M A T H E M A T I K I N F O R M A T I O N

GYMNASIUM STARNBERG

FACHBEREICH MATHEMATIK Nr.2

2. 2. 1981

52

Dr. Karlhorst Meyer

Vektorielle Darstellung von affinen Punkträumen ohne Ortsvektoren

Betrachtet man ältere Literatur der Analytischen Geometrie bzw. auch neuere Schulbuchliteratur, so fällt auf, daß *nicht jeder Vektor ein Vektor ist.* So findet man etwa in [6]:

"Eine Klasse parallelgleicher Pfeile heißt Vektor, wenn eine gewisse Menge derartiger Pfeilklassen den Vektorgesetzen gehorcht" ([6], Seite 8); dann folgt:

"Im $\mathbb{R}^3$ soll ein bestimmter Punkt ausgewählt und als Ursprung O oder Nullpunkt bezeichnet werden. Dann bestimmen Repräsentanten mit dem Anfangspunkt O, z.B. $\overrightarrow{OA} = \mathfrak{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathfrak{b}$,..... die Lage ihrer Endpunkte A, B, ... bezüglich ihres Ursprungs O, ihren "Ort". Daher nennt man diese Repräsentanten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, ... die Ortsvektoren ihrer Endpunkte A, B, ... bezüglich des Ursprungs" (Seite 36 aus [6]).

Mit obigen Bezeichnungen wird dann auf Seite 38 ein *Vektorrepräsentant $\overrightarrow{AB} = \mathfrak{b} - \mathfrak{a}$ eingeführt.*

Auf Seite 39 folgt: *"Nennt man einen Vektorrepräsentanten kurz "Vektor", dann kann man die Klassen parallelgleicher Pfeile als freie Vektoren bezeichnen, um den Unterschied zwischen dem einzelnen Pfeil und seiner Pfeilklasse hervorzuheben."*

Dann heißt es noch einmal: *"Ein Ortsvektor $\overrightarrow{OA}$ ist jener Repräsentant des Vektors $\mathfrak{a}$, der an den Ursprung O gebunden ist. Man nennt den Ortsvektor deshalb auch einen gebundenen Vektor".*

Es folgt noch ein Hinweis auf sogenannte *"liniengebundene Vektoren"*, auf die hier verzichtet werden kann.

Ja, so kompliziert ist das mit den Vektoren - oder wie wenig nur sind Deutschland's Algebraiker und Geometer, angefangen von E.ARTIN (siehe z.B. [1]), E.NOETHER und V.D.WAERDEN (siehe z.B. [12]), H. LENZ (siehe z.B. [11]), LINGENBERG [8] und viele andere, verstanden worden. Ähnlich Verwirrendes wie in [6] findet man auch an anderer Stelle der Schulbuchliteratur.

JEHLE, SPREMANN und ZEITLER [7] versuchten eine saubere, wenngleich für meinen Geschmack zu schwerfällige und in den Grundlagen unübliche Definition des affinen Punktraumes (siehe [7] Seite 72); doch auf Seite 74 des genannten Unterrichtswerkes spuken abermals Ortsvektoren, wenn auch gegenüber [6] in gemilderter Form.

Im folgenden wird das Gerippe einer Methode aufgezeichnet, die seit etwa 1950 an deutschen Universitäten gelehrt wird und die in abgeänderter folgender Form seit ca 10 Jahren im gymnasialen Bereich laufend getestet werden konnte.

Beispiele zur Begriffseinführung, wie auch Übungsbeispiele sind im Unterricht unersetzbar, werden aber im folgenden aus Platzgründen weggelassen, wenn sie in der üblichen Schulbuchliteratur zu finden sind.

Wir werden von den folgenden Zielsetzungen geleitet:

Zielsetzungen:

a) **Anhand geometrischer Eigenschaften wird in der Mittelstufe allmählich der Begriff "Vektorraum" so aufgebaut, daß er auch noch in der Kollegstufe verwendbar ist.**

b) **Im Leistungskurs werden die affine Ebene und der affine Punktraum hinsichtlich ihrer Inzidenzeigenschaften axiomatisch festgelegt.**

Durch diese Abweichung vom CULP [2] gewinnt man die Möglichkeit, die eingangs erwähnten Vektorunterscheidungen, die die Mathematik heute nicht mehr kennt, zu vermeiden.

c) Auf Gymnasialniveau sollte auf die Frage nach der Koordinatisierbarkeit solcher gemäß b) definierter affiner Räume nicht eingegangen werden. Es wird hier deshalb nur auf Grundlagenliteratur wie HALL [5] und PICKERT [13] verwiesen. Das gleiche gilt für die Bedingungen, die eine Koordinatisierung über Körper (siehe z.B. bei ARTIN [1]) ermöglichen.

d) Ein durch einen Vektorraum konstruiertes algebraisches Modell wird als affiner Punktraum erkannt.

e) Um Zeit für Übungsbeispiele zu gewinnen, wird die Theorie auf möglichst wenigen Begriffsbildungen der Grundlagen aufgebaut.

§1 Rückblick auf die Vektoren der Mittelstufe und deren Verfremdung.

Zu Beginn des Curriculums Analytische Geometrie in K12 empfiehlt sich eine Rückschau:

Die Schüler haben in der Mittelstufe an drei verschiedenen Stellen Vektoren kennen gelernt:

I Ebene aber auch räumliche Verschiebungen (Translationen) können nacheinander ausgeführt werden und es ergibt sich wieder eine Verschiebung. Schreibt man in der Menge V der Verschiebungen das Nacheinanderausüben als +, so hat (V,+) die Struktur einer ABELschen Gruppe. Verschiebungen nennt man dann auch Vektoren (7. und 8.Jahrgangsstufe).

