Arthur Krämer, Richard Mertenbacher, Karlhorst Meyer

Polyeder im Unterseminar

Es gibt im Mathematikseminar des Gymnasiums Starnberg für die Klasssen 6 mit 8 ein Unterseminar, um die an Mathematik interessierten Schülerinnen und Schüler rechtzeitig zu fördern und so Nachwuchs für das „Oberseminar“ zu haben. Die Schülerinnen und Schüler nehmen auch jeweils an den ersten Runden der Mathematik-Olympiade teil.

In diesem Jahr war eine Besonderheit dahingehend, dass in der Gruppe nur 4 Schülerinnen und 2 Schüler der Jahrgangsstufe 6 und zwei Schülerinnen aus der Jahrgangsstufe 7 waren. Das Folgende ist also unter dem Gesichtspunkt zu sehen, dass kaum einer der Gruppe Kenntnisse aus dem Unterricht sondern nur Freude an der Mathematik mitbrachte. Als zusätzliche Schwierigkeit muss die Erkrankung des Leiters gesehen werden, so dass mehr oder weniger ad hoc Kollegen zum Teil anhand von Aufzeichnungen und Gesprächen mit dem Leiter dankenswerterweise einspringen konnten.

1. Zeichnen regulärer Vielecke

1.1 Genaues Zeichnen und Konstruieren

Es geht hier um die Bereitstellung wichtiger Begriffe und Fertigkeiten wie dies in jedem Geometriebuch am Anfang zu finden ist. Außerdem wird genaues und vorteilhaftes Zeichnen geübt.

Es werden die Begriffe Punkt, Strecke (*gerade*) und ihre Länge, Kurve (*gekrümmt*), Schnittpunkt, schneidend und nicht schneidend, parallel erklärt und die hierzu gehörigen zeichnerischen wie schriftlichen Kennzeichen eingeführt. Insbesondere wird bei der Strecke die unterschiedliche Kennzeichnung in Bayern ([AB] und $\overline{AB}$) und nach DIN ($\overline{AB}$ und $\left|\overline{AB}\right|$) besprochen.

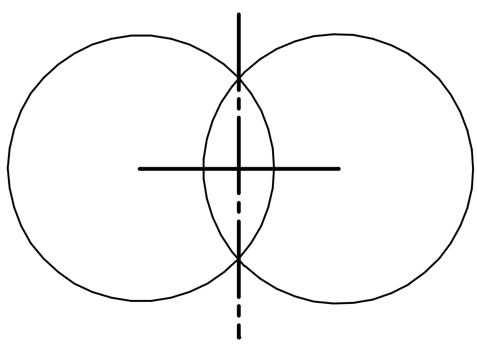
Begriffe wie Scheitel, Winkelfeld, Schenkel werden an unterschiedlichen Winkeln (wie spitz, rechter usw.) behandelt. Es wird das Gradmaß mit seinen Unterteilungen für die Winkelmessung genutzt. Es werden Winkel gemessen und abgetragen.

Es werden wie üblich Kreise eingeführt und über Radius, Durchmesser, Peripherie, Mittelpunkt, innen, außen, Rand u. v .m. gesprochen.

Schließlich folgen die Grundkonstruktionen:

1. Abtragen einer Strecke und Antragen eines Winkels jeweils mit dem Zirkel.

2. Aus Symmetrie (Falten eines Blattes längs der Symmetrieachse) entsteht die nebenstehende sogenannte **Zweikreisefigur**. Aus ihr folgen die weiteren Grundkonstruktionen:
- Strecken halbieren,
- Senkrechte errichten und fällen,
- Winkel halbieren.



3. Genaues Zeichnen von Kreisen (zuerst den Mittelpunkt kennzeichnen und dann...).

Weitere Inhalte werden anhand der folgenden Aufgaben gefunden:

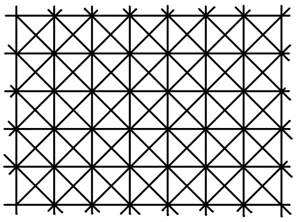
Insgesamt werden für diesen Abschnitt ca. 4 Stunden benötigt.
Aufgaben:
A1 Zeichne eine Gerade g und markiere auf ihr einen Punkt P und außerhalb einen Punkt Q.

a) Errichte in P zu g die Senkrechte.
b) Fälle von Q auf g das Lot.
Was fällt auf?

A2 a) Zeichne ein beliebiges, großes Dreieck. Miss die drei Innenwinkel und berechne daraus die Innenwinkelsumme.
b) Zeichne eine Halbgerade. Trage an diese im Anfangspunkt gegen/im Uhrzeigersinn einen Winkel von 63^{o} an. Miss dann die Summe der beiden Winkel.

