfer A und B sollen an ein großes System angeschlossen werden, das als Kreisring mit dem Radius 5 km einen nahe gelegenen See umgibt. In einem Koordinatensystem ist A(10|0), B(10|4), Kreismittelpunkt M(0|0) und Kreisradius 5.

a) Bestimme die Längen der drei möglichen, "kürzesten" Verbindungssysteme durch Konstruktion und Berechnung.

b) Nun sei B(10|b) mit $b > 0$. Kennzeichne auf der Geraden $x = 10$ die Bereiche für die Lage des Dorfes B, für die genau eine der drei Methoden das kürzeste Rohrsystem erzeugt.

2.3 Der Fermatpunkt im Viereck

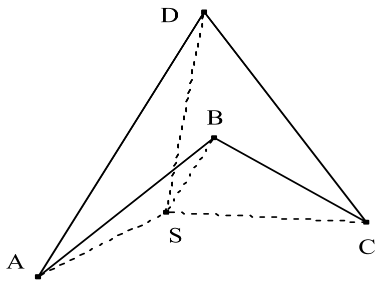


Beispiel 2.3.1:
Gesucht ist im konvexen Viereck ABCD ein Punkt F so, dass $\left|\overline{FA}\right| + \left|\overline{FB}\right| + \left|\overline{FC}\right| + \left|\overline{FD}\right|$ minimal wird.

Die *Lösung* ist der Schnittpunkt F der Diagonalen. Wählt man einen anderen Punkt P, so gilt
$\left|\overline{AP}\right| + \left|\overline{CP}\right| > \left|\overline{AF}\right| + \left|\overline{CF}\right|$ und

$\left|\overline{DP}\right| + \left|\overline{BP}\right| > \left|\overline{DF}\right| + \left|\overline{BF}\right|$.

Ist das Viereck konkav, so liegt F auf der Ecke mit dem überstumpfen Winkel (siehe die 2. Abbildung).

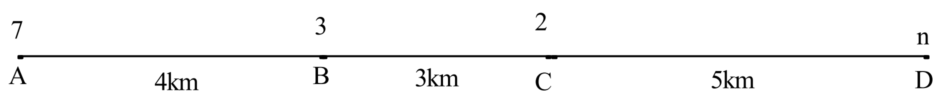


Aufgabe 2.3.1(7): Gegeben ist das Viereck ABCD mit $\beta > 180°$. Beweise, dass für alle Punkte S gilt:
$\left|\overline{AB}\right| + \left|\overline{CB}\right| + \left|\overline{DB}\right| < \left|\overline{SA}\right| + \left|\overline{SB}\right| + \left|\overline{SC}\right| + \left|\overline{SD}\right|$

Aufgabe 2.3.2(7):

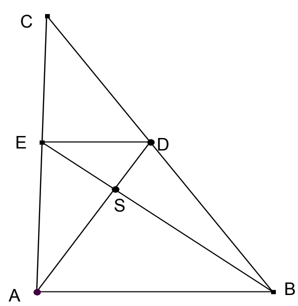
a) Ein Dreieck ABC entartet zu einer Strecke, wobei die Punkte A, B und C in dieser Reihenfolge auf der Strecke liegen. Wo liegt der **Fermat**punkt F, wenn $\left|\overline{AB}\right|$ = 4,0 cm und $\left|\overline{BC}\right|$ = 5,0 cm gilt?
b) Ein Viereck ABCD entartet zu einer Strecke, wobei die Punkte A, B , C und D in dieser Reihenfolge auf einer Strecke liegen. Wo liegt der FERMATpunkt, wenn $\left|\overline{AB}\right|$ = 4,0 cm, $\left|\overline{BC}\right|$ = 5,0 cm und $\left|\overline{CD}\right|$ = 6,0 cm gilt?

Aufgabe 2.3.3(7):



Vier Dörfer A-heim, B-dorf,, C-berg und D-hausen sind durch eine Straße A – B – C – D verbunden Hierbei ist AB = 4,0 km, BC = 3,0 km und CD = 5,0 km. Eine Gruppe von Jugendlichen und zwar sieben aus A-heim, drei aus B-dorf, zwei aus C-berg und n aus D-hausen beschließt auf den Fahrrädern zu einem Treffpunkt T auf der Verbindungsstraße zu fahren. An welcher Stelle der Verbindungsstraße muss dieser Treffpunkt T liegen, damit die Summe der Wegstrecken von allen Jugendlichen ein Minimum wird? Wie groß ist diese Summe in Abhängigkeit von der Zahl n der Jugendlichen in D-hausen?

Aufgabe 2.3.4(7): In einem Briefwechsel zwischen GAUSS und SCHUMACHER aus dem Jahr 1836 stellt SCHUMACHER an GAUSS folgende Frage [SCHREIBER]:
Im konvexen Viereck ABDE ist der Diagonalenschnittpunkt S der Punkt, für den $\left|\overline{SA}\right| + \left|\overline{SB}\right| + \left|\overline{SD}\right| + \left|\overline{SE}\right|$ minimal wird. Verschiebt man nun die Strecke ED parallel nach oben, so fallen die Punkte S und C zusammen. Aber für



das Dreieck ABC kann C niemals der FERMATpunkt mit minimaler Streckensumme sein. Erkläre den scheinbaren Widerspruch.

Aufgabe 2.3.5(8): Im konvexen Viereck ist zwar $\left|\overline{FA}\right|+\left|\overline{FB}\right|+\left|\overline{FC}\right|+\left|\overline{FD}\right|$ minimal, wenn F der Schnittpunkt der Diagonalen ist; aber dies ist nicht das kürzeste Verbindungssystem. Zeige, dass im Viereck ABCD mit A(-12|0), B(13|0), C(4|12) und D(-3|12) gilt:

$$\left|\overline{AD}\right|+\left|\overline{DC}\right|+\left|\overline{CB}\right| < \left|\overline{FA}\right|+\left|\overline{FB}\right|+\left|\overline{FC}\right|+\left|\overline{FD}\right| = \left|\overline{AC}\right|+\left|\overline{BC}\right|$$

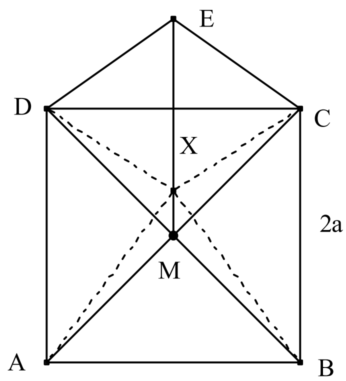
2.4 Der Fermatpunkt im Vieleck

Eine Konstruktion oder auch eine exakte rechnerische Bestimmung für beliebige Vielecke ist sicher an der Schule nicht möglich. Dagegen ist der FERMATpunkt leicht zu ermitteln, wenn sich die Ecken zu Paaren zusammenfassen lassen, deren Verbindungsstrecken sich in einem Punkt schneiden, der dann der FERMATpunkt ist. Der Beweis entspricht dem für das konvexe Viereck. Bei vorliegender Symmetrie können in Einzelfällen Gleichungen für die Berechnung der Lage des FERMATpunkt aufgestellt werden.

Beispiel 2.4.1:
ABCD ist ein Quadrat mit der Seitenlänge 2a, DCE ein gleichschenkliges Dreieck. Der FERMATpunkt X muss wegen der Symmetrie der Gesamtfigur auf der Achse ME liegen. Setzt man x = $\left|\overline{MX}\right|$ und a =10, so erhält man das Minimum der Länge L(x) des Verbindungssystems von $\left|\overline{XA}\right|+\left|\overline{XB}\right|+\left|\overline{XC}\right|+\left|\overline{XD}\right|+\left|\overline{XE}\right|$, wenn

$$L(x)=2\sqrt{10^2+(10+x)^2}+2\sqrt{10^2+(10-x)^2}+\left|\overline{ME}\right|-x$$

minimal wird.
Dies ist der Fall für x ≈ 6,2444 oder
allgemein für x ≈ 0,62444 a.