1.1 Definition: Eine Verschiebung ist durch Vorgabe eines Paares (Punkt P, Bildpunkt P´) gegeben. Jeder weitere Punkt Q wird auf Q´abgebildet mit $QQ' \parallel PP'$ und $QP \parallel Q'P'$ (vergl.ARTIN [1] Seite 54 und folgende).

II Beobachtet man die Wirkungsweise einer Verschiebung auf die Punkte einer Ebene, so erkennt man:

1.2 Definition: Ein Vektor ist eine Klasse (=Menge) aus gleichlangen und gleichgerichteten Pfeilen.

Es darf hier nicht stören, daß in völlig unnötiger Weise die metrischen Begriffe Länge und Richtung ins Spiel gebracht werden.

Führt man in der Ebene Koordinaten ein, so findet der Schüler rein experimentell die Komponentendarstellung der Vektoren bzw. die Struktur (V,+) in der Komponentendarstellung (8.Jahrgangsstufe).

III In der 9.Jahrgangsstufe wird dann die Struktur (V,+) abgerundet: Durch die zentrische Streckung als Anwendung des Vierstreckensatzes ergibt sich zwangsläufig eine Multiplikation mit Skalaren:

1.3 Definition: a) Ist $\mathfrak{a}$ eine Verschiebung gemäß 1.1, so ist $k \cdot \mathfrak{a}$ mit k aus dem Körper K eine Verschiebung (derselben Richtung), die sich als Bild der zentrischen Streckung S(Z,k) mit beliebigem Zentrum Z und Streckungsfaktor k ergibt.

b) Ist $\mathfrak{a}$ ein Vektor gemäß 1.2, so ist $k \cdot \mathfrak{a}$ mit k aus dem Körper K ein Vektor derselben Richtung und der k-fachen Länge.

Wie frühere Didaktikergenerationen glauben wir verantworten zu können, daß beim Vierstreckensatz bzw. bei der zentrischen Streckung metrische Eigenschaften ins Spiel gebracht werden, die primär mit dem Begriff "Dilatation" nichts zu tun haben (vergl. ARTIN [1] Seite 54 und folgende).

Die Wohldefiniertheit der Multiplikation mit einem Skalar, also die Unabhängigkeit von der Auswahl des Repräsentanten gemäß 1.3.a) wird in K12 nochmals wiederholt.

In der 9.Jahrgangsstufe wurden erstmals die algebraischen Gesetzmäßigkeiten des Vektorraumes,alsoder Menge der Vektoren,zusammengestellt und die Unterschiede zur Körperstruktur hervorgehoben. Hier wird nun nur wiederholt:

1.4 Definition: Eine Menge V mit einem Körper K und den Abbildungen $+: V \times V \longrightarrow V$ und $\cdot: K \times V \longrightarrow V$ heißt Vektorraum über K in Zeichen $(V:K,+,\cdot)$, wenn gilt:

1) $\mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c}$ für alle $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ aus V.

2) Es gibt den Nullvektor O, d.h. $O + \mathfrak{a} = \mathfrak{a} + O = \mathfrak{a}$ für alle $\mathfrak{a}$ aus V.

3) Zu $\mathfrak{a}$ aus V gibt es ein $\mathfrak{b} := -\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = O$.

4) Für alle $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ aus V gilt $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}$.

1) mit 4) besagen nichts anderes als (V,+) ist eine ABELsche Gruppe.

5) Für alle k,l aus K und alle $\mathfrak{a}$ aus V gilt $k \cdot (l . \mathfrak{a}) = (kl) . \mathfrak{a}$.

6) Für alle k aus K und alle $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ aus V gilt:
$k \cdot (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = k . \mathfrak{a} + k . \mathfrak{b}$.

7) Für alle k, l aus K und alle $\mathfrak{a}$ aus V gilt:
$(k + l) . \mathfrak{a} = k \cdot \mathfrak{a} + l . \mathfrak{a}$.

8) Für alle $\mathfrak{a}$ aus V und 1 aus K gilt: $1 \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$.

9) Für alle k aus K und alle $\mathfrak{a}$ aus V gilt: $k \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{a} \cdot k$.

Es zeigt sich, daß die Komponentendarstellung aus II bei Hinzunahme einer geeigneten Multiplikation mit Skalaren (einfachster Fall einer Matrizenmultiplikation) alle Eigenschaften eines Vektorraumes erfüllt:

<u>1.5 Definition:</u> Für k, a_i, b_i mit i = 1,2,...,n aus dem Körper K definiert man:

$$k\cdot\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}ka_1\\ka_2\\\vdots\\ka_n\end{pmatrix}\;;\quad \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\\vdots\\a_n+b_n\end{pmatrix}.$$

<u>1.6 Satz:</u> Die Menge der n-tupel über einem Körper K mit der in 1.5 definierten Addition und Multiplikation mit Skalaren ist ein Vektorraum.

Die algebraische Bedeutung der n-tupel über einem Körper K gilt es noch in K12 zu präzisieren (vergl. 1.13).