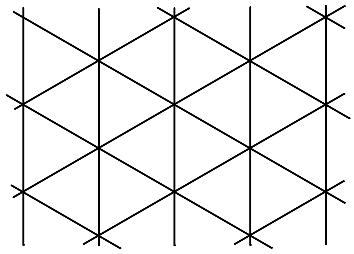
A3 Zeichne einen Winkel von 64^{o} und halbiere ihn dann allein mit Zirkel und Lineal. Miss den halben Winkel nach.

A4 Zeichenübungen: Fülle ein ganzes DIN-A4-Blatt:

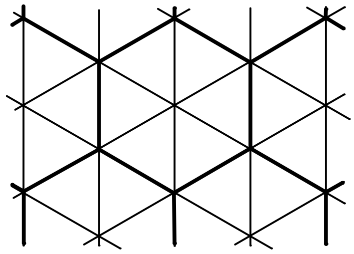


a)

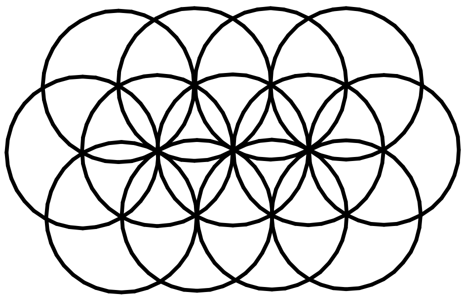
b)



c)



Beispiel:
Will man ein Muster anlegen, so addieren sich die Zeichenungenauigkeiten bei jedem Schritt. Deshalb kann man ein Muster nicht irgendwie anlegen, sondern man muss sich von vornherein eine Strategie überlegen. Dem Anfänger ist dies neu. Deshalb lässt man ihn zunächst gewähren und bemängelt nur, wenn z. B. in dem nebenstehenden Muster die Abweichungen so groß werden, dass sich Kreise nicht mehr berühren oder nicht mehr durch die Schnittpunkte gehen. Mit den Schülerinnen und Schülern werden dann Methoden diskutiert, um solche Ungenauigkeiten zu vermeiden (*Schüleransicht*) oder *auszugleichen.*



1.2 Ebene n-Ecke

1.2.1 Dreiecke:

Ein von drei Geraden begrenzter Teil der Ebene heißt Dreiseit, eine Figur mit drei Ecken Dreieck. Offenbar führt jedes Dreiseit zu einem Dreieck und umgekehrt.

Je nach Größe der Schnittwinkel bzw. der Seiten unterscheidet man die folgenden Dreiecke:
- spitzwinklige Dreiecke (alle Innenwinkel sind kleiner als 90^{o}),
- rechtwinklige Dreiecke (ein Innenwinkel ist 90^{o}),
- stumpfwinklige Dreiecke (ein Innenwinkel ist größer als 90^{o}),
- gleichschenklige Dreiecke (zwei Seiten sind gleich groß),
- gleichseitige Dreiecke (alle Seiten sind gleich groß).

Durch Ausmessen findet man die Vermutung, dass die Innenwinkelsumme immer 180^{o} beträgt, und dass der größeren Seite der größere Winkel gegenüber liegt.

Folgerungen:
- Ein gleichschenkliges Dreieck hat zwei gleich große Winkel.
- Ein gleichseitiges Dreieck hat drei gleiche Winkel; jeder ist 60^{o} groß.

Es werden die üblichen Bezeichnungen für die Ecken (große Buchstaben gegen den Uhrzeigersinn nummeriert), Seiten (kleine Buchstaben passend zur gegenüberliegenden Seite), Höhen, Mittelsenkrechten, Seitenhalbierenden und Winkelhalbierenden eingeführt.
Es werden für diesen Abschnitt ca. 3 Unterrichtsstunden benötigt.

Aufgaben:
A5 Wie viel rechte bzw. stumpfe bzw. spitze Winkel kann ein beliebiges Dreieck haben?

A6 Durch Kombination von Winkel- und Seiteneigenschaften kann man noch weitere Dreieckstypen charakterisieren. Gib noch mindestens zwei an.