2.5 FERMATpunkte im Dreidimensionalen

2.5.1 FERMATpunkt zu vier Punkten im Raum

Auch hier ist es nur möglich Bedingungen aufzustellen, die sich aus den Eigenschaften einer Ellipse durch Verallgemeinerung des ersten Beweises für den FERMATpunkt herleiten lassen.

Verwendete Eigenschaften der Ellipsenpunkte:
Gegeben ist eine Ellipse mit der großen Halbachse a und den Brennpunkten F_1 und F_2 . Für jeden Punkt P auf der Ellipse gilt:

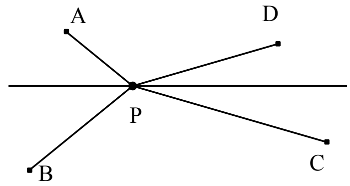
1. $\left|\overline{PF_1}\right|+\left|\overline{PF_2}\right| = 2a$
2. Das Lot auf die Tangente an die Ellipse durch P halbiert den Winkel F_1PF_2.

Bedingungen für die Lage des FERMATpunktes:
Das räumliche Viereck ABCD besitzt einen FERMATpunkt P, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. Man betrachtet alle Punkte, die von zwei gegebenen Punkten A und B eine konstante Entfernungssumme 2a haben. Diese Punkte liegen in einer Ebene auf einer Ellipse mit den Brennpunkten A und B und der großen Halbachse mit der Länge a. Im Raum liegen diese Punkte auf dem Ellipsoid, das durch Rotation der obigen Ellipse um die Gerade AB von der Ellipse erzeugt wird.

2. Gesucht wird nun auf dem Ellipsoid ein Punkt P so, dass die Summe $\left|\overline{CP}\right| + \left|\overline{DP}\right|$ minimal wird. Durch die Punkte C und D wird ein zweites Rotationsellipsoid erzeugt, das das erste in P von außen berührt.

3. Die beiden Ellipsoide haben in P eine gemeinsame Tangentialebene und das Lot auf diese Ebene durch den Punkt P halbiert die Winkel APB und CPD.

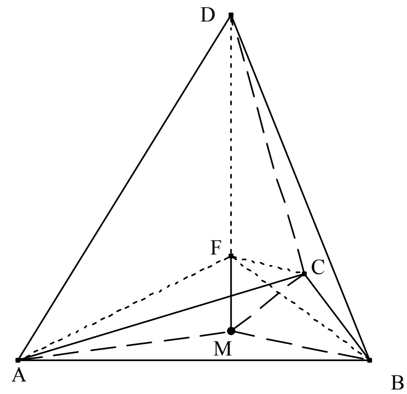


4. Die Summe $\left|\overline{AP}\right| + \left|\overline{BP}\right| + \left|\overline{CP}\right| + \left|\overline{DP}\right|$ wird minimal, wenn gilt: $\angle APB = \angle CPD$

Beweis:
Man dreht die Ebene PDC um die gemeinsame Winkelhalbierende so, dass die Punkte A, B, C und D in einer Ebene liegen. Verschiebt man nun P auf der Winkelhalbierenden in Richtung des kleineren Winkels, so verkleinern sich die Summen $\left|\overline{AP}\right| + \left|\overline{DP}\right|$ und $\left|\overline{BP}\right| + \left|\overline{CP}\right|$ (siehe Reflexionsgesetz).

Dies muss für alle Ausgangspaare gelten. Der Punkt P wird dann zum FERMATpunkt F. Von den sechs am Punkt F auftretenden Winkeln müssen folglich je zwei kongruent sein mit einer gemeinsamer Winkelhalbierenden.

Beispiel 2.5.1:
Ggegeben ist eine gerade Pyramide mit einem gleichseitigen Dreieck ABC als Grundfläche und der Höhe h. Wählt man $\left|\overline{AM}\right| = 4$ und $\left|\overline{MF}\right| = x$, so wird die Summe $\left|\overline{FA}\right| + \left|\overline{FB}\right| + \left|\overline{FC}\right| + \left|\overline{FD}\right|$



minimal, wenn $f(x) = 3\sqrt{16 + x^2} - x$ minimal wird. Dies tritt für $x = \sqrt{2}$ ein. Für die Pyramidenhöhe muss gelten: $h \geq \sqrt{2}$. Wenn die Pyramidenhöhe kleiner als $\sqrt{2}$ ist, dann ist der Punkt D der FERMATpunkt.

Aufgabe 2.5.1.1(10): Überprüfe, dass bei der Pyramide des Beispiels gilt:
a) $\angle AFB = \angle CFD$
b) Die Winkelhalbierende des Winkels $\angle AFB$ halbiert auch den Winkel $\angle CFD$.

Aufgabe 2.5.1.2(11): Gegeben ist die Pyramide ABCD durch $A(0|24\sqrt{10}|0)$, $B(0|-24\sqrt{10}|0)$, $C(15|0|0)$ und $D(12|0|14)$. Der FERMATpunkt muss in der xz - Ebene liegen, also $F(x|0|z)$.
a) Bestätige durch Differentialrechnung (siehe auch den Beweis von GRUSON zum Fermatpunkt), dass x=12 und z=4 sind.
b) Zeige auch, dass $\angle AFB = \angle CFD$ und $\angle AFC = \angle BFD$ und dass diese gleichen Winkelpaare jeweils eine gemeinsame Winkelhalbierende besitzen.

2.5.2 FERMATpunkt zu mehr als vier Punkten im Raum

Auch hier ist der FERMATpunkt leicht zu ermitteln, wenn sich die Punkte zu Paaren zusammenfassen lassen, deren Verbindungsstrecken sich in einem Punkt F schneiden, der dann der FERMATpunkt ist. Der Beweis entspricht dem für das konvexe Viereck.
Bei besonderen Symmetrien lässt sich die Lage des FERMATpunktes berechnen.

Aufgabe 2.5.2.1(11): Berechne die Lage des FERMATpunktes F für die fünf Ecken der geraden Pyramide ABCDS mit dem Rechteck ABCD (a = 8, b = 6) als Grundfläche und der Höhe h = MS. Berechne die Länge L des Verbindungssystems.

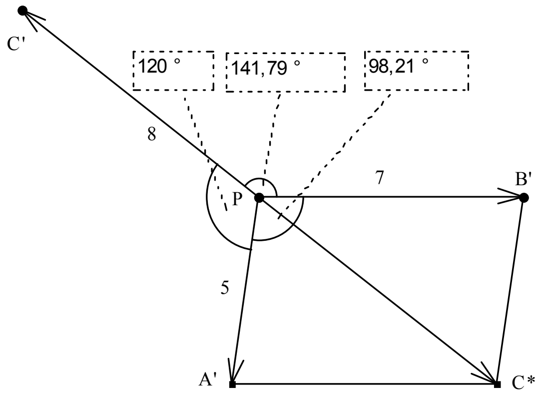
2.6 Eine Verallgemeinerung des FERMATpunktes

Gesucht ist ein Punkt P im Dreieck ABC so, dass $p\left|\overline{AP}\right| + q\left|\overline{BP}\right| + r\left|\overline{CP}\right|$ minimal wird.