Benutzt man in der Kollegstufe den Vektorbegriff nur im Rahmen geometrischer Anwendungen im Anschauungsraum, so könnte man in der Tat eine didaktische Diskussion führen, ob nicht doch der alte Weg über Ortsvektoren, freie Vektoren usw. bei der Einführung des affinen Punktraumes Vorteile hat. Da aber bereits bei endlichen Körpern die Anschauung nicht mehr benutzt werden kann, haben sich die eingangs zitierten Algebraiker und Geometer in den dreißiger Jahren bemüht, eine Vektorraumdefinition einzuführen, die in allen Anwendungsbereichen benutzbar ist. Wenn auch die volle Anwendungsbreite des Vektorbegriffs am Gymnasium sicher nicht zur Geltung kommen wird, so sollte ein guter didaktischer Vorsatz, Begriffsdefinitionen stets im kleinen Bereich so zu verwenden, daß sie jederzeit auf die volle Anwendungsbreite ausgedehnt werden können, ohne daß Grundsätzliches zu ändern ist, auch hier Berücksichtigung finden. Dies gilt vor allem dann, wenn dieser Vorsatz ohne zusätzliche Schwierigkeiten verwirklicht werden kann.

So gilt es vor allem im Leistungskurs, die Definition des Vektorraumes im Sinne von ZEITLER und anderen zu *verfremden* unter zweierlei Gesichtspunkten; nur so kann der Kollegiat erfahren, daß es sich beim Vektorbegriff um mehr als nur um Verschiebungen im Anschauungsraum handelt (vergl. hierzu auch Beispiel a) in §3):

<u>A. Der Körper K kann endliche Kardinalität haben:</u>

<u>1.7 Definition:</u> Für die ganzen Zahlen z und m bezeichnet man mit $z(m) = z \bmod m := \{ x: x = z + km \text{ für } k \in \mathbb{Z}\}$ die Restklasse von z modulo m.

Hierfür definiert man:

$z_1 \bmod m + z_2 \bmod m := (z_1 + z_2) \bmod m$

$z_1 \bmod m \cdot z_2 \bmod m := z_1 \cdot z_2 \bmod m.$

1.7 lehrt man dem Schüler sicher nicht so abstrakt, sondern man wird etwa für m = 6 für + und · zunächst einmal Verknüpfungstabellen aufstellen lassen und an Beispielen 1.8 studieren:

1.8 Satz: $\mathbb{Z}_m$ = {z(m) mit festem ganzzahligen m und beliebigem ganzzahligen z} ist ein Körper, wenn m eine Primzahl ist.

Die Begründung dafür, daß $\mathbb{Z}_m$ mit einer Nichtprimzahl m kein Körper ist, dürfte für das Gymnasium zu schwer sein. Man kann allerdings sehr leicht am Beispiel m = 6 zeigen, daß $\mathbb{Z}_6$ kein Körper ist, da hier sogenannte Nullteiler existieren:
$3(6) \cdot 4(6) = 12(6) = 0(6)$, obwohl $3(6) \neq 0(6)$ und $4(6) \neq 0(6)$ sind.

Es folgen Rechenbeispiele, wie man sie etwa in [7] Seite 28 findet. Unter Umständen gelingt es auch - z. B. im Rahmen eines Schülerreferates - quadratische Erweiterungskörper von $\mathbb{Z}_m$ zu definieren und Lösbarkeit von Gleichungen untersuchen zu lassen (siehe hierzu DICKSON [4]; allerdings ist diese Literatur für Schüler meist zu schwierig).

Zur Vermeidung von Mißverständnissen sollte das Folgende erarbeitet werden:

1.9 Satz: p sei eine Primzahl: In $\mathbb{Z}_p$ gilt $\underbrace{1(p)+1(p)+\ldots+1(p)}_{p \text{ Summanden}} = 0(p)$

Die kleinste Zahl c eines Körpers K mit $c \cdot 1 = 0$ heißt Körpercharakteristik i. Z. c(K) = char K = c.

Bei einem Körper $\mathbb{Z}_p$ ist also char $\mathbb{Z}_p$ = p.
Hieraus kann man eine Reihe von Folgerungen ziehen:
Es genügt also als $\mathbb{Z}_p$ die Menge $\{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ zu verwenden.
Man beachte: Endliche Charakteristik, d. h. char K $\neq$ 0 hat nicht endliche Kardinalität des Körpers K zur Folge; denn konstruiert man über $\mathbb{Z}_p$ den Körper der gebrochen rationalen Funktionen mit Koeffizienten aus $\mathbb{Z}_p$, so hat auch dieser Oberkörper von $\mathbb{Z}_p$ die Charakteristik p, sicher aber unendlich viele Elemente. Es gilt aber

1.10 Satz: Jeder endliche Körper hat endliche Charakteristik, also $c \neq 0$.

Die Existenz der endlichen Körper wird nochmals im folgenden Satz betont:

1.11 Satz: Es gibt endliche Körper K, d. h. $c(K) < \infty$.
Der Vektorraum V der n-tupel über K = $\mathbb{Z}_p$ ist endlich; d. h. V hat endlich viele Vektoren, d. h. $o(V) = (o(K))^n$.

Der Einbau solcher kombinatorischen Überlegungen erleichtert auch den gymnasialen Einstieg in die Stochastik.

B. Der Vektorraum kann aus unendlich langen Tupeln bestehen:
Geometrische Anwendungen führen allzuleicht zu dem Glauben, daß Vektorräume endlichdimensional sind, sich also stets durch n-tupel mit $n \in \mathbb{N}$ darstellen lassen. Billig kann man zeigen, daß dem nicht so ist:

1.12 Satz: Die Menge der Polynome mit Koeffizienten aus einem Körper K bilden einen Vektorraum über K, der offenbar nicht durch n-tupel darstellbar ist.

In der 10. Jahrgangsstufe wurde das Skalarprodukt zwischen Vektoren eingeführt, was vorläufig im Unterricht von K12 keine Rolle spielt.

Damit ist zunächst die Wiederholung in K12 abgeschlossen.