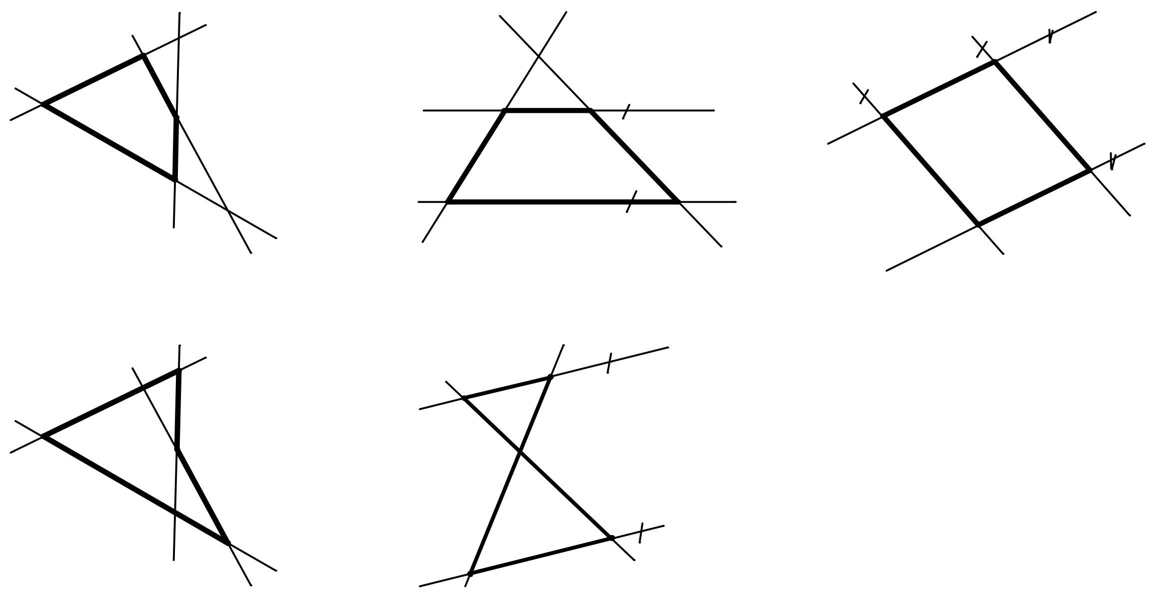
A7 Konstruiere ein Dreieck
a) mit den Seiten a = 7,0 cm, b = 8,0 cm, c = 10,0 cm;
b) aus b = 5,0 cm, $\gamma = 73^o$, a = 7,0 cm

A8 Zeichne ein großes spitzwinkliges Dreieck. Konstruiere dann alle Mittelsenkrechten und Seitenhalbierenden. Was fällt auf?

1.2.2 Vierecke:
Ein von vier Geraden begrenzter Teil der Ebene heißt Viereck (eigentlich handelt es sich hierbei um ein Vierseit).

Vier verschiedene Geraden können sich in höchstens sechs Punkten schneiden; damit ein Viereck entsteht, müssen es mindestens vier sein:

Beispiele für vier Geraden mit
6 Schnittpunkten 5 Schnittpunkten 4 Schnittpunkten



Je nach Größe der Schnittwinkel und der gebildeten Seiten erhält man eine Vielzahl von Viereckstypen.
Durch Ausmessen der Innenwinkelsumme erhält man die Vermutung:
- Die Innenwinkelsumme beträgt stets 360^o. Einige Schüler finden auch einen Weg, diesen Satz mit der Innenwinkelsumme im Dreieck zu begründen.
Es werden die Normbezeichnungen für die Ecken, Seiten und Diagonalen eines Vierecks eingeführt.

Es werden für diesen Abschnitt ca. 3 Unterrichtsstunden benötigt.

Aufgaben:
A9 Beschreibe, worin sich die beiden Viereckstypen im Fall von 6 Schnittpunkten unterscheiden.

A10 Konstruiere ein Viereck ABCD aus a = 5 cm, b = 3 cm, d = 7 cm, e = 6,5 cm, $\alpha = 55^o$.

1.2.3 n-Ecke (Vielecke):
Ein von n verschiedenen Geraden g_1, g_2, g_3,....,g_n begrenzter Teil der Ebene heißt n-Eck. Es werden die üblichen Bezeichnungen eingeführt.

A11 Konstruiere ein Fünfeck ABCDE aus a = 6,0 cm, b = 5,0 cm, c = 5,5 cm, $\alpha = 85^o$, $\beta = 105^o$, $\gamma = 90^o$, $\delta = 115^o$.

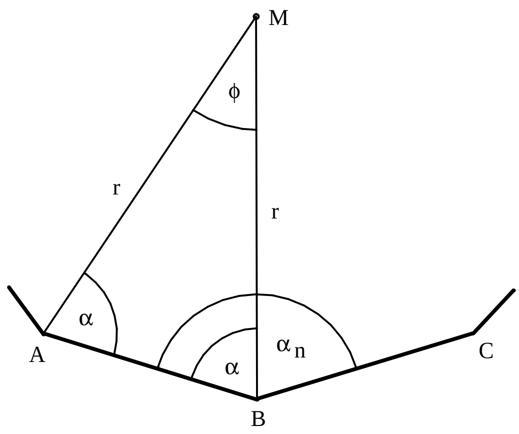
A12 Zeichne in ein beliebiges Fünfeck alle Diagonalen ein. Wie viele sind es?

A13 Wie viele Diagonalen hat ein n-Eck? Finde eine Formel in Abhängigkeit von n.

A14 Zeige, dass ein n-Eck durch die Diagonalen von einer Ecke aus in n-2 Dreiecke zerlegt wird.