Die Methode soll nur an einem Beispiel (p = 5, q= 7, r = 8) veranschaulicht werden. Geht man vom fünften Beweis für den FERMATpunkt aus, so muss man die Gewichte im Verhältnis 5 : 7 : 8 in den Punkten A, B und C wählen, da die Strecke AP das fünffache Gewicht bekommen soll usw. Das Kräfteparallelogramm am Punkt P legt nun die Winkel fest (siehe die nächste Seite):

Alle diese Winkel lassen sich mit einem Hilfsdreieck mit den Seiten 5cm, 7cm und 8cm konstruieren. Der Punkt P kann nun leicht mit Hilfe der Fasskreisbögen konstruiert werden. Die Winkel am Punkt P sind die Außenwinkel des Dreiecks PA'C* mit den Seiten 5cm, 7cm und 8cm.
Die Pfeile deuten an, dass die Ecken des Dreiecks ABC, in dem der gesuchte Punkt P liegt, auf diesen Halbgeraden liegen müssen.

Der Punkt P liegt genau dann im Dreieck ABC, wenn $\beta < 120°$, $\gamma < 98{,}21°$, $\alpha < 141{,}79°$.
Ist $\gamma \geq 98{,}21°$, so liegt der Punkt P auf der Dreiecksecke C.

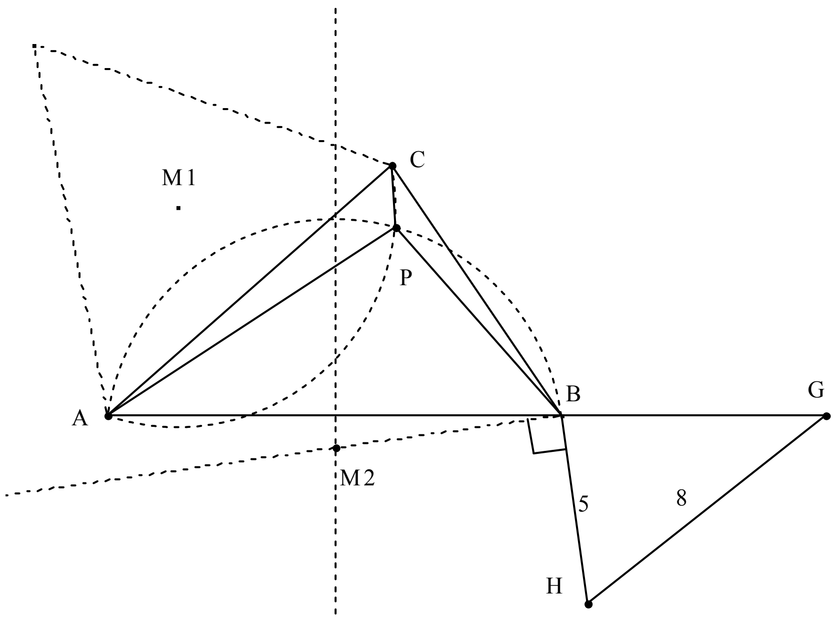


Der FERMATpunkt ist ein Sonderfall dieser allgemeinen Methode für p = q = r.

Ausführung:
Gegeben ist das Dreieck ABC (a = 4, b= 5, c = 6).
Konstruktionsbeschreibung:

a) Man konstruiert den Mittelpunkt M_1 des zum Winkel 120° gehörenden Fasskreisbogens..
b) Man verlängert AB über B hinaus und konstruiert ein Dreieck BGH nach unten mit dem Seitenverhältnis $\left|\overline{BG}\right| : \left|\overline{BH}\right| : \left|\overline{HG}\right| = 7 : 5 : 8$

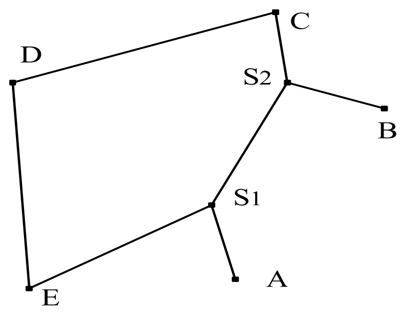
   Das Lot durch B zu GH schneidet die Mittelsenkreche von $\overline{AB}$ im Mittelpunkt M_2 des zu $\overline{AB}$ gehörenden Fasskreisbogens. Der Schnittpunkt der beiden Fasskreisbögen ist der gesuchte Punkt P.



Aufgabe 2.6.1(10): Drei Dörfer A-heim, B-dorf und C-berg grenzen an ein großes Waldgebiet. Die Pfadfindergruppen dieser Dörfer wollen sich an einem Punkt T im Wald treffen, wobei sie mit Hilfe des Kompasses direkt auf den Treffpunkt zugehen. In A-heim sind zwölf, in B-dorf 16 und in C-berg 20 Pfadfinder. In einem Koordinatensystem ist A(0|0), B(5|0), und C(0,75|6). Die Summe der von allen Pfadfindern bis zum Treffpunkt zurückgelegten Wege soll minimal werden. Konstruiere den Treffpunkt T. Bestätige, dass T(1,8|2,4) und berechne das Minimum der Summe aller Wege.

3. Das kürzeste Verbindungsnetz von vier Punkten

Unter einem **STEINERnetz** versteht man ein Verbindungssystem von n Festpunkten mit minimaler Länge. Hierbei werden die Festpunkte entweder direkt miteinander verbunden oder über geeignet festgelegte Hilfspunkte. Diese heißen auch **STEINERpunkte.**



Das Beispiel rechts zeigt ein Verbindungssystem von fünf Festpunkten mit zwei Hilfspunkten. Es ist aber *kein* STEINERnetz, da es auf verschiedenste Arten verkürzt werden kann. Zunächst kann eine Strecke aus dem Fünfeck DES_1S_2C einfach weggelassen werden z. B. DC. Dann kann E auf kürzere Weise mit D und S_1 mit Hilfe des FERMATpunktes des Dreiecks DES_1 verbunden werden usw.

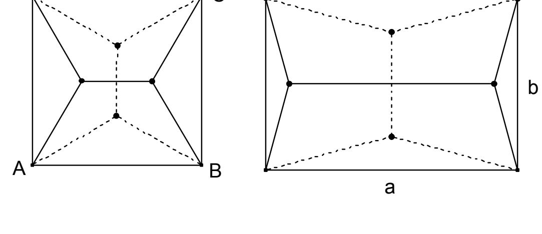
3.1 Allgemeine Überlegungen

Ein minimales Streckennetz, das mehr als drei Festpunkte unter Einführung von Hilfspunkten verbindet, bezeichnet man als ein STEINERnetz; es muss folgende **notwendige Bedingungen** erfüllen:

1. An keinem Punkt dürfen mehr als drei Strecken enden.
2. Wenn drei Strecken an einem Punkt enden, dann müssen sie miteinander drei 120°–Winkel bilden. Hilfspunkte mit dieser Eigenschaft heißen STEINERpunkte. An einem STEINERpunkt müssen immer genau drei Strecken enden.
3. Wenn an einem Festpunkt genau zwei Strecken enden, müssen diese einen Winkel φ mit $120° < \varphi < 180°$ bilden.
4. Es darf kein Vieleck vorkommen oder mathematisch ausgedrückt: Das Netz muss ein Baum sein.
5. Die STEINERpunkte müssen immer in der konvexen Hülle der n Festpunkte liegen.