1.13: Als nächstes werden die Begriffe *linear unabhängig* (Man vermeide bei Vektoren die Sprechweise "nicht kollinear" oder "nicht komplanar", weil diese nur für Punkte sinnvoll ist), *Basis* und *Dimension* durchleuchtet. Es stellt sich heraus, daß die n-tupel-Darstellung eines Vektorraumes nichts anderes als eine abgekürzte Schreibweise einer Basisdarstellung ist. Da hier nach den üblichen Schullehrbüchern unterrichtet werden wird, kann auf eine eigene Darstellung verzichtet werden.

1.14: Das gleiche gilt für das Lösen von homogenen und inhomogenen Gleichungssystemen mit 2, 3 oder eventuell mehr Variablen. Für theoretische Überlegungen sollten Determinanten und CRAMERsche Regel wie in der Schulbuchliteratur behandelt werden; allerdings sollte man mit der CRAMERschen Regel keine Gleichungssysteme lösen, da dies elementar mit den Kenntnissen der 8.Jahrgangsstufe rascher und sicherer geht, wenn nicht die abgekürzte Schreibweise sogenannter elementarer Umformungen benutzt werden kann.

§2 Die affine Ebene.

Die einfachsten Gebilde der Geometrie sind offenbar Punkt P, Gerade g und Ebene ε.

Beziehungen wie $P \in g$ oder $g \ni P$

$P \in \varepsilon$ oder $\varepsilon \ni P$

$g \subseteq \varepsilon$ oder $\varepsilon \supseteq g$

$g_1 \cap g_2 = P$ oder $g_1 \cap g_2 = \emptyset$,

wobei zu unterscheiden ist, ob beide Geraden g_i in einer Ebene, also $g_1 \parallel g_2$ sind, oder in keiner gemeinsamen Ebene sind, also windschief heißen,

$g \cap \varepsilon = P$ oder $g \cap \varepsilon = g$ oder $g \parallel \varepsilon$

$\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 = g$ oder $\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 = \emptyset$ also $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$

heißen *Inzidenzen*.

Im folgenden bezeichnet man stets mit $\mathbb{P}$ die Punktmenge, mit $\mathbb{G}$ die Geradenmenge und mit $\mathbb{I}$ die Inzidenzenmenge. An der Schule ist es sicher nicht wichtig, die Menge der Inzidenzen als Relation $\mathbb{I}$ aus $\mathbb{P} \times \mathbb{G}$ einzuführen.

Stellt man sich auf den Standpunkt von PERRON [9], so ist der Schüler sicher so weit ein "vernünftiger" Mensch, daß ihm bewußt ist, was ein Punkt und damit die Punktmenge $\mathbb{P}$ ist und daß jede Gerade aus Punkten, jede Ebene aus Geraden besteht und so durch vollständige Angabe von $(\mathbb{P}, \mathbb{G}, \mathbb{I})$ jede Geometrie beschrieben werden kann. Gerade bei den endlichen Geometrien sollte man später einmal durch Angabe aller Inzidenzen in einem Computer die Geometrie beschreiben.

Die Schüler werdenallerdings zunächst nicht akzeptieren, daß bei $(\mathbb{P}, \mathbb{G}, \mathbb{I})$ nicht die Rede von der Menge $\mathbb{E}$ der Ebenen ist. In der Tat handelt es sich hierbei um erst einen sehr spät entdeckten Sachverhalt, der letztlich auf dem Axiom A4 von VEBLEN-YOUNG beruht. D.h. sollte es nicht gelingen, die Schülervorstellung dahingehend zu beeinflussen, daß dem Schüler einsichtig wird, jede Ebene hat zwei sich schneidende Geraden und je zwei solche spannen eine Ebene auf, also wird jede Ebene durch Geradeninzidenzen festgelegt, so wird man eine Zeit lang die Ebenenmenge $\mathbb{E}$ benutzen; denn im Unterricht geht es nicht z.B. um die Kürze eines Axiomensystems wie etwa in den Grundlagen, sondern nur um das geometrische Verständnis.

2.1 Definition: Ein Tripel $(\mathbb{P}, \mathbb{G}, \mathbb{I})$ mit der Punktmenge $\mathbb{P}$, der Geradenmenge $\mathbb{G}$ und der Menge $\mathbb{I}$ der Inzidenzen, heißt Inzidenzstruktur.

Bei manchen Autoren (z.B.DEMBOWSKI [3]) heißt $(\mathbb{P}, \mathbb{G}, \mathbb{I})$ nur dann Inzidenzstruktur, wenn auch A1(siehe unten) erfüllt ist.

Ohne Beweis, weil ohnedies einsichtig ist, gibt man an:

2.2 Satz: Ist $\mathbb{G}$ aus der Potenzmenge von $\mathbb{P}$, so beschreiben $\in$ und $\subseteq$ die Inzidenzen $\mathbb{I}$. Für die Inzidenzstruktur schreiben wir dann $(\mathbb{P}, \mathbb{G}, \in)$.

2.1 und 2.2 dienen nur zur Präzisierung des mathematischen Hintergrundes, sie müssen im Unterricht, auch im Leistungskurs, nicht in dieser abstrakten Form auftauchen.

2.3 Definition: Eine Inzidenzstruktur $A_2 := (\mathbb{P}, \mathbb{G}, \in)$ heißt affine Ebene, wenn die folgenden Axiome erfüllt sind:

A1 Zu je zwei Punkten P,Q aus $\mathbb{P}$ gibt es genau ein $g = PQ$ aus $\mathbb{G}$.