A15 a) Zeige: Die Summe der Innenwinkel eines n-Ecks beträgt $(n - 2)180^o$.
b) Wie groß ist ein Innenwinkel im n-Eck, falls alle Innenwinkel gleich groß sind?

1.2.4 Reguläre n-Ecke
Eine besondere Rolle spielen diejenigen Vielecke, deren Seiten alle gleich lang sind und die einen Umkreis haben, d. h. deren Ecken auf einem Kreis liegen.



Je zwei benachbarte Ecken des n-Ecks bilden zusammen mit zwei Umkreisradien immer dasselbe Dreieck, was experimentell festgestellt wurde; d. h. man hat n solche Dreiecke aneinander gereiht und ein reguläres n-Eck erhalten. Alle diese Dreiecke sind gleichschenklig. Sie haben (vgl. die Zeichnung) alle den Zentrumswinkel $\varphi = 360^o : n$,

die Basiswinkel $\alpha = \dfrac{(n-2)\cdot 180^o}{n}$.

Damit errechnet sich der Innenwinkel des n-Ecks:
$\alpha_n = 2\alpha$

a) Reguläres Dreieck oder gleichseitiges Dreieck:
Eigenschaften:
- Die drei Innenwinkel sind gleich groß.
- Der Umkreismittelpunkt ist Schnittpunkt der Mittelsenkrechten, die mit der entsprechenden Höhe, Seitenhalbierenden und Winkelhalbierenden zum Gegenwinkel zusammenfallen, wie experimentell festgestellt wurde.

b) Reguläres Viereck oder Quadrat:
Eigenschaften:
- Die vier Innenwinkel sind gleich groß und jeder hat 90^o.
- Der Umkreismittelpunkt ist Schnittpunkt der Diagonalen.

c) Reguläres Fünfeck:
Eigenschaften
- Alle Innenwinkel sind gleich groß und berechnen sich zu 108^o.

d) Reguläres Sechseck:
Eigenschaften:
- Alle Innenwinkel sind gleich groß und berechnen sich zu 120^o.
Man spielte an allen vorgefertigten Vielecken mit dem Zirkel und fand die folgende Vermutung:

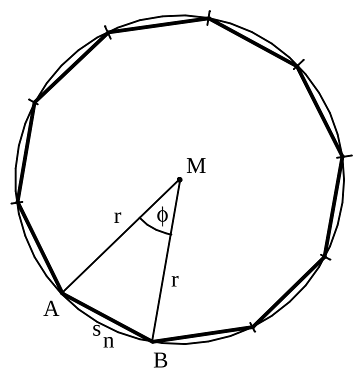
- Jedes reguläre n-Eck hat auch einen sogenannten Inkreis, dessen Mittelpunkt mit dem des Umkreises zusammenfällt. Der Inkreis berührt alle n-Eckseiten.

Hierfür werden ca. 3 Unterrichtsstunden benötigt.

1.3 Konstruktionen

Es wurde kurz über die folgenden Bezeichnungen gesprochen:
- **Skizzieren** bedeutet, eine Figur freihand zu zeichnen und möglichst viel Wissen hierzu zu verwenden.
- Von **Zeichnen** sprechen wir, wenn wir uns bemühen, mit dem Zeichengerät eine möglichst genaue Zeichnung zu fertigen.
- Von **Konstruieren** redet man in der Mathematik, wenn unter alleiniger Benutzung von Zirkel und Lineal die Ergebnisse gefunden werden. In aller Regel gestattet man aber die Benutzung eines rechten Winkels und das Verschieben von Parallelen mit Hilfe zweier Geräte.

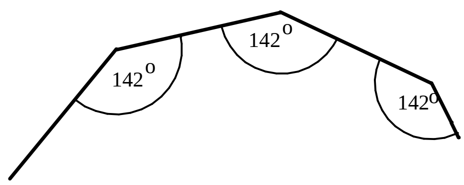
1.3.1 Konstruiere ein n-Eck, dessen Seitenlänge und dessen Umkreisradius nicht vorgegeben sind:
Verfahren:



1. Berechne $\varphi = 360^o : n$.
2. Beschreibe um einen beliebigen Punkt M einen Kreis mit einem beliebigen Radius r.
3. Trage an einen beliebigen Radius AM den Winkel φ an und erhalte das Dreieck AMB.
4. Trage die gefundene n-Eckseite [AB] (n - 2)-mal auf dem Kreisbogen ab.
5. Zeichne das n-Eck.