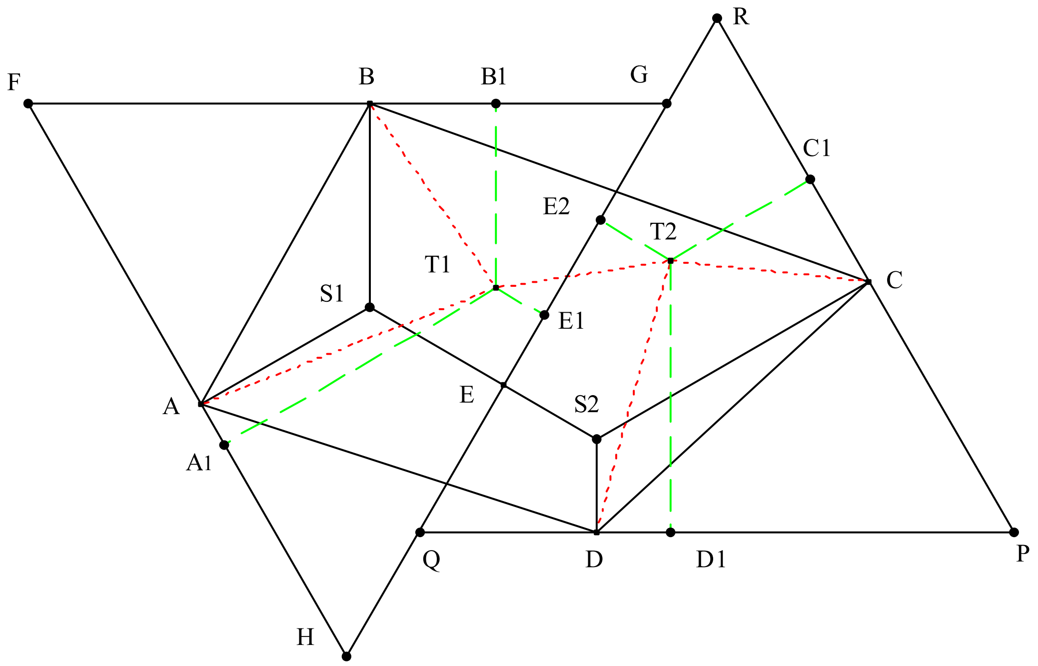
Der Beweis für diese Bedingungen ist einsichtig, da man sonst die Länge des Verbindungssystems leicht entweder durch Weglassen von Strecken oder durch Einbeziehung von FERMATpunkten verkürzen kann.

Beispiele 3.1.1 und 3.1.2: Quadrat, Rechteck
Es gibt zwei STEINERnetze je nachdem, welche Paare von Festpunkten mit einem STEINERpunkt verbunden werden. Die Endpunkte der Diagonalen verbunden mit Hilfspunkten ergeben immer ein Verbindungssystem, das länger ist als die Summe der Diagonalen.



3.2 Beweis für das Viereck

Satz 3.2.1:
Im Viereck ABCD werden die Punkte A und B mit dem STEINERpunkt S_1, die Punkte C und D mit dem STEINER-punkt S_2 verbunden. Die Existenz dieser Punkte ist vorausgesetzt.
Das kürzeste Verbindungssystem der Punkte A, B, C und D ist $\left|\overline{AS_1}\right|+\left|\overline{BS_1}\right|+\left|\overline{S_1S_2}\right|+\left|\overline{CS_2}\right|+\left|\overline{DS_2}\right|$.



Beweis:
S_1 und S_2 seien STEINERpunkte.
Annahme: Es gibt ein kürzeres Verbindungssystem mit den Hilfspunkten T_1 und T_2.
E sei ein beliebiger Punkt auf der Strecke S_1S_2. Die Lote durch A, B und E zu AS_1, BS_1 und ES_1 bestimmen das gleichseitige Dreieck FGH. Die Lote durch C, D und E zu CS_2, DS_2 und ES_2 bestimmen das gleichseitige Dreieck PQR.

1. Im Dreieck FGH möge der Punkt T_1 liegen, im Dreieck PQR der Punkt T_2.
   Die Fußpunkte der Lote von T_1 auf die Seiten des Dreiecks GFH sind A_1 , B_1 und E_1.
   Es gilt, falls $T_1 \neq S_1$:
   $\left|\overline{AS_1}\right|+\left|\overline{BS_1}\right|+\left|\overline{ES_1}\right| < \left|\overline{AT_1}\right|+\left|\overline{BT_1}\right|+\left|\overline{E_1T_1}\right|$ (vergleiche den vierten Beweis für den FERMATpunkt)
   Die Fußpunkte der Lote von T_2 auf die Seiten des Dreiecks PQR sind C_1 , D_1 und E_2.
   Es gilt, falls $T_2 \neq S_1$:
   $\left|\overline{CS_2}\right|+\left|\overline{DS_2}\right|+\left|\overline{ES_2}\right| < \left|\overline{CT_2}\right|+\left|\overline{DT_2}\right|+\left|\overline{E_2T_2}\right|$ (vergleiche den vierten Beweis für den FERMATpunkt)
   Hieraus folgt die Behauptung.

2. Falls T_1 nicht im Dreieck FGH liegt, ist die Behauptung trivialerweise erfüllt. Analoges gilt, wenn T_2 nicht im Dreieck QPR ist.

Aufgabe 3.2.1(9): Berechne die Längen der beiden STEINERnetze eines Rechtecks in Abhängigkeit von den Seitenlängen a und b mit a > b. In welchen Rechtecken gibt es nur ein STEINERnetz mit zwei STEI-NERpunkten?

Aufgabe 3.2.2(9): Berechne die Länge des kürzesten STEINERnetzes einer Raute mit Seite a und $\alpha = 60°$.

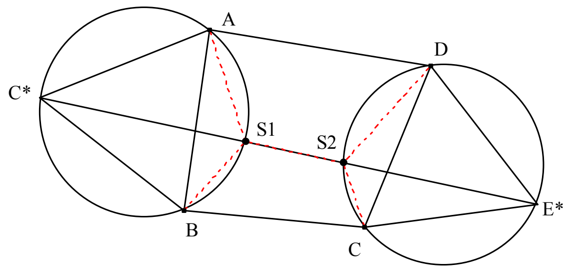
Aufgabe 3.2.3(9): Begründe, dass es bei einem STEINERnetz mit vier Festpunkten höchstens zwei STEI-NERpunkte geben kann.

Bei mehr als drei Ausgangspunkten gibt es mehrere STEINERnetze. Jedes dieser Netze ist für die vorgegebene Struktur des Graphen (oder die Topologie des Graphen) von minimaler Länge; aber nicht jedes besitzt die gleiche minimale Länge. Eine Struktur bei n Festpunkten ist festgelegt durch die Anzahl der verwendeten STEINERpunkte und durch eine Vorschrift, die genau bestimmt, welche Punkte mit welchen zu verbinden sind. Eine Entscheidung, welches der STEINERnetze die kürzeste Länge besitzt, ist bei mehr als vier Festpunkten allgemein nicht möglich.

3.3 Konstruktion von STEINERnetzen

Man gibt zunächst die Struktur (oder die Topologie) des zu konstruierenden STEINERnetzes vor, d. h.: Man legt fest, wie viele STEINERpunkte eingeführt werden und wie die einzelnen Festpunkte und STEINERpunkte zu verbinden sind. Unter diesen einschränkenden Voraussetzungen lässt sich nun durch Konstruktion entscheiden, ob ein derartiges STEINERnetz realisierbar ist. Im folgenden Beispiel soll ein STEINERnetz die vier Punkte A, B, C und D verbinden. Man gibt vor, dass die Punkte A und B mit einem STEINERpunkt S_1 zu verbinden sind , die Punkte C und D mit einem STEINERpunkt S_2. Ferner müssen noch die beiden STEINERpunkte S_1 und S_2 verbunden werden.

