Karlhorst Meyer

# Beispiele zum Wiederholen und zur Differenzierung des Geometrieunterrichts

In jüngster Zeit beobachten manche Lehrerinnen und Lehrer, dass im Fach Mathematik die Unterschiede im *Können* und der *Leistungsbereitschaft* der Schülerinnen und Schülern innerhalb einer Klasse immer größer werden, was sich letztlich auch in schlechten Klassendurchschnittsnoten äußert. Manche schlagen zur Verbesserung der Klassensituationen eine innere Differenzierung des Unterrichts vor, wobei nicht immer klar ist, was damit gemeint ist, was sicher im vorliegenden Artikel auch nicht geklärt werden kann. Der Autor geht davon aus, dass es unabhängig von einer solchen Klärung vor allem gilt, Beispiele zu finden, die zeigen, wie man im Rahmen einer Differenzierung mit den Schülerinnen und Schülern arbeitet, die in der Lage sind, rasch – manchmal für den Lehrer unangenehm rasch – zu Neuem überzugehen, bzw. mit denen, die hierzu nicht in der Lage sind, die etwas länger brauchen, um den eben unterrichteten Stoff zu verarbeiten.

## 1. Wiederholung – wenn möglich, auf einem höheren Niveau

Beim Wiederholen in der Klasse beschränkt man sich leider sehr häufig auf ein **Ausfragen** eines mathematischen Lernstoffs bzw. auf **Anwendungsbeispiele** des unmittelbar vorher gelernten Stoffs. Der Autor weiß natürlich, dass auf diese Form des Wiederholens auch zukünftig nicht verzichtet werden kann, doch sollte es nicht der einzige Weg sein. MEYER U. A. haben in [1] „Brennpunkt Mathematik“ (Bände 5 bis 9) um 1990 versucht, diese Methode dahingehend weiter zu entwickeln, dass bei den Anwendungsaufgaben auch Stoff von sehr viel früheren Kapiteln eingebaut worden ist. Zugegeben die Lösungsbände sind damals nicht rechtzeitig erschienen, trotzdem mutet es heute – nach dem TIMSS-PISA-Schock – schon eigenartig an, dass es häufig gerade diese Wiederholungsaufgaben waren, die Lehrer veranlassten, die Buchreihe nicht einzuführen und es sich um einen Aufgabentyp handelt, den man heute als eine unvermeidbare Notwendigkeit eines jeden Lehrbuches ansieht.

Eigentlich gestatten bestenfalls angekündigte **schriftliche Prüfungen**, dass - zumindest nach dem Buchstaben der Vorschriften - über einen größeren Zeitraum abgeprüft und damit wiederholt werden kann. Aber diese Möglichkeit ist auf wenige Fälle im Schuljahr eingeschränkt, wenn z. B. Bayern die Vorschrift erlassen hat, dass in den viel häufigeren, unangekündigten Stegreifaufgaben, nur der Stoff der letzten beiden Unterrichtsstunden Verwendung finden darf. Im Nachhinein hat man die Vorschrift dahingehend aufgelockert, dass natürlich das **Grundwissen** immer abgefragt werden kann; nur hat man sich zumindest öffentlich nicht darüber geeinigt, was zum Grundwissen gehört. Vermutlich kann man sich hierüber gar nicht so einigen, dass bei Klagen vor Gericht der Begriff Grundwissen klar ist; dies führt dazu, dass sich die allerwenigsten Lehrer trauen, Grundwissen schriftlich abzufragen.

Die Idee des Wiederholens hat wohl auch dazu geführt, erste Beispiele für den **Fächerübergriff** (vergl. MEYER [3]) zu schaffen. Später z. B. BARTH U. A. [1] (Bände 5 mit 10) sind es dann geschichtliche Aspekte gewesen, die im Mathematikunterricht den Fächerübergriff weiter ausgebaut haben. Aber auch der Fächerübergriff ist bei Lehrern und Schülern nicht besonders beliebt. Als extrem habe ich es dann immer empfunden, wenn es in der Kollegstufe nicht möglich gewesen ist, trotz eines neunjährigen Englischunterrichts eine mathematische Frage oder Antwort in der Fremdsprache zu formulieren.

Aber zurück zum Wiederholen mathematischer Inhalte. Niemand bestreitet, dass Wiederholen auch in der Mathematik lernnotwendig ist. Man sollte sich auch nicht mehr auf die Behauptung zurückziehen, dass der Rhythmus, in dem wiederholt werden muss, von Mensch zu Mensch verschieden ist, also sozusagen das Wiederholen in der Klasse durch einen Lehrer scheinbar im Widerspruch zur Wiederholsituation des einzelnen Schülers stehen muss. Die meisten Lehrer sind sich aber wohl einig, dass auch am Gymnasium das Wiederholen heute nicht mehr der Selbständigkeit des einzelnen Jugendlichen überlassen werden kann, sondern vom Lehrer zu steuern ist. Aus all diesen Gründen wird deshalb postuliert:

1. Alleiniges Abfragen des früher gelehrten Stoffs reicht nicht und wird in den Klassen als langweilig empfunden.

2. Wiederholen geschieht nach dem Einüben eines neuen Stoffes, der jetzt in Beziehung zu Früherem und nicht nur zum letzten Kapitel gesetzt wird. Hierbei ist wichtig, dass die Wiederholsituation vom Schüler nicht als solche empfunden wird. Das Wiederholen kann anhand von Fächerübergriff geschehen, muss aber nicht.
3. Wie bereits bei MEYER [2] Seite 208ff gefordert worden ist, benötigt man hierzu ein eigenes Beispielmaterial, auf das man gleich dem Spiralprinzip immer wieder zurückgreifen kann und bei jedem Wiederaufgreifen weiter ausbauen kann.
4. Wir brauchen aber auch eine Unterrichtstechnik, die es gestattet, das Wiederholen zu differenzieren und dann auch der Begabtenförderung anzupassen.

Unter solchen Aspekten, **benötigen wir eine neue Wiederholkultur**, die an mathematische Bedürfnisse auszurichten ist.

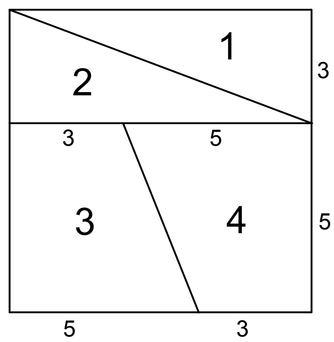
Hierbei geht es um das Auffinden ganzer Stoffgebiete, aber vor allem um „schöne“ d. h. interessante Aufgabenbeispiele, die hierzu geeignet sind. Da man davon ausgehen muss, dass es nicht gleich solche Beispiele in einer hinreichenden Anzahl geben wird, sollte man passendes Material sammeln, publizieren, um es zu einem späteren Zeitpunkt vielleicht in Lehrbücher aber auch Lehrerhandbücher einzubauen.