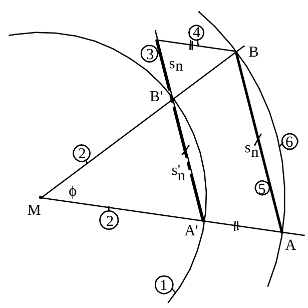
Bemerkungen:
- Verbindet man in einem regulären 2n-Eck Eckpunkte so, dass jeweils ein dazwischen liegender ausgelassen wird, so erhält man ein reguläres n-Eck;
z. B.: Aus einem regulären 6-Eck wird so ein reguläres 3-Eck.
- Halbiert man den Mittelpunktswinkel φ eines regulären n-Ecks, so erhält man auf dem Umkreis n weitere Punkte; diese bilden mit den ursprünglich vorhandenen n Punkten ein 2n-Eck; z. B. so entsteht aus einem regulären 3-Eck ein reguläres 6-Eck.

1.3.2 Konstruktion eines regulären n-Ecks mit vorgegebener Seitenlänge:
1. Verfahren (Software z. B. arbeitet häufig so):



1. Man trägt die gegebene Seitenlänge an.
2. Im Endpunkt der Seitenlänge fügt man den berechneten Winkel α_n an.
3. An den freien Schenkel gibt man erneut die gegebene Seitenlänge; usw.
Dieses „Primitivverfahren“ ist nicht besonders genau (weshalb?).

2. Verfahren:



1. Man zeichnet irgendeinen Kreis .
2. Man teilt den Vollwinkel des Kreises in die gewünschte Teileanzahl auf.
3. Man bringt die so erhaltene Seitenlänge s_n’ auf die gewünschte Länge s_n durch „Vergrößern“ oder „Verkleinern“ (vgl. die Abbildung).
4. Mit der Vergrößerung der Seitenlänge „bläst“ man auch den Umkreis auf.
5. Man setzt die Konstruktion wie in 1.3.1 fort.

Für die Vieleckkonstruktionen werden ca. 4 Unterrichtsstunden vorgesehen.

Aufgaben:

A16 Konstruiere ein reguläres Dreieck mit der Seitenlänge 5 cm. Beschreibe mehrere Verfahren.

A17 Konstruiere ein reguläres Viereck mit Inkreisradius 4 cm.

A18 Konstruiere auf zwei Arten ein reguläres Sechseck mit Umkreisradius 3,5 cm. Erläutere, wie man damit jeweils ein beliebiges 12-Eck erhält; führe die Konstruktion einmal aus.

A19 Konstruiere (*mit dem bisherigen Wissen!*) ein reguläres Fünfeck mit
a) der Seitenlänge $s_5 = 3$ cm;
b) der Diagonalenlänge d = 7 cm.

A20 Konstruiere aus einem Quadrat mit Seitenlänge 5 cm durch „Eckenabschneiden" ein reguläres Achteck.

A21 Betrachte einen Durchmesser eines Kreises mit einbeschriebenem regulären n-Eck, der durch einen Eckpunkt verläuft. Welche weitere Eigenschaft hat dieser Durchmesser? Formuliere ein weiteres Problem, das hiermit zu tun hat.

2. Grundlagen

Will man „exakte" Geometrie machen, kommt man nicht umhin, gelegentlich etwas auszurechnen, wozu man gewisse Grundlagen benötigt, die im Allgemeinen ein Schüler der Jahrgangsstufe 6 nicht haben kann. Handelt es sich hierbei um begabte und an Mathematik interessierte Schülerinnen und Schüler, so kann man ohne große Probleme Stoff von Folgeklassen vorziehen, ja viel kompakter unterrichten als gewöhnlich.

2.1 Binome

Es wird im Folgenden nur der Weg für den Lehrer gezeigt, ohne den Stoff schüleradäquat auszuarbeiten. Es werden Hinweise gegeben, die sich auf jedes der gängigen Algebrabücher der Klasse 7 beziehen:

Das Distributivgesetz ist aus der Klasse 5 bereits bekannt, ebenso die Potenzschreibweise. Man lässt einzelne Schülerinnen und Schüler verschiedene Binome ausmultiplizieren, vergleicht die Ergebnisse, fasst zusammen und findet die Formeln, die man „Binome" nennt. Das Anwenden der Formeln macht dieser Gruppe bei weitem nicht die Schwierigkeiten, die man aus den Klassen gewohnt ist.

Der umgekehrte Weg, das Wiedererkennen einer Summe als Binom ist schon weitaus schwieriger. Hier muss man einige Beispiele üben. Die Eigenarten der Schülergruppe bewirken, dass nach kürzester Zeit das Gewünschte erkannt wird. Man wird also nicht allzu viele Aufgaben rechnen; doch zeigt sich später, dass auch diese Gruppe durchaus aufs Wiederholen solcher Rechnungen angewiesen ist. Man wird also für dieses Lehrziel bestenfalls 1 Unterrichtsstunde ansetzen, aber in den Folgestunden immer wieder solche Beispiele einbauen, bis sie ins Langzeitgedächtnis aufgenommen sind.