Man konstruiert über den Strecken AB und CD die gleichseitigen Dreiecke nach außen und deren Umkreise. Die Verbindungsstrecke der erhaltenen Punkte C* und E* schneidet die Umkreise in den Punkten S_1 und S_2, womit die 120^o-Winkel bei S_1 und S_2 gewährleistet sind.
C* ist nun ein Hilfspunkt für die Konstruktion, der die Punkte A und B ersetzt. Die Konstruktion ist damit reduziert auf ein STEINERsystem zu den drei Punkten C*, C und D. Für die Länge des Verbindungssystems gilt nach dem Satz von FERMAT (vgl. Aufgabe 2.2.2):



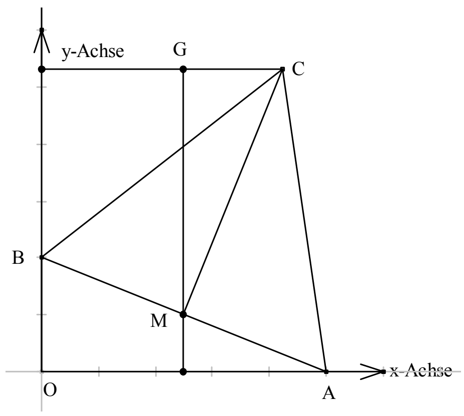
$$\left|\overline{C^*E^*}\right| = \left|\overline{AS_1}\right| + \left|\overline{BS_1}\right| + \left|\overline{S_1S_2}\right| + \left|\overline{CS_2}\right| + \left|\overline{DS_2}\right|$$

Schneidet die Strecke C*E* den kleineren Umkreisbogen von A nach B oder den kleineren Bogen von C nach D nicht, so existiert kein STEINERnetz dieser Art. Eine vollständige Diskussion der kürzesten Verbindungssysteme für alle Vierecke würde den Rahmen dieser kleinen Abhandlung übersteigen. Im Punkt 3.4 finden Sie einige Beispiele für Minimalnetze zwischen vier Punkten.

Satz 3.3.1: Gegeben ist ein Viereck mit orthogonalen Diagonalen, für das zwei STEINERsysteme mit je zwei STEINERpunkten existieren. Beide Systeme haben dann die gleiche Länge.

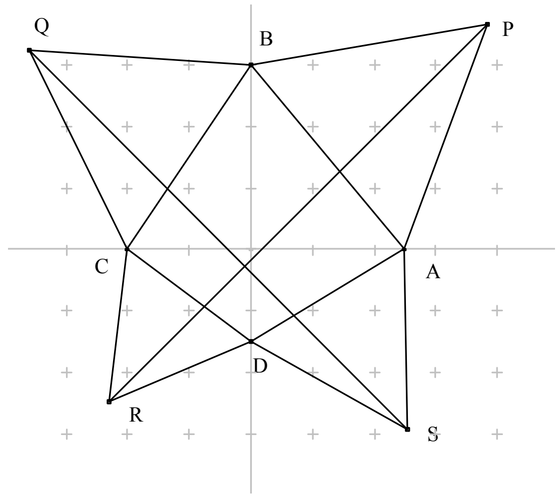
Vorüberlegung:
Gegeben sind die Punkte A(2a|0) und B(0|2b). Wenn Dreieck ABC gleichseitig ist, dann ist $C\left(a+b\sqrt{3} \mid b+a\sqrt{3}\right)$.

Beweis der Vorüberlegung:
Der Mittelpunkt von AB ist M (a|b), $C(c_1|c_2)$, $G(a|c_2)$.
Die Dreiecke OAB und GMC sind ähnlich mit dem Ähnlichkeitsfaktor $f = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; also gilt $\left|\overline{GC}\right| = b\sqrt{3}$ und $\left|\overline{GM}\right| = a\sqrt{3}$.



Beweis von Satz 3.3.1:
O sei der Ursprung.
Aus A(2a|0), B(0|2b), C(-2c|0) und D(0|-2d) folgt:
$P(a + b\sqrt{3}\,|\,b + a\sqrt{3})$, $Q(-c - b\sqrt{3}\,|\,b + c\sqrt{3})$
$R(-c - d\sqrt{3}\,|\,-d - c\sqrt{3})$, $S(a + d\sqrt{3}\,|\,-d - a\sqrt{3})$

$|\overline{RP}|^2 = |\overline{QS}|^2 =$
$= (a + b\sqrt{3} + c + d\sqrt{3})^2 + (a\sqrt{3} + b + c\sqrt{3} + d)^2$



Sonderfälle:
Ist das Viereck ABCD ein Quadrat (a = b = c = d), so folgt: PQRS ist auch ein Quadrat und
$|\overline{SQ}|^2 = 2a^2(2 + 2\sqrt{3})^2 = 16a^2(2+\sqrt{3})$.

Ist das Viereck ABCD eine Raute, so ist das Viereck PQRS ein Rechteck, dessen Seiten zu den Koordinatenachsen parallel sind.

Beweis der letzten Behauptung: Es sei a = c und b = d, dann gilt: Setzt man $u = a + b\sqrt{3}$, $v = b + a\sqrt{3}$ so folgt S(u | v), T (-u | v) , U(-u | -v) , V(u | -v) .

Aus dem bewiesenen Satz ergibt sich die Folgerung:

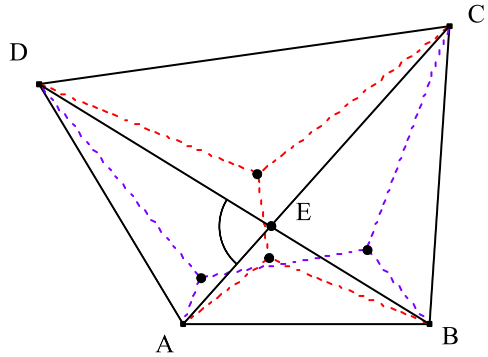
Korollar 3.3.2: Gegeben ist ein Viereck ABCD mit dem Diagonalenschnittpunkt E für das zwei STEINERnetze existieren. Wenn $\angle AEB < 90°$ ist, dann hat das STEINERsystem, in dem A und B sowie C und D mit je einem STEINERpunkt verbunden werden, die kürzere Länge.

> *Aufgabe 3.3.1(9):* Gegeben ist ein konvexes Viereck ABCD mit gleich langen, orthogonalen Diagonalen. Über den Seiten des Vierecks werden nach außen gleichseitige Dreiecke errichtet mit den Spitzen P, Q, R und S.
>
> a) Beweise, dass die Diagonalen des Vierecks PQRS aufeinander senkrecht stehen und berechne die Schnittpunktskoordinaten.
> b) Welches besondere Viereck PQRS entsteht, wenn Viereck ABCD ein gleichschenkliges Trapez mit den parallelen Seiten AB und CD ist?
> c) Welches besondere Viereck PQRS entsteht, wenn Viereck ABCD ein Drachenviereck mit der Symmetrieachse BD ist?

3.4 Beispiele von Minimalnetzen im Viereck

Für die Beweise der folgenden Beispiele sei auf die Dissertationen von KARL BOPP und EDUARD HOFMANN verwiesen.

Wenn in einem Viereck zwei STEINERsysteme mit zwei STEINERpunkten existieren, dann sucht man den kleineren Diagonalenwinkel. In nebenstehendem Beispiel ist dies $\angle DEA$. Das STEINERsystem, in dem A und D mit einem STEINERpunkt verbunden sind, hat die minimale Länge. Vergleichen Sie dies mit dem Satz 3.3.1 über Vierecke mit orthogonalen Diagonalen.

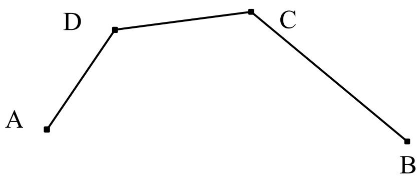


Wenn in einem Viereck nur ein STEINERsystem mit zwei Punkten existiert, so ist dieses das minimale Verbindungssystem.