Einige solche Beispiele samt ihren „Grenzen“ werden im Folgenden vorgestellt:

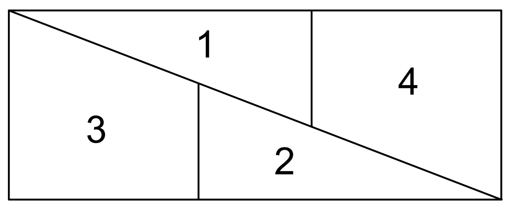
# 2. Differenzierende Beispiele

## 2. 1. Wo ist das erste Beispiel im Curriculum eingebettet?

Es geht um die Geometrie der Jahrgangsstufe 8 (also Strahlensatz, Ähnlichkeit und Satzgruppe des PYTHAGORAS sind *nicht* gelehrt). Die Berechnung des Flächeninhalts von Rechtecken, Parallelogrammen und Dreiecken ist bekannt. Eine erste Vorstellung vom Begriff der Zerlegungsgleichheit zweier Flächen ist vorhanden. Zur Vertiefung findet man dann in manchen Lehrbüchern (hier MEYER U. A. [1] Geometrie 8, Seite 66) die folgende Aufgabe:




> **Aufgabe 2.1.1:** Die beiden Bilder zeigen, dass die Rechtecke scheinbar zerlegungsgleich sind. Warum kann das nicht stimmen? Was ist falsch? Schneide beide Rechtecke und ihre Teile aus Papier aus (Maße in cm) und füge sie auf die angegebenen Weisen zusammen.




**Alle** Schülerinnen und Schüler können wohl die Situation mit den ausgeschnittenen Dreiecken nachstellen. **Alle** Schülerinnen und Schüler eines Gymnasiums sollten erkennen, dass die Flächeninhalte der beiden Figuren die verschiedenen Größen 64 $cm^2$ bzw. 65 $cm^2$ ergeben. Das kann bei einer Zerlegungsgleichheit nicht sein. Die beabsichtigte Verwirrung ist groß.

**Alle** sollten nach einiger Zeit erkennen – wenn man an der Flächenmaßdefinition der Schule nicht rütteln will – , dass die größere Fläche irgendwo ein nicht entdecktes Loch hat.

Nicht alle Schülerinnen und Schüler werden die Ursache des „Lochs“ erkennen. Hiermit kann man die Klasse bereits in zwei verschiedene Level einteilen, **differenzieren**.

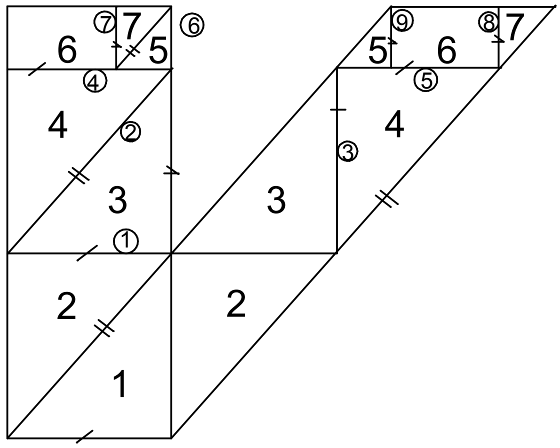
**Bemerkung:**
An diesem Beispiel zeigt sich der Wert einer genauen Zeichnung in der Geometrie: Zeichnet man die Situation des Rechtecks mit der Einheit 1 cm genau, so sieht man sehr wohl das „Loch“.

Die **Begabten** werden erkennen: Lässt man die gleich langen Strecken der Teile im Rechteck aneinander stoßen, so ist die scheinbare Diagonale in Wirklichkeit ein „leeres“ Parallelogramm, das offensichtlich den Flächeninhalt 1 cm$^2$ hat.

**Mit dieser Erkenntnis haben aber auch die Begabten die Situation kaum verstanden. Hier ist noch einiges zu tun, was man zur Differenzierung des weiteren Unterrichtsgeschehens nutzen kann.**

**Vorher** aber sollte man **allen** Schülerinnen und Schülern noch die folgende Aufgabe vorlegen:

> **Aufgabe 2.1.2:** Sind die bisher geführten Untersuchungen mit der Zerlegungsgleichheit falsch?
> Weshalb war die Überlegung zur nebenstehenden Zeichnung erlaubt?




Auch der zukünftige Unterricht wird keine totale Differenzierung gestatten, sondern wird – wie bisher – davon Gebrauch machen müssen, dass gelegentlich – wie oft? – begabtere Schülerinnen und Schüler Dinge erkennen, die den nicht so begabten zunächst nur mitgeteilt werden können; trotzdem handelt es sich hier um Dinge, die sie sich merken müssen:

Die „Zerlegungsgleichheit“ der Aufgabe 2.1.1 ist nur eine scheinbare, weil das Rechteck aus den Teilen des Quadrats *zusammengesetzt* wird. Dazu im Gegensatz ist bei nebenstehender Figur aber ein Ablauf angegeben (siehe die Nummern in den Kreisen und die eingezeichneten Parallelitäten), der zeigt, wie das Rechteck *und* das Parallelogramm zerlegt werden. Anschließend kann dann z. B. mit den Kongruenzsätzen bewiesen werden, dass die mit gleichen Nummern versehenen Teile jeweils kongruent sind.

Da in aller Regel solche Erkenntnisse nicht in den Lehrbüchern stehen, muss dieses Ergebnis den Schülerinnen und Schülern ins Heft diktiert werden. Es wäre nämlich abwegig anzunehmen, dass ein Schüler, der dieses Ergebnis selbst nicht erkannt und ohne schriftliche Fixierung nur gesagt bekommen hat, dieses drei Wochen später reproduzieren kann. Hier ist sicher zwischen den Schülern einer Klasse ein Unterschied, den man versuchen muss auszugleichen, wenn man zukünftig den Lehrerfolg heben will.

Nun wird die **Klasse geteilt**: Die Begabten bekommen ein Arbeitsblatt mit Fragen zur Vertiefung dessen, was bei Aufgabe 2.1.1 geschehen ist, während die anderen weitere einfache Aufgaben zur Zerlegungsgleichheit unter Aufsicht des Lehrers z. B. mit Kongruenzbeweisen u. a. lösen; der Lehrer interessiert sich nur gelegentlich für die Fortschritte der Gruppe der Begabten.