A2 Zu jedem $P \in \mathbb{P}$ und jedem $g \in \mathbb{G}$ gibt es genau ein $p \in \mathbb{G}$ mit $P \in p$ und $p \cap g = \begin{cases} \emptyset \text{ oder} \\ g \end{cases}$.

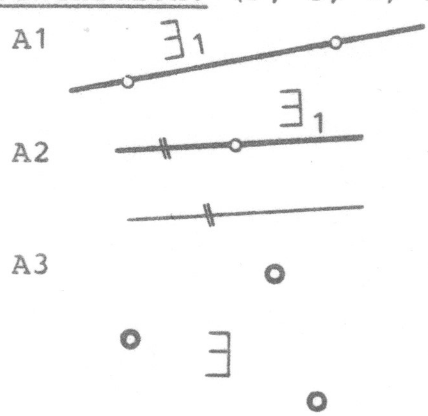
A3 Es gibt in $\mathbb{P}$ drei Punkte, die nicht mit einer einzelnen Geraden inzidieren; d.h. in $\mathbb{P}$ ist ein Dreieck.

2.4 Definition: Zwei Geraden p,g mit $p \cap g = \begin{cases} \emptyset \text{ oder} \\ g \end{cases}$ heißen parallele Geraden, i.Z. $p \parallel g$.

Nicht nur Schülern erscheint 2.4 gekünstelt; doch ist 2.4 wegen 2.6 zweckmäßig.

Es ist sicher wichtig, in den Schülerheften den Text von 2.3 ohne viel Symbolik zu haben; doch ist es für das folgende zweckmäßig, für die Axiome eine Symbolik zu verwenden: Dünn gedruckt sind die gegebenen, fett die durch das Axiom jeweils gefundenen Stücke:

2.3 Definition: $(\mathbb{P}, \mathbb{G}, \in)$ ist eine affine Ebene, wenn gilt:



Auch die folgende Relation könnte man mengentheoretisch exakter bestimmen; doch scheint das folgende zu reichen:

<u>2.5 Definition:</u> $\sim$ heißt auf der Menge M Äquivalenzrelation, wenn die folgenden Axiome für $\sim$ gelten:

E1 $m \sim m$ für alle $m \in M$, genannt Reflexivität.

E2 Aus $m \sim n$ folgt $n \sim m$ für m und n aus M, genannt Symmetrie.

E3 Aus $m \sim n$ und $n \sim p$ für m,n,p aus M folgt $m \sim p$, genannt Transitivität.

Leicht läßt sich die folgende Hausaufgabe zeigen:

<u>2.6 Satz:</u> $=$ und $\parallel$ sind Äquivalenzrelationen. $\leqq$ ist keine Äquivalenzrelation, weil nur E1 und E3, nicht aber E2 erfüllt wird.

Es folgt ein wichtiger, mit 2.4 und A1 leicht beweisbarer Hilfssatz:

<u>2.7 Satz:</u> Zwei nicht parallele Geraden einer affinen Ebene haben genau einen Punkt gemeinsam.

Im Hinblick auf die Verfremdung auf endliche A_2, aber auch im Hinblick auf die Kombinatorik der Stochastik, ist es zweckmäßig, die folgenden Übungsbeispiele einfließen zu lassen:

<u>Aufgabe:</u> a) Hat <u>eine</u> Gerade g der affinen Ebene A_2 o(g) Punkte, wieviele Punkte hat dann jede andere Gerade von A_2?

<u>2.8 Definition:</u> r:=o(g) aus Aufgabe a) heißt die Ordnung der affinen Ebene A_2.

<u>Aufgaben:</u> Gegeben ist eine affine Ebene der Ordnung r.

b) Wieviele von g verschiedene Parallelen gibt es zu einer gegebenen Geraden g?

c) Wieviele verschiedene Geraden gehen durch einen Punkt?

d) Wieviele Punkte hat die affine Ebene der Ordnung r?

e) Wieviele Geraden hat die affine Ebene der Ordnung r?

Man beachte die Reihenfolge der Aufgaben! Beim elementargeometrischen Abzählen findet man:

<u>2.9 Satz:</u> Eine affine Ebene der Ordnung r hat die folgenden kombinatorischen Eigenschaften:

a) Alle Geraden haben r Punkte.

b) In jedem Parallelbüschel liegen r Geraden.

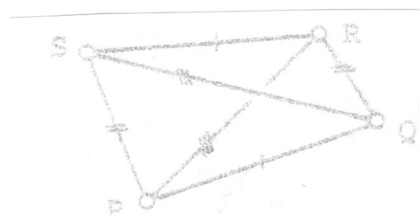
c) Durch jeden Punkt gehen r + 1 Geraden; d.h. in jedem Punktbüschel liegen r + 1 Geraden.

d) Die Ebene hat r^2 verschiedene Punkte.
e) Die Ebene hat $r^2 + r$ verschiedene Geraden.

Offen geblieben ist die Existenz von endlichen affinen Ebenen. Dies wird nun durch Vorgabe des Minimalmodells erledigt:

Da es nach A3 mindestens 3 nicht kollineare Punkte gibt, existiert damit stets eine Gerade mit mindestens 2 Punkten; nach 2.9 hat dann jede Gerade mindestens 2 Punkte und jede affine Ebene mindestens 4 Punkte und 6 Geraden. Man probiert es einmal mit so vielen Punkten und Geraden und findet:

2.10 Satz: $\mathbb{P} = \{P,Q,R,S\}$ mit $\mathbb{G} = \{PQ,PR,PS,QR,QS,RS\}$ und $\in$ ist das affine Minimalmodell.



Bei der leichten Überprüfung der Axiome von 2.2 kommt es sicher nicht darauf an, die logische Gedankenkette bis in die letzte Einzelheit einwandfrei niederzuschreiben; denn dies würde unangemessen viel Zeit in Anspruch nehmen.