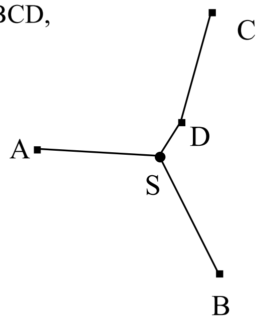
Bei einem STEINERnetz mit nur einem STEINERpunkt konstruiert man den FERMATpunkt F eines Teildreiecks und verbindet die fehlende Ecke mit dem nächstgelegenem Eckpunkt des Teildreiecks.

Es folgen nun kürzeste Verbindungssysteme der Punkte A, B, C und D, für die kein STEINERnetz mit zwei Steinerpunkten existiert.

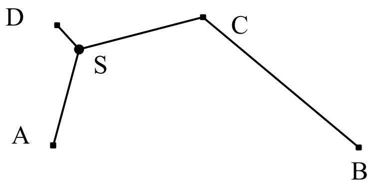
$\delta > 120°$ und $\gamma > 120°$



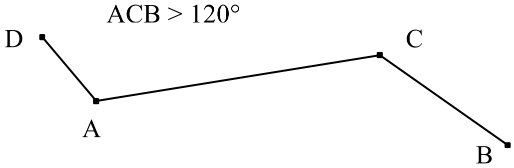
Konkaves Viereck ABCD,
ADB < CDA und
ADB < BDC



$\delta < 120°$ und $\gamma > 120°$



CAD > 120°
ACB > 120°



Aufgabe 3.4.1(9): Gegeben sind in einem kartesischen Koordinatensystem die Punkte A(-2a|0), B(2b|0), C(0|2c) mit a, b, c >0 und O als Ursprung.

a) Man beweise, dass es kein STEINERsystem mit zwei STEINERpunkten im entarteten Viereck AOBC gibt.
b) Es gibt zwei Minimalsysteme und zwar eines mit dem FERMATpunkt im Dreieck AOC und ein zweites mit dem FERMATpunkt im Dreieck OBC. Man berechne für a = – 3, c = 2,5 und b = 2 die Länge eines jeden Systems.
c) Beweise, dass für b > a das System mit dem FERMATpunkt im Dreieck OBC das kürzere Minimalsystem ist.

Aufgabe 3.4.2(9): Gegeben ist ein gleichschenkliges Trapez ABCD mit den Seitenlängen $\left|\overline{AB}\right| = \left|\overline{AC}\right| = \left|\overline{AD}\right| = a$ und $\alpha = \angle BAD > 90°$. Folgende drei "kürzeste" Verbindungssysteme der vier Trapezecken werden hinsichtlich ihrer Länge in Abhängigkeit von α verglichen:

a) Ohne Hilfspunkte,
b) mit dem Diagonalenschnittpunkt F einem FERMATpunkt im Viereck,
c) mit zwei STEINERpunkten S1 und S2 , die mit den Ecken A und B bzw. C und D verbunden sind.

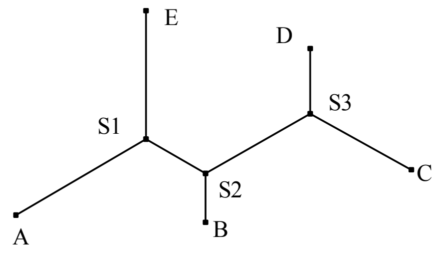
4. Kürzeste Verbindungssysteme von mehr als vier Punkten

Man verfolgt hier die gleiche Strategie wie bei einem STEINERnetz für vier Punkte, indem man zunächst die Struktur festlegt. Die Anzahl der möglichen Strukturen steigt sehr schnell mit der Anzahl der Punkte. Es ist aber in den meisten Fällen nicht möglich im Voraus zu entscheiden, welches der vielen STEINERnetze die absolut minimale Länge aufweist. Im Folgenden wird daher nur an einigen Beispielen die Konstruktion von STEINERnetzen entwickelt.

Die maximale Ersparnis bei der Weglänge bei der Verwendung von STEINERnetzen beträgt 13,4%. Diese ist gleich der maximalen Ersparnis durch Einführung eines FERMATpunktes im gleichseitigen Dreieck.

Aufgabe 4.1(7): Gegeben sind n Festpunkte. Wie viele STEINERpunkte kann ein STEINERnetz, das diese n Festpunkte verbindet, höchstens haben?

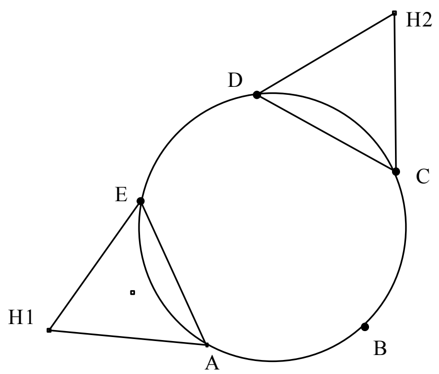
4.1 STEINERnetze bei fünf Punkten

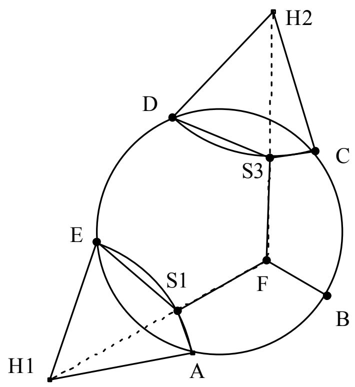


Bei STEINERnetzen mit fünf Festpunkten gibt es maximal drei STEINERpunkte(Beweis siehe Aufgabe 4.1.1). Hierbei gibt es nur eine Struktur: Zwei Festpunkte werden mit einem STEINERpunkt verbunden (z. B. A und E mit S_1), zwei weitere mit einem anderen STEINERpunkt (z. B. D und C mit S_3) und das Netz entsprechend ergänzt. Da man aber aus den fünf Festpunkten zunächst einen und dann die beiden Paare beliebig auswählen kann, muss man also bei allgemeiner Lage der fünf Festpunkte bereits 15 Möglichkeiten für diese Struktur untersuchen. Wenn alle fünf Festpunkte nicht untereinander sondern nur mit STEINERpunkten verbunden werden, dann gibt es an den STEINERpunkten nur drei verschiedene Richtungen.

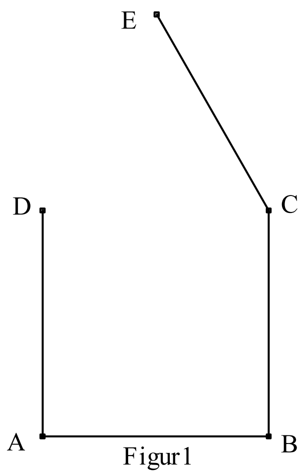
Beispiel 4.1.1:
Das STEINERnetz für ein regelmäßiges Fünfeck wird konstruiert:

Erster Schritt: Man ersetzt die Punkte A und E durch den Hilfspunkt H_1 und die Punkte C und D durch den Hilfspunkt H_2. Zu konstruieren ist jetzt nur noch der FERMATpunkt F im Dreieck H_1BH_2. Diese Konstruktion wurde weggelassen.
Zweiter Schritt: Der FERMATpunkt F wird der STEINERpunkt S_2. Die Strecken S_2H_1, S_2B und S_2H_2 geben die Richtungen der Verbindungsstrecken zu den STEINERpunkten an. Der Schnittpunkt der Strecke S_2H_1 mit dem kleineren Umkreisbogen zwischen A und E wird mit A und E verbunden. Analoges gilt für die Punkte C und D.