## 2. 2. Aufgabenblatt

> **Aufgabe 2.2.0:** Untersuche und hinterfrage Aufgabe 2.1.1 und lies die folgenden Fragen nicht.

Falls du dieses Problem nicht lösen kannst, sind dir die folgenden Fragen eine Hilfe:

> **Aufgabe 2.2.1:** Was ist das Wesentliche für die Zerlegung des Quadrats mit der Kantenlänge 8 cm in 4 Teile?

> **Aufgabe 2.2.2:** a) Erhält man immer die Problematik der Aufgabe 2.1.1, wenn man die Kante des Quadrats mit der Kantenlänge 8 cm in der vorgegebenen Weise *nicht* in 3 cm und 5 cm teilt?
> b) Löse die gefundene Gleichung näherungsweise.

c) Wie viele Lösungen sind bei b) Lösungen des Problems?
d) Gib eine halbwegs exakte Lösung an (frage u. U. hierzu den Lehrer).

**Aufgabe 2.2.3:** Weshalb sind alle Überlegungen unabhängig von der Wahl der Kantenlänge des Quadrats in Aufgabe 2.1.1?

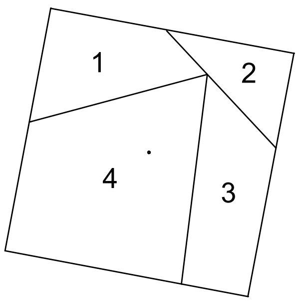
**Aufgabe 2.2.4:** Finde eine Quadratkante a von Aufgabe 2.1.1 so, dass die Teilungslänge x der Aufgabe 2.3 eine natürliche Zahl ist.

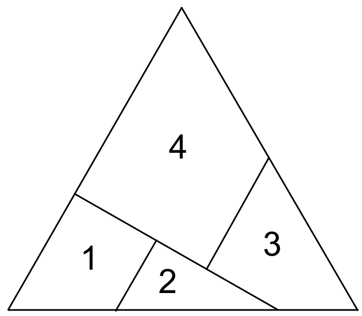
**Aufgabe 2.2.5:** Warum kann man nicht mit Kongruenzsätzen, Winkeln an parallelen Geraden u. ä. erklären, weshalb die beiden Flächeninhalte der Aufgabe 2.1.1 verschieden sind?

**Aufgabe 2.2.6:** Berechne ein Maß der Lücke im Rechteck der Aufgabe 2.1.1, das nicht ein Flächeninhalt ist.

**Aufgabe 2.2.7:** Konstruiere eine ähnliche Situation zu Aufgabe 2.1.1.

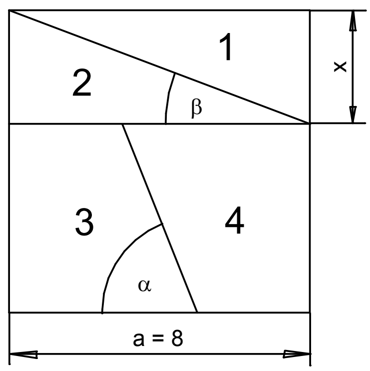
**Aufgabe 2.2.8** (nach http://mathworld.wolfram.com/Dissection.htlm; Trigonometrie nicht erforderlich): Wie muss man die Teilungspunkte und Winkel im Quadrat wählen, damit die folgende Zerlegungsgleichheit möglich ist? Das Endprodukt soll ein gleichseitiges Dreieck sein.




Hat man Schülerinnen und Schüler die mit Aufgabe 2.2.0 etwas anfangen können, so kann man sich das Aufgabenblatt sparen. In aller Regel werden dies aber nicht alle begabten Schülerinnen und Schüler einer Klasse sein. So wird man wohl den Weg eines Aufgabenblatts gehen müssen. Auch wird der Einstieg in einen differenzierten Unterricht sicher nicht an dieser Stelle gelingen, wenn nicht schon vorher dieser Unterrichtsstil durchgeführt worden ist. Die begabteren Schülerinnen und Schüler ziehen sich in eine Ecke des Klassenzimmers zurück, dürfen miteinander leise reden, um sich selbst zu kontrollieren.

## 2. 3. Lösungen und Grenzen des Hinterfragens




**Lösung zu Aufgabe 2.2.1:** Man muss das Quadrat so zerschneiden, dass es Kanten gibt, die gleich lang sind, damit man die Teile aneinander setzen kann. Um den Effekt der Aufgabe 2.1.1 zu erzielen, muss man darüber hinaus erreichen, dass z. B. nicht nur rechte Winkel bei der Zerlegung vorkommen.

**Lösung zur Aufgabe 2.2.2:** Man geht also davon aus, dass das Quadrat der Aufgabe 2.1.1 mit der Kantenlänge 8 cm in 2 Trapeze und 2 Dreiecke zerlegt wird. Man möge die Bezeichnungen der nebenstehenden Skizze beachten.

a) Der Flächeninhalt des Rechtecks in Aufgabe 2.1.1 ist dann
   $(8 + 8 - x)(8 - x)$,
   wobei $0 < x < 8$ sein muss.
   Die Doppelungleichung werden auch die begabteren Schülerinnen und Schüler nicht in jeder Klasse finden, wenn sie nicht bereits vorher erfahren haben, dass fast immer beim Aufstellen eines mathema-

tischen Terms aus einer „praktischen" Situation der Term nicht universell sondern eingeschränkt gilt. Erste Beispiele hierfür ergeben sich bei den Proportionen der Jahrgangsstufen 6 oder 7:
Es ist nur richtig, dass der Preis direkt proportional zur Masse *innerhalb gewisser Grenzen* ist. Übersteigt oder auch untersteigt man diese Grenzen, so ergibt sich ein anderes Verhältnis.