Ob man auch den affinen Punktraum axiomatisch einführt, bleibt fraglich, hängt vor allem von der zur Verfügung stehenden Zeit ab.

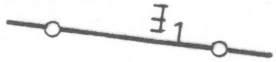
2.11 Definition: Eine Inzidenzstruktur $(\mathbb{P},\mathbb{G},\in)$ heißt affiner Raum A_3, wenn die folgenden Axiome erfüllt sind:

A1 Zu je zwei Punkten P,Q aus $\mathbb{P}$ gibt es genau ein g=PQ aus $\mathbb{G}$.
A4 nach VEBLEN-YOUNG 1916): Haben zwei verschiedene Geraden g und h genau einen Punkt P gemeinsam, sind Q und R mit $Q \neq R$ von P verschiedene Punkte auf g und ist S von P verschieden auf h, so gilt $QS \cap RT = X \in \mathbb{P}$ für alle T auf h mit genau einer Ausnahme. Im Ausnahmefall bzw. im Fall QS = RT heißen QS und RT parallel, i. Z. $QS \parallel RT$. Die Punkte X, die man so durch g und h erreichen kann, bilden eine Ebene $\varepsilon \in \mathbb{P}$.
A2 Zu jedem Punkt $P \in \mathbb{P}$ und jedem $g \in \mathbb{G}$ gibt es genau ein $p \in \mathbb{G}$ mit $P \in p$ und $p \parallel g$ im Sinne von A4.
A3 Es gibt in $\mathbb{P}$ vier Punkte, die nicht auf einer Ebene liegen; d. h. es gibt in $\mathbb{P}$ ein Tetraeder.

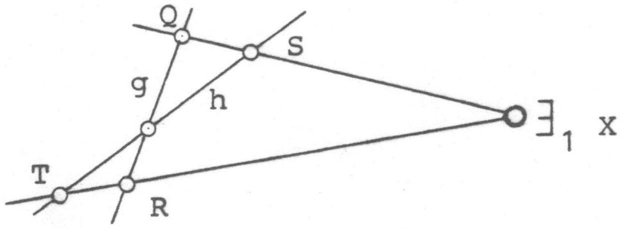
Auch diese Definition läßt sich symbolisch einfach festhalten: Die gegebenen Stücke sind wieder dünn, die Aussagen der Axiome fett gedruckt.

2.11 Definition: $(\mathbb{P}, \mathbb{G}, \in)$ heißt affiner Raum A_3, wenn gilt:

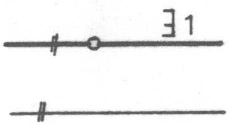
A1



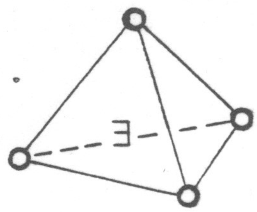
A4



A2



A3



Sehr schnell folgt aus A1 und A4:

2.12 Satz: Durch drei verschiedene, nicht kollineare Punkte aus $\mathbb{P}$ geht genau eine Ebene.

§3 Vektorraummodelle von affinen Räumen A_n.

Man kann nach HALL [5] in jeder affinen Ebene mit einem sogenannten Ternärkörper K Koordinaten einführen, so daß die Ebene algebraisch beschreibbar wird. Bekanntlich kann man erst durch Hinzunahme weiterer Axiome der Ebene zeigen, daß K ein Körper oder gar ein kommutativer Körper ist. So ein Vorgehen würde sicher über das am Gymnasium Sinnvolle hinausführen. Doch sollte man im Unterricht stets betonen, daß das folgende Modell eine affine Ebene ist, daß aber nicht jede affine Ebene so dargestellt werden kann, daß aber das folgende Modell, falls es drei- oder höher-dimensional ist, alle affinen Räume beschreibt (siehe z.B. DEMBOWSKI [3] Seite 124 und folgende).

3.1 Definition: Gegeben ist ein n-dimensionaler Vektorraum V über einem unter Umständen endlichen Körper K (also z.B. ist V die Menge der n-tupel über K). Wir konstruieren eine Inzidenzstruktur $(\mathbb{P}, \mathbb{G}, \in)$ wie folgt:

$\mathbb{P} := V$.

$\mathbb{G} \ni g := \{\mathfrak{x} : \mathfrak{x} = \mathfrak{a} + t \cdot \mathfrak{b},\ t \in K\}$ für jedes $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ aus V mit $\mathfrak{b} \neq 0$.

Die Inzidenzen sind geklärt, weil die Geraden als Punktmengen definiert sind.

<u>3.2 Satz:</u> Im Fall $n = 2$ ist $(\mathbb{P}, \mathbb{G}, \in)$ aus 3.1 eine affine Ebene.
Im Fall $n = 3$ ist $(\mathbb{P}, \mathbb{G}, \in)$ aus 3.1 ein affiner Raum.

Der Beweis sollte für $n = 2$ durchgeführt werden und verursacht keine Schwierigkeiten. Für $n = 3$ ist es für die Schule zweckmäßig, die Ebenen als eigene Gattung einzuführen:

$\mathbb{E} \ni \varepsilon := \{ \mathfrak{e} : \mathfrak{e} = \mathfrak{a} + s \cdot \mathfrak{b} + t \cdot \mathfrak{c}$ mit s, t aus $K \}$ für jedes Tripel $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}) \in V^3$ mit $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ linear unabhängig.