2.2 Gleichungen

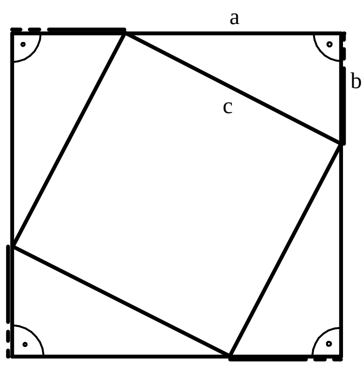
Da die meisten Schülerinnen und Schüler der Jahrgangsstufe 6 angehörten, wurden Gleichungen zunächst mit sogenannten Umstellungen gelöst, die in Analogie zu Beispielen mit kleinen Zahlen gefunden wurden (vgl. Meyer u.a. [1], Band 5). Diese Kenntnisse reichten aber für das Folgende nicht aus. Ohne auf den Begriff der Äquivalenzumformung einzugehen, wurde anhand einer Waage die entsprechenden „Regeln" hergeleitet:

Addiert, subtrahiert, multipliziert oder (falls die Division sinnvoll ist) dividiert man auf beiden Seiten einer Gleichung Gleiches, so bleibt die Gleichheit erhalten.

Die Übungsbeispiele entsprachen denen, die man in jedem Buch der Jahrgangsstufe 7 findet. Es wurden auch Beispiele im Zusammenhang mit dem Goldenen Schnitt (vgl. das Folgende) geübt. Insgesamt benötigte dieses vorbereitende Kapitel 3 Unterrichtsstunden.

2.3 Pythagorassatz

Die meisten der Teilnehmer hatten schon einmal etwas über diesen Satz gehört, ja sie kannten zum Teil auch den Wortlaut des Satzes. Der Satz wurde zunächst als Flächensatz anhand der nebenstehenden Figur bewiesen, wobei natürlich aus den gegebenen Stücken (vgl. die Zeichnung) das innere Viereck als Quadrat abgeleitet wurde. Der Beweis gab auch die Möglichkeit, die unter 2.1 kennen gelernten Binome anzuwenden.



Sehr sorgfältig wurde dann die gefundene Flächenaussage in eine Aussage über die Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks umformuliert. Hierbei konnte auch auf die historische Bedeutung des Satzes eingegangen werden. Man fand heraus, dass damit allgemein Entfernungen zwischen Punkten berechnet werden können.

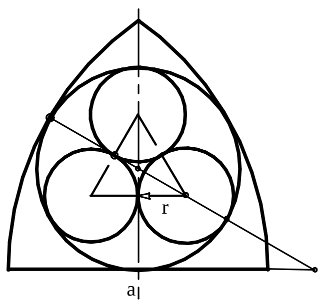
Aus Vollständigkeitsgründen wurde auch die Umkehrung des Satzes diskutiert.

An Anwendungen wurden die folgenden Problemfelder gebracht:

- Berechnungen an rechtwinkligen Dreiecken, auch Hilfsdreiecken, soweit diese im Bereich pythagoreischer Zahlentripel bleiben. Bei Gepráchen stellte sich aber dann heraus, dass den Schülern sehr wohl die $\sqrt{}$ -Taste ihres Taschenrechners vertraut war und sie damit auch andere Aufgaben ausrechnen konnten. Hierbei gab es auch technische Anwendungen.

- Überprüfung pythagoreischer Zahlentripel

- Berechnungen an gotischen Fensterbögen (vgl. die nebenstehende Abbildung: Es wird r aus a berechnet).



- Technische Anwendungsaufgaben

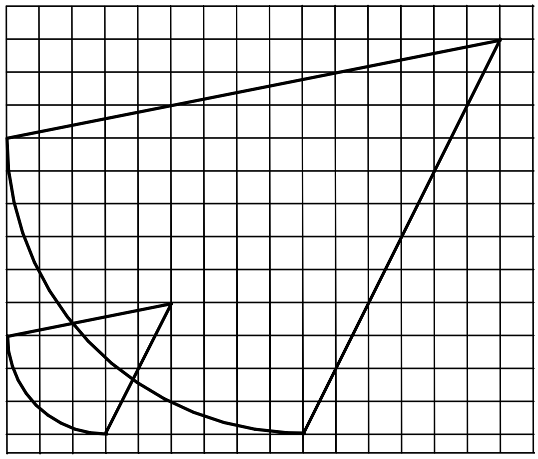
Insgesamt wurden für dieses Kapitel 6 Unterrichtsstunden verwendet.

2.4 Ähnlichkeit

Auf die Frage, wann sind ebene Figuren ähnlich, kam spontan die Antwort: Gehen die Figuren durch Vergrößern oder Verkleinern auseinander hervor, so sind sie ähnlich. Selbstverständlich war damit auch gemeint, dass vor einem solchen Maßvergleich durchaus eine allgemeine Bewegung auf eine der zu vergleichenden Figuren ausgeübt werden kann.

Die Überprüfbarkeit von Ähnlichkeiten war ebenso kein Problem. Man kannte zum Teil die Methode, durch Raster Figuren zu vergrößern oder zu verkleinern, wie die folgende Abbildung zeigt.