Das Problem der Aufgabe 2.1.1 ist, dass sich der Flächeninhalt von 64 unterscheidet. Also versucht man die folgende Gleichung zu lösen:
$y = (8 + 8 - x)(8 - x) = 64$
mit der Nebenbedingung $0 < x < 8$ .
Vereinfacht zu:
$x^2 - 24x + 64 = 0$
und $0 < x < 8$

b) **Schüler der Klasse 8 können das nicht.** Es sei denn, sie haben in Klasse 5 davon gehört, dass man durch bloßes **Einsetzen** (geschickt oder nicht geschickt) häufig eine Lösung einer solchen zunächst unlösbaren Gleichung erraten oder zumindest auf beliebige Genauigkeit angeben kann, was z. B. bei Benutzung eines Taschenrechners sehr schnell durchgeführt werden kann.
Ergebnis (in cm bzw. $cm^2$):

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 28 | 19 | 20 | 21 | 22 |
| y | 41 | 20 | 1 | -16 | -31 | -44 | -55 | -64 | -71 | -76 | -79 | -80 | -79 | -76 | -71 | -64 | -55 | -44 | -31 | -16 | 1 | 20 |

Da man offensichtlich jede Zahl zwischen den gewählten Rändern 1 und 22 einsetzen kann, ist verständlich, dass sich jeder Zwischenwert für zwei benachbarte y-Werte ergeben kann (sog. *intuitive Stetigkeit*). Also findet man:

c) Es gibt offenbar bei $x = 3$ und bei $x = 21$ Lösungen dieser Gleichung. Für letzteren Wert gilt aber nicht die Zusatzbedingung; also findet man: **Für dieses Problem gibt es genau eine Lösung.**

d) Das eben geschilderte Verfahren kann dazu dienen, weitere Nachkommastellen der Lösung $x = 3,\ldots$ zu finden. Man kann es aber auch anders machen: Viele der Mathematikanwender benutzen bei ihren meisten Problemen Formelsammlungen, Tabellenbücher und andere Unterlagen, ohne genauer den zugrunde gelegten mathematischen Sachverhalt zu untersuchen. Auch das will gelernt sein; deshalb ergibt sich die Frage, ob man nicht gelegentlich Schülern eine Formel u. ä. geben soll, damit sie weiterkommen. Im vorliegenden Fall benötigt man die Lösungsformel der quadratischen Gleichung und den Wurzelbegriff. Beides dürfte begabten Schülerinnen und Schülern keine Probleme machen und kann schnell gesagt sein.

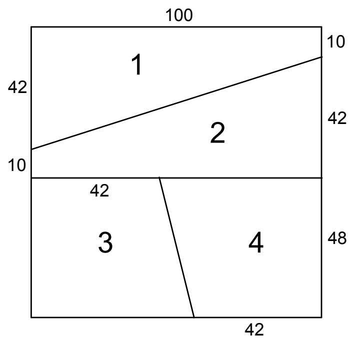
Taschenrechner-Ergebnis (in cm): $x = 3{,}05572809..$

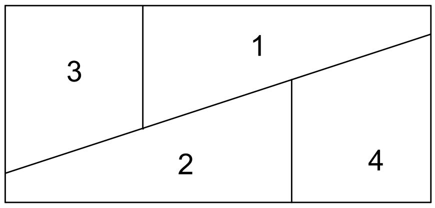
**Lösung zu Aufgabe 2.2.3:** Es sei a die Quadratkantenlänge; dann erhält man die folgenden Bedingungen:
$(2a - x)(a - x) = a^2$ mit $0 < x < a$.
Als Lösungen findet man $x = a\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ und $x = a\frac{3+\sqrt{5}}{2} >$ a; letztere Lösung ist also nicht zu gebrauchen.

**Lösung zu Aufgabe 2.2.4:** Das Problem ist, wie beseitigt man über ein zu wählendes a die Wurzel im Ergebnis von Aufgaben 2.2.3. Der Schüler muss noch die Definition der Wurzel und die Formel wissen:
$(u-v)(u + v) = u^2 - v^2$ . Er findet $a = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ und alle Vielfachen hiervon.

**Lösung zur Aufgabe 2.2.5:** Der Einsatz der genannten Sätze wäre unabhängig von der Kantenlänge aus Aufgabe 2.1.1 möglich; da aber die bisher gelösten Aufgaben zeigen, dass es auch Fälle gibt, in denen kein „Loch" entsteht, kann ein solcher Weg *nicht* zur Untersuchung der Problematik dienen.

**Lösung zur Aufgabe 2.2.6:** Hier hilft nur die Definition des Tangens, unter Umständen auch das Tangensadditionstheorem, weiter. Mit den Maßen aus Aufgabe 2.1.1 findet man $\tan\alpha = 5/2$ und $\tan\beta = 3/8$ bzw. $\tan(\alpha+\beta) = 46$, also $\alpha + \beta = 88{,}754635{,}73..^\circ$. Die Lücke wird also durch die Differenz zu $90^\circ$ verursacht.
**Lösung zur Aufgabe 2.2.7:** Alle Maße sind in mm gegeben.




Auch eine genaue Zeichnung hilft hier nicht weiter (warum?). Die genauen Berechnungen der Flächeninhalte ergeben 100 $cm^2$ bzw. 100,64 $cm^2$.

**Lösung zu Aufgabe 2.2.8:**
Die Aufgabe sieht man auf der Titelseite der Mitteilungen von Mathematik-Olympiaden e. V. 2002 Heft 4. Dort ist auch die Internetadresse angegeben. Leider kommt – wie so oft – die Verbindung nicht zustande. Der Autor der vorliegenden Abhandlung musste sich also selbst Gedanken machen. Das Ergebnis soll nicht wie bei mathematischen Publikationen üblich einfach dargestellt werden, sondern auch der Weg dorthin skizziert werden. Es ist zwar richtig, dass man Mathematik durch Vorführen von Problemen samt deren Lösungen seitens eines Lehrers lernt und dass es auch immer wieder Hochbegabte gibt, denen das Vorführen von Musterlösungen reicht, aber man muss auch etwas für die Nicht-Hochbegabten tun. Ihnen muss man zeigen, wie man zu Lösungen kommt. Hierbei ist bei den Klausuren der Mathematik-Olympiaden immer wieder zu beobachten, dass Neulinge bei diesen Veranstaltungen nicht wissen, was sie zu tun haben, eine Lösung zu finden und anschließend den Lösungsweg vernünftig darzustellen. Die folgende Lösung ist aber nicht nur für Hochbegabte wichtig. Es wird ein Beispiel vorgeführt, das zeigt, wie man auf hohem Niveau *in einer Klasse* wiederholen kann.

Wir gliedern deshalb die Lösung zu 2.2.8 in unüblicher Form:

**2.2.8.1 Hilfestellungen:**
Bevor man Lösungen beweist, muss man sie erst haben; d. h.: Welche Mittel kann man nutzen, eine geometrische Lösungsidee zu finden:

- Man fertigt eine genaue Zeichnung. Im vorliegenden Fall bedeutet dies, man teilt sehr exakt das Quadrat in der angegebenen Form. Man muss allerdings zugeben, dass dann die „Konstruktion“ des Dreiecks einen nicht unerheblichen Arbeitsaufwand mit sich bringt, der unnötig die Überlegungen verzögert, wenn man nicht dynamische Geometriesoftware verwendet. Deshalb ist das Folgende geschickter:
- Man fertigt mit Papier und Schere ein Modell.