Der Beweis von A4 bleibt schwer, ist wohl auch für das Verständnis nicht unbedingt erforderlich.

Als Hausaufgabe wird jetzt über einem endlichen Vektorraum der Abzählbeweis von 2.9 durchgeführt. Da nach 1.13 nach Wahl einer Basis in V jeder Vektor als n-tupel dargestellt werden kann, gilt dies jetzt auch für das Modell:

<u>3.3 Satz:</u> Im Vektorraummodell eines affinen Raumes ist jeder Punkt nach Wahl einer Basis (Koordinatensystem) im Vektorraum als n-tupel darstellbar.

Der Vorteil der beschriebenen Methode ist nun, daß es nur eine Sorte von Vektoren gibt, nämlich solche, die seit ARTIN und NOETHER in der Mathematik benutzt werden.

Will man deutlich zwischen den Darstellungselementen, den Vektoren aus V, und den dargestellten Punkten aus $\mathbb{P}$ unterscheiden, empfiehlt sich die folgende Vereinbarung:

<u>3.4 Vereinbarung:</u> Wird der affine Raum A_n durch den n-dimensionalen Vektorraum V über K dargestellt, so ordnen wir dem Punkt P den Vektor $\vec{P}$ zu.

Es folgt eine Reihe von Ergebnissen, die zum Teil Nebenprodukte des Beweises von 3.2 sind, die in ihrer adäquaten Unterrichtsformulierung als Satz, wohl öfter als Aufgabenstellung vorkommen werden, die gelegentlich auch als Zahlenbeispiel berechnet werden:

<u>3.4 Satz:</u> Die Verbindungsgerade g der verschiedenen Punkte A, B lautet $g = \{\vec{X} : \vec{X} = \vec{A} + t \cdot (\vec{B} - \vec{A}),\ t \in K\}$.

Ist $\dim V = 2$, so wird g nach Einführung eines Koordinatensystems durch zwei Gleichungen in den Variablen x_1, x_2 und t beschrieben. Man untersucht die verschiedenen Darstellungsformen der Geraden (sogenannte "Einpunktegleichung","Zweipunktegleichung" und Gleichung in der Form $A_1x_1 + A_2x_2 + A_3 = 0$), die man mit der Theorie der linearen Gleichungssysteme ineinander überführt (vergl. 1.14) und findet auch für $\dim V = 3$:

<u>3.5 Satz:</u> Die Geraden $g = \{\mathfrak{e} : \mathfrak{e} = \mathfrak{a} + t \cdot \mathfrak{b},\ t \in K\}$ und
$h = \{\mathfrak{e} : \mathfrak{e} = \mathfrak{c} + s \cdot \mathfrak{d},\ s \in K\}$

a) sind genau dann (gleich oder) parallel, wenn $\mathfrak{b}, \mathfrak{d}$ linear abhängig sind.

b) Sind $\mathfrak{b}, \mathfrak{d}$ linear unabhängig, dann schneiden sich g und h genau dann, wenn $\det(\mathfrak{a}-\mathfrak{c}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}) = 0$ ist.

c) Sonst sind g und h windschief.

3.6 Satz: Durch drei nicht kollineare Punkte A, B, C geht genau die Ebene $\varepsilon = \{ \vec{X}: \vec{X} = \vec{A} + s\cdot(\vec{B} - \vec{A}) + t\cdot(\vec{C} - \vec{A}),\ s,t \text{ aus } K \}$.

Man diskutiere die Eindeutigkeit, insbesondere im Zusammenhang mit der notwendigen Bedingung der Nichtkollinearität.

Es folgt die parameterfreie Darstellung der Ebenen bzw. die Determinantendarstellung.

Da es nicht in der Absicht der vorliegenden Abhandlung sein kann, ein Lehrbuch zu ersetzen, sei hier nur noch exemplarisch auf zwei Standardbeispiele aufmerksam gemacht:

Beispiel a) Wählt man als drei Ecken eines Parallelogramms O, A und B mit unabhängigen $\vec{A}$ und $\vec{B}$ (warum?), so wird die 4.Ecke durch $\vec{A} + \vec{B}$ dargestellt.
Die beiden Diagonalen lauten dann:

$$g = \{ \vec{X}: \vec{X} = \vec{A} + t\cdot(\vec{B} - \vec{A}),\ t \in K \} \text{ bzw.}$$
$$h = \{ \vec{X}: \vec{X} = s\cdot(\vec{B} + \vec{A}),\ s \in K \}.$$

Abgesehen vom Fall char K = 2 (vergl. 1.9), sind $\vec{B} - \vec{A}$ und $\vec{B} + \vec{A}$ linear unabhängig, also schneiden sich g und h im Punkt mit

$$\vec{X} = \vec{A} + t(\vec{B} - \vec{A}) = s(\vec{B} + \vec{A}) \quad \text{oder wenn}$$
$$\vec{A}(1 - t - s) = \vec{B}(s - t) \quad \text{ist.}$$

Weil $\vec{B} - \vec{A}$ und $\vec{B} + \vec{A}$ linear unabhängig sind, folgt $1 - t - s = 0$ und $s - t = 0$.
Hieraus folgt $t = s = \frac{1}{2}$. Der Schnittpunkt hat also die Koordinaten $\frac{1}{2}(B + A)$.
Sprechweisen wie "die Diagonalen halbieren sich also", sind mit Vorsicht anzuwenden, da eine Halbierung die Existenz einer Strecke unter Umständen sogar die Existenz eines Maßes voraussetzt, was durchaus z.B. bei endlichen Körpern nicht möglich ist. Auch nach Einführung eines Skalarprodukts zwischen Vektoren bleibt die Sprechweise problematisch, wenn das Skalarprodukt nicht positiv definit ist.