Ohne Probleme waren sich alle einig, dass alle Kreise bzw. alle Quadrate ähnlich seien und dass es dabei nicht so sehr auf die Längenmaße als auf die Form der Figuren ankommen würde. Das weitere Vorgehen musste den Kindern wohl aufgezwungen werden, da ihnen das Zerlegen von Figuren in Dreiecke nicht bekannt und somit der Stellenwert etwa von Kongruenzsätzen noch nicht vorhanden war.



Der Lehrer ließ deshalb Dreiecke samt ähnlichen zeichnen und gemeinsame Eigenschaften feststellen, mit deren Hilfe man überprüfen kann, welche Dreiecke ähnlich sind. Nach diesem gezielten Vorgehen fand man heraus:

Satz 1:

Dreiecke sind genau dann ähnlich, wenn sie die gleichen Innenwinkel haben.

Zur Überprüfung dieses Sachverhalts wurden die Dreiecke so bewegt, dass sie in ein Raster eingebettet werden konnten (vgl. obige Abbildung).

Auf die Frage, was man über die Seiten ähnlicher Dreiecke aussagen kann, kam sofort die Feststellung:

Satz 2:
Das Verhältnis entsprechender Seiten in ähnlichen Dreiecken ist eine feste Zahl.

Beim Anwenden sind dann eigentlich alle Ähnlichkeitssätze für Dreiecke herausgekommen, doch wurden diese nicht mehr formuliert, weil sie im Folgenden nicht benötigt wurden. Das Anwenden bestand vor allem im Zeichnen und Messen ähnlicher Dreiecke und dann auch an ähnlichen Figuren allgemeiner Art.

Insgesamt wurden hierfür etwa 2 Unterrichtsstunden benötigt.

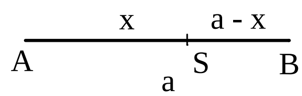
3. Der Goldene Schnitt und die Konstruktion eines regulären Fünfecks

3.1 Der Goldene Schnitt in der Geschichte

Ab hier wurde auf der Klausurtagung unterrichtet.
Legt man Versuchspersonen verschiedene Rechtecke vor, von denen eines Seitenlängen aufweist, die sich entsprechend dem Goldenen Schnitt verhalten, so findet man in der Literatur immer wieder die Behauptung, dass dieses Rechteck von den meisten als „ästhetischtes“ empfunden wird. Auch die Aufforderung, eine Strecke für den Beobachter „angenehm“ zu teilen, soll in den meisten Fällen eine dem Goldenen Schnitt nahekommende Aufteilung ergeben. Wir konnten dies bei der Schülergruppe (26 Teilnehmer einschließlich Oberseminar) nicht feststellen.

Egal, ob nun diese Behauptung wahr oder nicht ist, fordert man die Schüler auf, mehrere so geteilte Strecken auszumessen. Schließlich lässt man für einige Beispiele des Goldenen Schnitts die Schülerinnen und Schüler getrennt die Quotientenwerte der größeren zur kleineren Seite und der ganzen zur größeren Seite berechnen und stellt jeweils deren Gleichheit fest.

Definition 1:
Eine Strecke $\overline{AB}$ der Länge a heißt im Goldenen Schnitt geteilt, wenn für einen inneren Streckenpunkt S mit x = $\overline{AS}$ gilt: a:x = x: (a - x)



Es gibt genügend Beispiele aus Kunst und Architektur im klassischen Altertum und in der Renaissance, wo vermutlich, zumindest näherungsweise, der Goldene Schnitt verwirklicht wurde. Nach Bergamini [1], Seiten 94 bis 97 u. a. wird erwähnt:

Beispiele aus der Kunst
- *Leonardo da Vinci*: „Erholung“
- *Seurat*: „La Parade“
- *Mondrian*: „Place de la Concorde“.

Beispiele aus der Architektur

- Epidauros, Tempel des Asklepios

- Rathaus in Leipzig

- Privathaus in einem Pariser Vorort des Architekten *Le Corbusier*

Die Beispiele wurden hinsichtlich des Goldenen Schnitts ausgemessen und dessen Verhältnis jeweils berechnet.

Bereits in den „Elementen“ von *Euklid* finden sich Aufgaben zum Goldenen Schnitt. Ein lateinischer Übersetzer fand dafür die Bezeichnung „Proportia habens medium et dua extrema“. Eine dieser Aufgaben lautet:
- „Eine Strecke (ist) so zu teilen, dass das Rechteck aus der ganzen Strecke und dem einen Abschnitt dem Quadrat über dem anderen Abschnitt gleich ist“ (*Euklid*: „Elemente“, Buch II, Seite 11). Die Lösung hierzu findet man bei Pieper [1], Seiten 35 bis 37.
- *Luca Pacioli* sprach zu Beginn des 16. Jahrhunderts von der „**divina proportio**“.
- *Leonardo da Vinci* verwendet zur gleichen Zeit bereits die Bezeichnung „**sectio aurea**“.
- *Johannes Kepler* führte den Begriff „**proportionale Teilung**“ ein, während man im 18. Jahrhundert von der „**stetigen Proportion**“ oder „**stetigen Teilung**“ sprach.