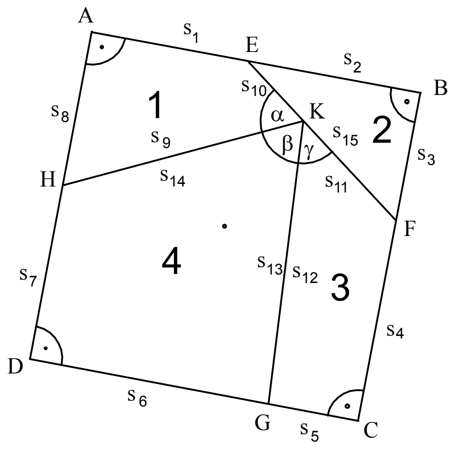
**2.2.8.2 Sinnvolle Einschränkungen:**
Das Endprodukt E soll ein gleichseitiges Dreieck sein. Hier wird auf einmal sehr viel verlangt:

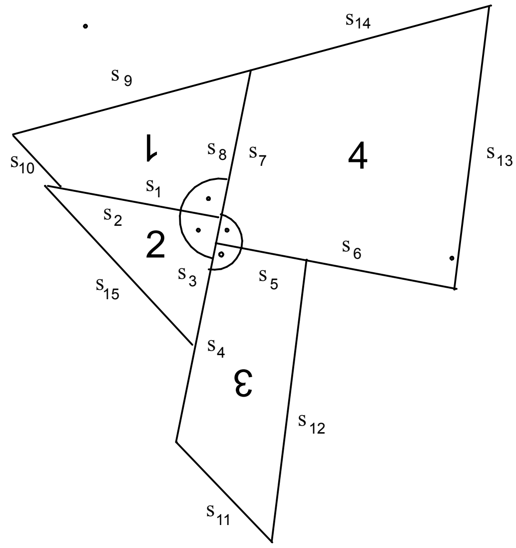
- E ist ein Dreieck.
- E ist gleichschenklig.
- E ist gleichseitig.

Oft ist es sinnvoll, bei einer derartigen Stufung nicht alles auf einmal anzustreben. Man begnügt sich im vorliegenden Fall zunächst einmal damit, zu untersuchen, ob eine derartige Zerlegung ein Dreieck ergibt, um hierfür die Bedingungen zu lokalisieren.

Man muss allerdings auch zugeben: Eine solche Verallgemeinerung der ersten Fragestellung kann auch die Schwierigkeit des Problems vergrößern. Es kann sich bei einem solchen Vorgehen nur um einen Versuch handeln, der nicht erfolgreich zu sein braucht.

**2.2.8.3 Das experimentelle Vorgehen und der Beweis:**
Grundsätzlich versuchen wir, immer mehr *notwendige* Bedingungen für die Unterteilung des **Quadrat**s (siehe die folgende *linke Zeichnung*) zu finden, bis die Bedingungen für das **Endprodukt** (siehe die folgende *rechte Zeichnung*) *hinreichend* sind:




**2.2.8.3.1:**
Das Quadrat wird in der angegebenen Weise irgendwie zerlegt und dann versucht, die Teile zu einem Dreieck zusammenzufügen:
Man gibt den Seiten der Zerlegungsteile Namen (siehe die Abbildungen). Beginnt man wie auf der rechten Zeichnung mit 4 und fügt 1 so an, dass die Strecken $s_7$ und $s_8$ so aufeinander zu liegen kommen, dass sie einen „oberen“ Endpunkt gemeinsam haben, und fügt 2 und zuletzt 3 an, so stellt man fest:
Man erhält kein Dreieck sondern i. Allg. ein Neuneck.
**Die *entscheidenden* Seiten des Neunecks zeigen aber in die *richtigen* Richtungen.** (1)

*Begründung:*
$s_9$ und $s_{14}$ bilden im Endprodukt eine Gerade, weil sie im Quadrat zusammenfallen und gegenüber $s_8$ denselben Winkel einschließen; da aber bei der Entstehung des Endprodukts die Teile nur verschoben und gedreht, nicht aber gewendet werden, sind $s_8$ und $s_{14}$ nach der Umkehrung des Winkelsatzes an parallelen Geraden parallel und liegen deshalb auf einer Geraden. Die vier rechten Winkel des Quadrats (siehe die linke Zeichnung) bewirken, dass sich die Figuren 3 und 4 mit 1 und 2 längs einer Geraden im Endprodukt (siehe die rechte Zeichnung) treffen. Analog: Im Quadrat (linke Zeichnung) bilden $s_{13}$ mit $s_7$ bzw. $s_{12}$ mit $s_4$ den gleichen Winkel (Z-Winkel); also sind im Endprodukt $s_{12}$ und $s_{13}$ (siehe die rechte Zeichnung) parallel. Im Quadrat (linke Zeichnung) erkennt man weiter, dass $s_9$ mit den Strecken $s_{10}$, $s_{11}$ und $s_{15}$ den gleichen Winkel bilden. Also sind diese Strecken im Endprodukt (der rechten Zeichnung) parallel.

**2.2.8.3.2:**
Damit es ein Dreieck wird, muss offenbar gelten:
$\mathbf{s_1 = s_2,\ \ s_5 = s_6}$ **und** (2a)
$\mathbf{s_4 + s_7 \ = \ s_3 + s_8}$ (2b)
Bezeichnet man die Quadratseite mit a, so folgt hieraus
$s_4 + s_7 \ = \ (a - s_3) + s_7 \ = \ s_3 + (a - s_7)$. Also gilt notwendig im Quadrat
$\mathbf{s_3 \ = \ s_7}$ **bzw.** $\mathbf{s_4 \ = \ s_8}$**.**
**Damit das Endprodukt ein Dreieck ist, müssen** nach (2a) **E und G die Mitten der Quadratseiten sein und nach** (2b) **F und H die gegenüber liegenden Quadratseiten im selben Verhältnis teilen.** (3)
Deshalb sind im Quadrat die Dreiecke EBF und GDH kongruent und insbesondere die **Strecken EF und GH parallel und gleich lang.** (4)

**2.2.8.3.3:**
**Ist das Enddreieck gleichschenklig,** so gilt z. B.
$s_9 + s_{14} \ = \ s_{12} + s_{13}$.
In der Quadratzerlegung sind $s_9 = s_{14}$ und $s_{12} = s_{13}$. Hieraus folgt
$\mathbf{s_9 \ = \ s_{14} \ = \ s_{12} \ = \ s_{13}}$**.** (5)
**Ist das Enddreieck gleichschenklig, so muss das Dreieck GHK ebenfalls gleichschenklig sein. Damit sind in der Quadratzerlegung** $\boldsymbol{\alpha \ = \ \gamma}$, weil GH und EF parallel sind.