Nach Ansicht vieler Mathematiker sollte man Beispiel a) im Unterricht nicht überstrapazieren, da jeder vernünftige Mensch im Anschaungsraum so sicher nicht vorgehen wird.

Beispiel b) Gesucht wird der Schnitt der Geraden

$$g = \{ \mathfrak{x}: \mathfrak{x} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + t\cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{vmatrix},\ t \in K \} \qquad (1)$$

mit der Ebene ε, die durch $7x_1 - 8x_2 + 3x_3 - 6 = 0$ (2)
dargestellt wird.

In der vektoriellen Darstellung von g, also bei drei Gleichungen in den Unbekannten x_1, x_2, x_3 und t kann t eliminiert werden, was bedeutet, daß g als Schnitt zweier Ebenen dargestellt wird. Schließlich kann man aus insgesamt drei Ebenengleichungen der Bauart (2) den Schnittpunkt berechnen, falls dieser existiert.

Ein anderer Weg verwandelt (2) zunächst in Vektorform: Leicht überprüft man, daß für $x_1 = x_2 = 0$ folgt $x_3 = 2$

$x_1 = x_3 = 0$ folgt $x_2 = -\frac{3}{4}$

$x_2 = x_3 = 0$ folgt $x_1 = \frac{6}{7}$.

Also liegen die Punkte mit den Vektoren $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -3/4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 6/7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

auf $\varepsilon = \left\{ \overline{X}\colon \overline{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3/4 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6/7 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad s \in K, r \in K \right\}$.

Für den Schnittpunkt muß gelten:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3/4 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6/7 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{oder}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3/4 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6/7 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Weil die Determinante $\begin{vmatrix} 0 & 6/7 & 0 \\ -3/4 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -\frac{18}{7} \neq 0$ ist, ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar. Aus der 1.Zeile folgt s = 7/6, aus der 2.Zeile r = 0. Schließlich liefert die 3.Zeile t = 1/12.

Den Schnittpunkt findet man aus (1): $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1/3 \end{pmatrix}$.

§4 Abschließende Gedanken.

4.1: Die Beispiele am Ende von §3 zeigen, daß auch mit der vorliegenden Methode die übliche Schulbuchliteratur im Aufgabenbereich verwendet werden kann.

4.2: §1 wie auch §3 entsprechen dem üblichen Vorgehen in der Kollegstufe, nur daß in §3 aus didaktisch nicht länger haltbaren Gründen auf die bisherigen Unterscheidungen beim Vektorbegriff verzichtet wird, weil es solche in der Mathematik nicht gibt. Erzählt man anschließend an 3.6 den Schülern von der historischen Unterscheidung von Ortsvektoren und freien Vektoren, kann man so sogar den Aufgabenteil aller Schulbücher ohne Abänderungen benutzen.

4.3: Die vorliegende Abhandlung zeigt das Vorgehen in den Monaten September bis Dezember in einem Leistungskurs; doch kann man im Prinzip auch in einem Grundkurs so verfahren, wenn man §2 ausläßt.

Man muß eben dann mit 3.1 den affinen Raum definieren, 3.2 entfällt.

4.4: Die hier vorgestellte Methode ist mit CULP [2] konform bis auf Seite 494 Nr.11 bzw. Seite 521 Nr.8, was geringfügig zu ändern wäre. Im CULP wird verlangt, daß der Schüler die Fähigkeit haben soll, zwischen Vektoren und affinen Punkten zu unterscheiden; dies dürfte mit der vorgestellten Methode leicht erreichbar sein: Der Punkt ist das geometrische Gebilde, der Vektor das algebraische Hilfsmittel, den Punkt rechnerisch zu erfassen.

Literatur:

[1] ARTIN, E.: Geometric Algebra, Interscience Publishers, Inc., New York 1957

[2] CULP: Curricularer Lehrplan für Leistungs- und Grundkurs Mathematik in der Kollegstufe, Amtsblatt des Bayerischen Staatsministeriums für Unterricht und Kultus, Teil I, Sondernummer 18, 23.6.1980

[3] DEMBOWSKI, P.: Finite Geometries, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 44, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1968

[4] DICKSON, L.E.: Linear Groups with an exposition of the GALOIS field theory , with an introduction by WILHELM MAGNUS, Reprint by Dover Publications, Inc., New York 1958.

[5] HALL, M.: The Theory of Groups, Macmillan, New York 1959

[6] HONSBERG, H.: Vektorielle analytische Geometrie, Bayerischer Schulbuch-Verlag München 1975

[7] JEHLE,SPREMANN,ZEITLER: Lineare Geometrie, Leistungskurs, Bayerischer Schulbuch-Verlag München 1978

[8] LINGENBERG, R.: Grundlagen der Geometrie, Hochschultaschenbücher Bibliographisches Institut Mannheim Wien Zürich 1969 Band 158/158a

[9] PERRON, O.: Nichteuklidische Elementargeometrie der Ebene, Teubner Stuttgart 1962

[10] SCHRÖDER-UCHTMANN: Einführung in die Mathematik, Analytische Geometrie, Diesterweg Frankfurt/Main, Berlin München 1974

[11] LENZ, H.: Grundlagen der Elementarmathematik, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin 1961

[12] V.D.WAERDEN, B.L.: Algebra I und II, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen Bd.33 Springer-Verlag Berlin Göttingen Heidelberg 1955

[13] PICKERT, G.: Projektive Ebenen, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen Bd. 80 Springer-Verlag Berlin Göttingen Heidelberg 1955 und 1975.