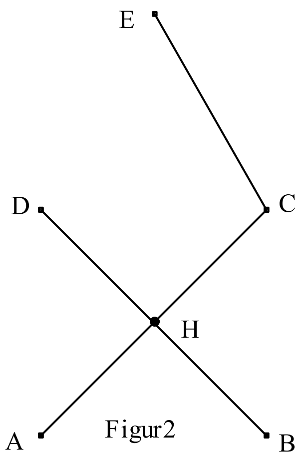




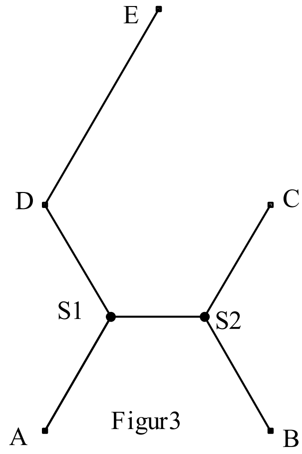
Aufgabe 4.1.1(9): Gegeben ist ein Quadrat ABCD mit der Seite a und ein aufgesetztes gleichseitiges Dreieck DCE. Es werden sechs verschiedene Verbindungssysteme der fünf Punkte gezeichnet. Bestimme jeweils, nach welchem Prinzip die Hilfs- bzw. STEINERpunkte konstruiert worden sind und berechne für alle Beispiele der nächsten Seite die Länge des jeweiligen Verbindungssystems.



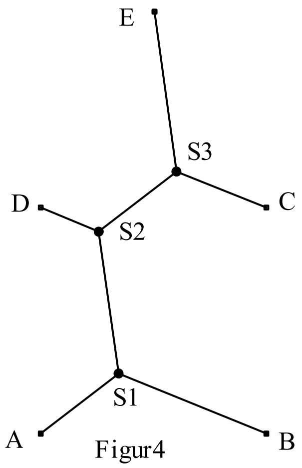
Figur1



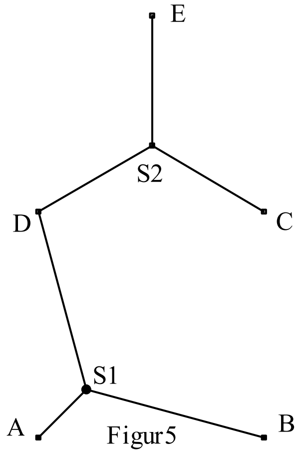
Figur2



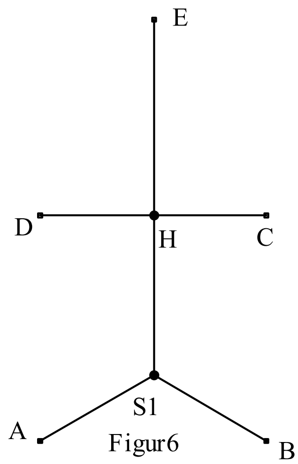
Figur3



Figur4



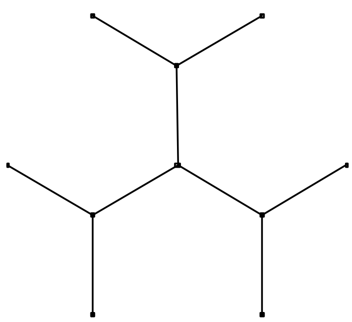
Figur5

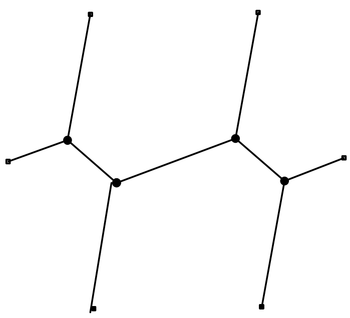


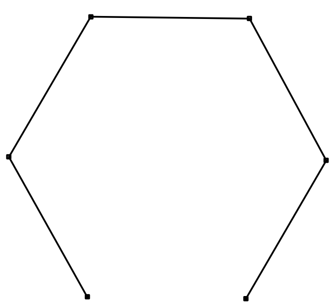
Figur6

4.2 STEINERnetze bei sechs Punkten

Aufgabe 4.2.1(9): Für die Eckpunkte eines regelmäßigen Sechsecks mit der Seite a sind zwei STEINER-netze und ein Netz ohne Hilfspunkte gezeichnet. Berechne jeweils die Länge des Netzes. Die Netze 1 und 2 veranschaulichen die beiden möglichen Netzstrukturen mit vier STEINERpunkten für sechs Fest-punkte.


Netz 1


Netz 2

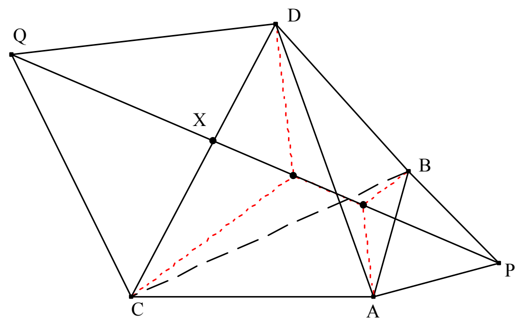

Netz 3

Aufgabe 4.2.2(9): Gesucht ist das kürzeste Verbindungssystem von sieben Punkten und zwar den sechs Punkten eines regelmäßigen Sechsecks mit der Seite a und dem Umkreismittelpunkt des Sechsecks.

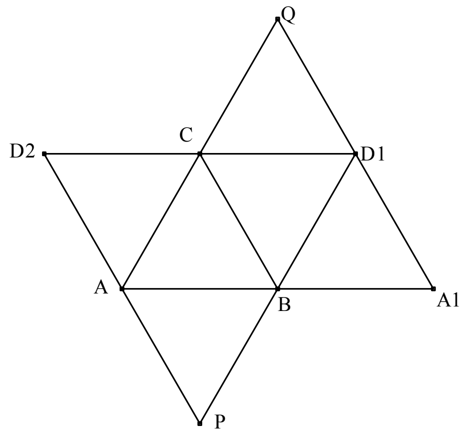
4.3 STEINERnetze im Raum

4.3.1 Vier Punkte im Raum

Beispiel 4.3.1.1: Gegeben sind im Raum die Punkte A, B, C und D, die nicht in einer Ebene liegen. Gesucht ist das kürzeste Verbindungssystem mit zwei STEINERpunkten.



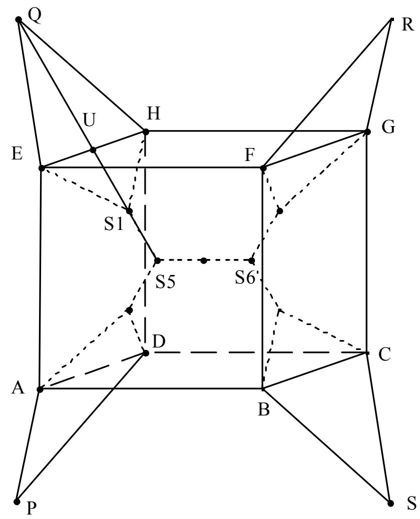
Zur Lösung: Man errichtet über den Punkten A und B ein gleichseitiges Dreieck ABP, das um AB drehbar ist. Eine notwendige Bedingung ist weiterhin, dass die Ebenen ABP die Strecke CD in einem Punkt X so schneiden, dass die Halbgerade PX auch die Strecke AB schneidet. Ebenso errichtet man über CD ein um CD drehbares gleichseitiges Dreieck CDQ. Man dreht nun die Ebene CDQ so, dass die Halbgerade PX in ihr liegt. Dreht man nun die Ebene ABP um AB, so wandert der Punkt X auf der Strecke CD. Wenn nun die Halbgerade PX durch Q geht, so sind die Schnittpunkte der Umkreise der Dreiecke ABP und CDQ mit der Halbgeraden PX die STEINERpunkte. Dies ist das kürzeste Verbindungssystem der Punkte A, B, C und D im Raum bei dieser vorgegebenen Struktur mit der Länge b = PQ. Da es drei mögliche Strukturen mit zwei STEINERpunkten geben kann, muss man prüfen, welches Verbindungsnetz das absolut kürzeste ist.