**2.2.8.3.4:**
**Ist das Enddreieck gleichseitig,** so gilt:
$s_{10} + s_{15} + s_{11} = s_9 + s_{14} = s_{12} + s_{13}$
Wegen der bisher bewiesenen notwendigen Bedingungen folgt hieraus:
$s_{15} = s_9 = s_{12}$
Das Enddreieck kann also nur gleichseitig sein, wenn bei der Quadratzerlegung gilt:
$\overline{EF} = \overline{KG} = \overline{KH}$ (6)

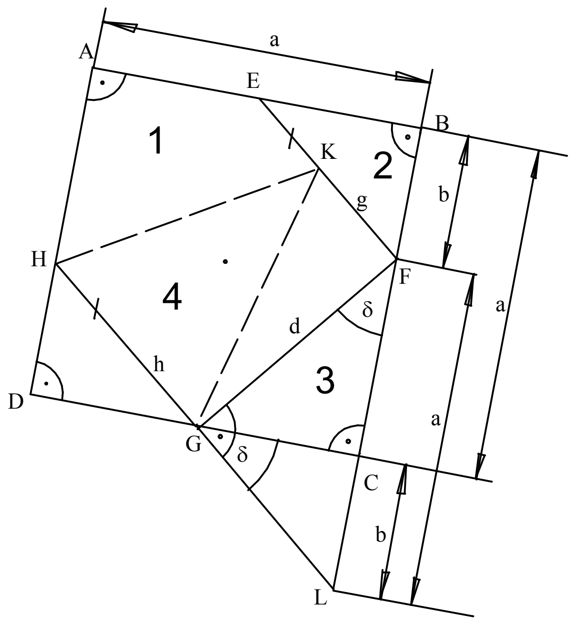
**2.2.8.3.5:**
Etwa an dieser Stelle wurde versucht, das Restproblem durch Einführung von Koordinaten zu lösen. Es ergab sich eine Gleichung 4. Ordnung in Abhängigkeit von $s_3$, deren Koeffizienten außer beim linearen Glied alle von null verschieden waren. Sehr häufig sind geometrische Probleme nur sehr schlecht mit Koordinaten zu lösen. Es wurde das Ergebnis dahingehend gewertet, dass das Restproblem in zwei Untersuchungen zerlegt werden muss, was dann auch zum Ziel führte.

**2.2.8.3.6:**
**Die Idee:** Auf der Strecke GH muss ein gleichseitiges Dreieck errichtet werden, dessen Spitze auf der Geraden EF liegt. Es muss also die Höhe des gleichseitigen Dreiecks gleich dem Abstand der Geraden GH und EF sein.

*Hinweis:*
*In der nächsten Zeichnug geht das Lot auf HG durch F nicht durch G!* Zum Beweis nimmt man an, dass das Lot von F auf HL durch den Mittelpunkt G der Seite CD geht. Durch Anwendung des Lehrsatzes von PYTHAGORAS folgt dann, dass auch F die Mitte einer Quadratseite ist. Dann aber ist das Dreieck HGK nicht gleichseitig.

Man möge in der unteren Zeichnung die Winkel δ beachten, die nach dem Satz über Winkel mit paarweise aufeinander senkrecht stehenden Schenkeln gleich groß sind.
Da G die Mitte einer Quadratseite ist, gilt wegen (4): $\Delta EBF \cong \Delta GDH \cong \Delta GCL$

Vereinfacht man $s_3 = b$ und erinnert sich, dass die Quadratseite a heißt, so findet man:
$\overline{FL} = a$
(7)




Für den Abstand d = d(g,h) gilt dann:
$$\frac{d}{a} = \cos\delta = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\delta}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2b}{a}\right)^2}}$$
Hieraus folgt:
$$d = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+4b^2}} \qquad (7)$$
Die Basis GH des gleichseitigen Dreiecks hat nach PYTHAGORAS die Länge $\frac{\sqrt{a^2+4b^2}}{2}$.
Also hat das gleichseitige Dreieck die Höhe
$$h = \frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{a^2+4b^2}\,. \qquad (8)$$
Nach obigen Überlegungen muss gelten h = d.
Aus (7) und (8) findet man deshalb:
$$\frac{a^2}{\sqrt{a^2+4b^2}} = \frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{a^2+4b^2} \qquad (9)$$
Hieraus folgt mit einer einfachen Rechnung für das Verhältnis, in der die Quadratseite a geteilt werden muss:
$$\frac{b}{a} = \sqrt{\frac{\sqrt{3}-\frac{3}{4}}{3}} = \sqrt{\frac{4-\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}}$$
Geht man von einer Quadratseite der Länge 10 aus, so ergibt sich für $b = \overline{BE} = \overline{DH} = 5{,}721453217..$

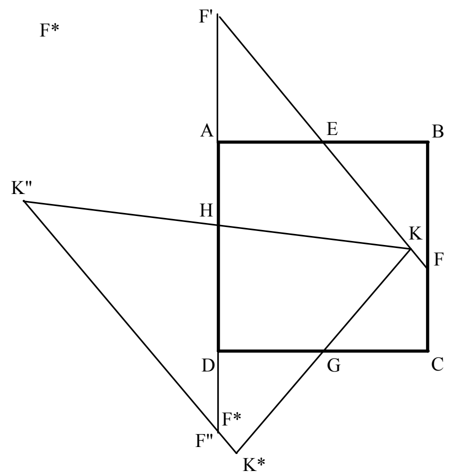
**2.2.8.3.7:** 1. **Verbesserung des letzten Schrittes:** Als dann der Autor auf dem bayerischen Trainingslager für die Mathematik-Olympiade das Beispiel vorführte, fand ein Schüler für den letzten Schritt eine Verbesserung, die ohne Kenntnisse in Trigonometrie verwirklicht werden kann:

Am Quadrat erkennt man $s_{10} + s_{11} = s_{15}$. Im gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge c gilt $s_{10} + s_{11} + s_{15} = c$; also ist $s_{15} = c:2$. Da Quadrat und gleichseitiges Dreieck flächengleich sein sollen, gilt $a^2 = c^2\frac{\sqrt{3}}{4}$. Hieraus findet man $c = \frac{2a}{\sqrt{\sqrt{3}}}$. Also ist $s_{15} = \frac{a}{\sqrt{\sqrt{3}}}$. Hiermit ergibt sich nach dem Satz des PYTHAGORAS angewandt auf das Dreieck EBF: $b^2 = \frac{a^2}{\sqrt{3}} - \frac{a^2}{4} = a^2\frac{4-\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}$, also $b = a\sqrt{\frac{4-\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}}$; das ist das vorher gefundene Ergebnis.

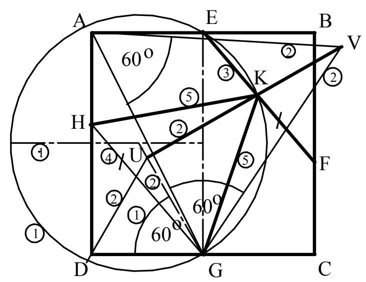
**2.2.8.3.7: 2. Verbesserung von 2.2.8.3.6: A**uf der 5. Tagung „Forum zur Begabtenförderung in Mathematik" vom 3. bis 5. 4. 2003 an der Universität Stuttgart hat Professor Dr. Rudolf Strässer (TU Lulea Schweden) Obiges kennen gelernt. Ihn hat vor allem der algebraische Weg von 2.2.8.3.7 gestört. In einem Schreiben hat er mir dann wie folgt letzteres gelöst:

a) Man zeichnet in ein Quadrat ABCD die Seitenmitten E und G bzw. die Punkte F und H wie bisher so ein, dass $\overline{BF} = \overline{DH}$ (vgl. 2.2.3.8.2) ist.
Spiegle EBF an E zu EAF'. Da bei der Punktspiegelung Geraden in hierzu parallele übergehen, liegen H, A und F' auf einer Geraden.
Spiegle F'HK an H zu F"HK".
Spiegle GCFK an G zu GDF*K*. Es ist hier noch zu zeigen, weshalb gilt F" = F* und K", F" = F* und K* auf einer Geraden liegen.

Damit ist gezeigt:
Das Quadrat ABCD ist flächengleich mit dem Dreieck K"KK*.




b) Will man nun ein gleichseitiges Dreieck HGK erzeugen, so muss der Winkel EKG 120° groß werden, also K auf dem Peripheriewinkelkreis zu diesem Winkel über EG liegen.
An dieser Stelle zeigt sich der Vorteil einer Geometriesoftware: Errichtet man bei variablen H auf $\overline{AD}$ über HG gleichseitige Dreiecke und verfolgt deren Spitze S, so stellt man fest, dass S auf einer zu $\overline{AD}$ gleich langen Strecke $\overline{UV}$ liegt.
*Begründung:* $\overline{UV}$ geht aus $\overline{AD}$ durch Drehung um G um 60° hervor.
Das gesuchte Punkt K ist der Schnittpunkt des Peripheriewinkelkreises mit $\overline{UV}$. Man „sieht" auch deutlich: Es gibt nur einen Schnittpunkt.




Die in der Zeichnung angegebenen Nummern geben die Konstruktionsschritte bei einer Handzeichnung an.
1: Konstruktion des Peripheriewinkelkreises.
2: Die 60°-Drehung von $\overline{AD}$ um G.
3: Konstruktion von EK, wobei K der Schnitt des Kreises mit der gedrehten Strecke ist.
4: $\overline{BF} = \overline{DH}$
5: Der Rest der Aufteilung des Quadrates.

**2.2.8.3.9: Die aufgestellten Bedingungen (3), (5), und (6) sind für die Zerlegungsgleichheit hinreichend.**
*Begründung:*
(3), (5), und (6) geben eine Einteilung eines Quadrats in der gewünschten Form. Jede vorgegebene Einteilung ergibt das Neuneck mit $s_{12}$ und $s_{13}$ bzw. $s_{10}$, $s_{11}$ und $s_{15}$ parallel, dessen Seiten wegen der Bedingung (3) ein Dreieck bilden.
Das Endprodukt ist wegen den Bedingungen (5) gleichschenklig, weil nach Konstruktion $s_{13} = s_{14}$ und $s_9 = s_{12}$ sind. Wegen (9) hat die Fläche 4 an entscheidender Stelle einen $60^o$-Winkel; also ist das gleichschenklige Endprodukt gleichseitig.
*Damit ist auch die Existenz von Quadrateinteilungen gegeben, die zu beliebigen bzw. gleichschenkligen, flächengleichen Dreiecken führen.*

# 3. Was haben solche Beispiele mit mathematischem Arbeiten zu tun?

Eine ganze Reihe von grundsätzlichen Techniken des mathematischen Forschens werden insbesondere an Aufgabe 2.2.2.8 aus Kapitel 2.2 deutlich. Man sollte zukünftig diese übergeordneten Techniken im Unterricht nennen und nicht verschweigen, wie man zu den Ideen kommt. Mathematik darf zukünftig auch an der Schule keine Geheimwissenschaft mehr sein.

1. Erst durch **Intuition** (Fantasie) kann man Behauptungen aufstellen. Das *Ausformlieren* von ihnen steht an *2. Stelle*; *dann erst* kommt das *Beweisen* solcher Behauptungen. Selbstverständlich wird nicht jede Intuition zu beweisbaren Behauptungen führen, doch zeigt die Erfahrung, das derjenige, der diesen Weg bewusst geht, immer häufiger Aussagen aufstellt, die man dann auch beweisen kann. **Experimente fördern die Intuition.** So wird man immer wieder versuchen, „Grundsätzliches“ aus gerechneten Beispielen zu entdecken. Die Rechnung wird in der Geometrie durch Zeichnungen bzw. u. U. auch durch Modelle ersetzt. Leider wird dieser Weg an der Schule viel zu wenig gepflegt.

2. Man versucht, immer mehr **notwendige** Bedingungen aufzustellen, und hofft, dass ihre Gesamtmenge **hinreichend** wird.

3. Mathematische Entdeckungen werden oft durch das Wechselspiel zwischen **Spezialisieren und Verallgemeinern** oder umgekehrt gemacht. Dieses Wechselspiel gehört zu den übergeordneten Grundlehrzielen eines jeden Mathematikunterrichts.