Aufgabe 4.3.1(9): Zeichne obiges Netz mit AB = 6,0 cm auf festen Karton, schneide es aus und falte ein reguläres Tetraeder ABCD, wobei nur die Strecken A_1D_1 und AD_2 fest zusammengeklebt werden. Die Dreiecke ABP und CDQ hängen heraus. Schiebe nun eine Stricknadel so durch die Schlitze bei AB und CD, dass diese auf der Strecke PQ liegt. Konstruiere die Länge L = $\left|\overline{PQ}\right|$ des kürzesten Verbindungssystems der vier Eckpunkte dieses regulären Tetraeders mit der Kantelänge a und berechne die Länge L.

Beispiel 4.3.2: Kürzestes STEINERsystem eines Würfels.

Über den Strecken AD, EH, FG und BC werden die gleichseitigen Dreiecke ADP, EHQ, FGR und BCS errichtet. Die Spitzen P, Q , R und S liegen in einer Symmetrieebene des Würfels; sie bilden ein Rechteck. Das STEINERsystem dieses Rechtecks ist die Ausgangsfigur für das STEINERnetz des Würfels, das sechs STEINERpunkte enthält.



Aufgabe 4.3.2(9): Berechne die Länge des kürzesten Verbindungssystems der acht Eckpunkte eines Würfels mit der Kante 3,0 cm. Konstruiere auch das Rechteck PQRS.

Aufgabe 4.3.3(9):
Zeichne in ein Schrägbild eines Oktaeders das kürzeste STEINERnetz mit vier STEINERpunkten. Gehe dabei aus von der Struktur des Netzes 1 der Aufgabe 4.2.1 und beweise, dass der Mittelpunkt M des Oktaeders ein STEINERpunkt wird. Berechne die Länge des kürzesten STEINERnetzes.

4.4 STEINERnetze der Hauptstädte der Regierungsbezirke von Bayern

4.4.1 Entfernungstabelle der Hauptstädte der Regierungsbezirke

Lage der Hauptstädte im Gradnetz:

	östliche Länge	nördliche Breite
Würzburg	9° 55'	49° 49'
Bayreuth	11° 32'	49° 57'
Ansbach	10° 34'	49° 18'
Regensburg	12° 05'	49° 02'
Augsburg	10° 51'	48° 22'
München	11° 32'	48° 09'
Landshut	12° 12'	48° 32'

Berechnung der Entfernung der Orte $A(\lambda_1, \varphi_1)$ und $B(\lambda_2,\varphi_2)$:
$\cos e = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos (\lambda_2 - \lambda_1)$

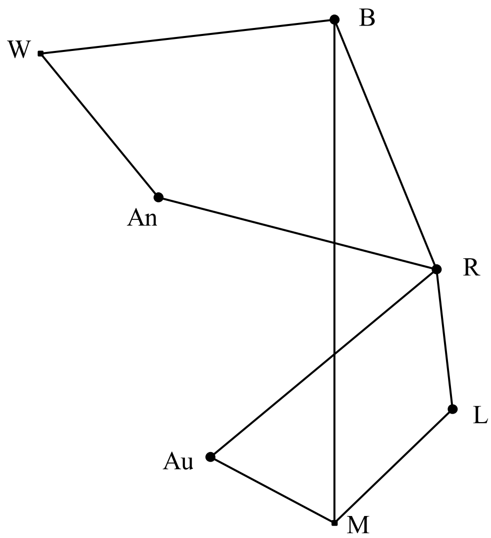
Hierbei gilt: $1° \approx 111{,}1$ km

Hieraus folgt die nebenstehende Entfernungstabelle.

	Wü	Ba	An	Re	Au	Mü
Ba	117					
An	74	100				
Re	179	109	114			
Au	174	183	106	117		
Mü	219	200	146	106	56	
La	218	164	147	56	101	65

4.4.2 Vorüberlegungen

Bayreuth – München ist die Nord-Süd-Richtung. Es werden nun sechs Verbindungssysteme untersucht:



1. Das kürzeste System ohne Hilfspunkte ist:
   R—L—M—Au—An—W und An—B
   Länge: 457 km

2. Dreieck Wü—An—B mit FERMATpunkt ergibt die Länge 165 km.
   Dreieck An—Au—R mit FERMATpunkt hat die Länge 194 km.
   Au—M und R—L haben zusammen die Länge 112 km.
   Gesamtlänge : 471km

3. Zwei Vierecke WBRAn und RLMAu mit STEINERsystemen.
   Viereck WBRAn: Das kürzeste System verbindet W und An mit einem STEINER-punkt und B und R mit dem zweiten.
   Länge (WBRAn) = 258 km.
   Viereck RLMAu:
   Da $\angle RLM \approx 122° > 120°$ ist, ist das kürzeste System mit dem FERMATpunkt

im Dreieck LMAu und der Strecke LR. Länge (RLMAu) = 177 km also L_1 = 435 km.

4. Ein Dreieck WBAn (L =165 km) und ein Fünfeck, wobei An – Au – M – L – R verbunden sind (283 km). Insgesamt ergeben sich also 448 km.

5. Das Dreieck BAnR hat die kürzeste Länge 186 km. Nimmt man hinzu die direkten Verbindungen 74 km + 112 km + 65 km, so erhält man 437 km.

6. Dreieck WBAn + Fünfeck , wobei ein STEINERpunkt nur mit L verbunden ist. Man erhält 165 km + 290 km = 455 km.

5. Literatur

Baptist, Peter	http://did.mat.uni-bayreuth.de/geonet/beispiele/minimum
Bopp, Karl	Über das kürzeste Verbindungssystem zwischen vier Punkten Dissertation, Göttingen 1879
Gilbert, E.N:	Steiner minimal trees, SIAM journal on applied Mathematics, Seiten 1-29
Dudeney, Henry Ernest	The Canterbury Puzzles Problem 75
Gruson, J.P.	Eine geometrische Aufgabe über Minima, Abhandlungen der Königlichen Akademie der Wissenschaften in Berlin, Mathematische Classe 1816/17
Hoffmann, Eduard:	Über das Kürzeste Verbindungssystem von vier Punkten der Ebene, Wetzlar 1890
Hofmann, J.E.:	Elementare Lösung einer Minimumaufgabe, Zeitschrift für den math. und naturwiss. Unterricht 1929 (S. 22 - 23)
Honsberger,	Mathematische Edelsteine, Viele Aufgaben über gleichseitige Dreiecke
Schmitt, F.	"Problem und Satz von Napoleon" in DdM 18(1990) Heft 1
Schreiber, Peter	Zur Geschichte des sog. Steiner-Weber-Problems. Wiss. Z. Ernst-Moritz-Arndt Univ. Greifswald. In: Math. - nat. wiss. Reihe 35 (1986), S. 53-58
Sosnow, G. Y.	AMM 1926 S. 161 Problem 2728 (Honsberger Gitter Problem 55)

30 Seiten Hinweise zu den Lösungen erscheinen in „Mathematikinformation Nr. 42“ am 15. 1. 2005.