4. Die folgende Bemerkung geht auf ARTIN [1] zurück: Das Koordinatisieren geometrischer Probleme führt häufig zu vermeidbaren algebraischen Schwierigkeiten. Man gewinnt mehr Einsicht über die Allgemeingültigkeit einer Aussage, wenn man sie **synthetisch löst**. Auch hierbei ging die Schule der Vergangenheit mit ihrer Euphorie der Universalität der Vektorrechnung nicht den richtigen Weg, wie sich auch daran zeigt, dass nicht selten Reifeprüfungsaufgaben viel rascher und damit eleganter synthetisch als mit Vektorrechnung gelöst werden können.

5. Jeder ist glücklich, der ein Problem gelöst hat. Doch nicht selten, erkennt man selbst oder ein anderer später, wie sich der Weg **vereinfachen** lässt. Das ist normal und hat nichts mit der Unerfahrenheit des Schülers zu tun.

6. Hat man ein Problem gelöst, so gehört es eigentlich zum Mathematischen dazu, **neue Fragen** zu finden, zumindest zu versuchen, wie der dargestellte Problemablauf verallgemeinert werden kann.

Hat man wirklich die Absicht, die mathematische Bildung der Schule erfolgreicher werden zu lassen, so wird man nicht umhinkommen, dies alles zukünftig im Unterricht klarer werden zu lassen.

# 4. Geeignete Beispielgruppen zur Differenzierung und Wiederholung

Die in Kapitel 2. getroffene Darstellung lässt doch deutlich werden, dass wohl nicht jeder Lehrer bereit sein wird, den Weg des Differenzierens zu gehen, wenngleich zugegeben werden muss, dass es auch nicht so schwierige Beispiele gibt.

Ein Weg, den ich für die Gesamtsituation bereits früher (1995 MEYER [2]) vorgeschlagen habe:

Man sollte bei „schönen" Schulbeispielen im Laufe des Curriculums immer wieder auf diese quasi auf einer höheren Stufe zurückkommen, wie sich dies etwa BRUNER, der Schöpfer des Spiralprinzips, in anderem Zusammenhang vorgestellt haben mag. So kann man gerade durch das vorgeführte Beispiel eine interessante Anwendung für die quadratische Gleichung bzw. u. U. den Tangens sehen, wie dies dem Autor wohl schon 1980 in MEYER [3] z. B. Seite 11 vorschwebte.

In unserem Fall wäre es dann eine gute Gelegenheit bei den quadratischen Gleichungen der Klasse 9 bzw. beim Tangens in Klasse 10 Obiges aufzunehmen. So könnte man in natürlicher Weise wiederholen, wenn man – wie im vorliegenden Beispiel – in den späteren Schuljahren noch einmal auf die Zerlegungsgleichheit von Flächen zurückkommen könnte. Es würden sicher viele Lerninhalte nicht so schnell in Vergessenheit geraten, wie dies heute leider der Fall ist, was beim vorliegenden Beispielmaterial sicher der Integralrechnung der Schule zugute kommen könnte.

In MEYER [4] wird ein Beispielmaterial unter der Überschrift „Besondere Punkte im Dreieck" zusammengestellt, das an den ersten einschlägigen Erfahrungen (z. B. 7. Jahrgangsstufe) mit den Schnitten der Höhen, Seitenhalbierenden, Mittelsenkrechten und Winkelhalbierenden am Dreieck in der „gehobenen Mittelstufe" (9. Jahrgangsstufe) mit den Sätzen von MENELAOS, CEVA, APOLLONIUS und FEUERBACH fortgesetzt wird, das aber dann auch Stoff für die Kollegstufe bietet (vgl. MEYER [4]).

Eine weitere übergeordnete Beispielgruppe ergäbe sich, wenn man am Gymnasium endlich aufhören würde, alles, was mit Kurvendiskussion zu tun hat, gewaltsam in die Kollegstufe zu verschieben. Der Funktionsbegriff ist ab dem Betrachten von Diagrammen in der Jahrgangsstufe 5 im Unterricht stets präsent, auch wenn er häufig erst in Jahrgangsstufe 8 als Begriff erscheint. Die Proportionalitäten der Jahrgangsstufen 6 oder 7 führen notwendigerweise zum Betrachten der zugehörigen Graphen. Spätestens jedoch ab Jahrgangsstufe 8 ist im Zusammenhang mit dem Kennen-lernen der linearen, quadratischen, trigonometrischen und e-Funktionen die Kurvendiskussion laufend weiter so auszubauen, dass zu Beginn der Kollegstufe eigentlich nur noch das bisher Bekannte durch Grenzwertbetrachtungen auszubauen ist. Man könnte so erheblich die von allen empfundene Überlastung der Jahrgangsstufe 11 abbauen.

# 5. Bemerkungen der Herausgeber der Mathematikinformation

Bedenkt man die Arbeitszeit, die für den Entwurf diese Abhandlung erforderlich war, so ist klar, dass eine innere Differenzierung dieser Art nicht vom einzelnen Lehrer entworfen werden kann, weil es ihm hierzu an Arbeitszeit fehlt.

Die Aufnahme solcher Ideen in ein Schulbuch oder Lehrerhandbuch ist auch sehr fraglich, weil dann die Unterscheidung zwischen geeigneten und weniger geeigneten Schülern für eine Begabtenförderung allzu leicht z. B. durch passende Nachhilfe unterlaufen werden könnte.

Man sollte deshalb zumindest eine Zeit lang solche Einzelideen eigens in Zeitschriften veröffentlichen und sammeln. Die Mathematikinformation könnte hierzu ein Forum sein. So mögen alle, die Ideen haben, ermutigt werden, ihr Können der Zeitschrift zur Verfügung zu stellen und nicht glauben, dass es immer große Ideen sein müssen, die in der Mathematikinformation publiziert werden.

# 6. Literatur

Artin, E. [1]: Geometric Algebra, Interscience Publishers, Inc. New York 1964

Barth u. a. [1]: Anschauliche Mathematik, Ehrenwirth-Verlag München

Meyer u. a. [1]: Brennpunkt Geometrie 8, Schroedel-Schulbuchverlag 1991 vergriffen

Meyer Karlhorst [2]: Gymnasialer Mathematikunterricht im Wandel, franzbecker 1995

[3]: Anwendungsaufgaben im Mathematikunterricht: Algebra und Geometrie, Hirschgraben-Verlag Frankfurt/Main 1980 vergriffen

[4]: Besondere Punkte und Linien im Dreieck, Mathematikinformation 40, in Vorbereitung

Anschrift des Autors:
Dr. Karlhorst Meyer
Kyffhäuserstraße 20
85579 Neubiberg