3.2 Algebra und Konstruktion

Es wird nun x der Definition 1 für a = 1 berechnet. Nach Definition 1 ist
$1 : x = x : (1 - x)$; nimmt man auf beiden Seiten das Reziproke, erhält man
$x = (1 - x) : x$; mit einer Umstellung in Analogie mit kleinen Zahlen (vgl. Meyer u. a. [1]) findet man:
$x^2 = 1 - x$. Diese Gleichung kann man bereits in der 5. bzw. 6. Jahrgangsstufe näherungsweise lösen:

	1 - x	**x^2**	**Kritik**
1	0	1	
0	1	0	
0,5	0,5	0,25	
0,6	0,4	0,36	)
			) x ≈ 0,6
0,7	0,3	0,49	)
0,61	0,39	0,3721	)
0,62	0,38	0,3844	) x ≈ 0,62
usw.	usw.	usw.	

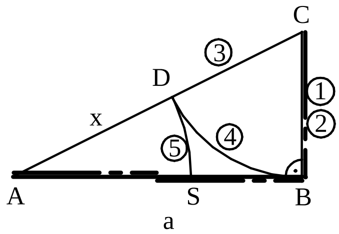
Den genauen Wert für x kann man in der 9.Klasse berechnen als $x = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) = 0{,}61803398....$

Für die **Konstruktion eines Goldenen Schnitts** wurde zunächst das folgende Kochbuchrezept angegeben:

1. Konstruiere die Senkrechte s zu AB durch B nach oben.
2. Trage auf dem freien Schenkel der Senkrechten a:2 ab.
3. Verbinde C mit A.
4. Zeichne um C einen Kreis mit Radius a:2.
   Der Schnittpunkt mit AC heiße D.
5. Zeichne um A einen Kreis mit Radius x.

Der Schnittpunkt S mit AB ist der gesuchte Teilungspunkt.

Der letzte Satz ist eine Behauptung, die begründet werden muss:



Begründung:
Nach Defrinition 1 gilt $a : x = x : (a - x)$.
Mit Hilfe von in Analogie mit kleinen Zahlen gefundenen Umstellungen (vgl. Meyer u. a. [1]) und dem Distributivgesetz folgt hieraus:

$$\begin{aligned} a &= x^2 : (a - x) \\ a\,(a - x) &= x^2 \\ a^2 - ax &= x^2 \\ a^2 &= x^2 + ax \end{aligned}$$

An dieser Gleichung ändert sich nichts, wenn man auf beiden Seiten dieselbe Zahl addiert (vgl. Kapitel 1):

$$a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = x^2 + 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot x + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Die linke Seite wurde als ein vollständiges Quadrat erkannt (vgl. Kapitel 1):

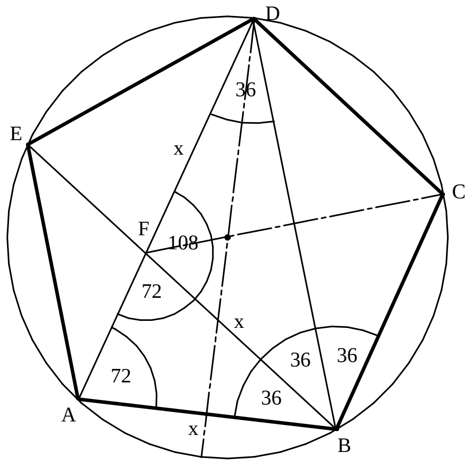
$$a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2$$

Ohne Zweifel fiel diese Überlegung den Schülerinnen und Schülern sehr schwer. Sie haben zwar eingesehen, dass die vorgeführten Schritte wahr sein mögen, wiederholen konnten sie diese nicht. Unsere Erfahrung zeigt, dass Schülerinnen und Schüler, die sich frühzeitig mit Mathematik befassen, von Fall zu Fall mehr verstehen, sich also in den Stil dieses Faches allmählich einleben. Die Schüler kannten aus Kapitel 1 bereits den Satz des *Pythagoras*; so konnte nachvollzogen werden, dass die durchgeführte Konstruktion offenbar nach diesem Satz die richtige war, weil man die obigen algebraischen Schritte auch von unten nach oben durchführen kann.

3.3 Die Fünfeckkonstruktion

Man betrachtet eine Skizze eines regulären Fünfecks mit Umkreis (vgl. die nebenstehende Abbildung) und entdeckt Symmetrien und Winkelbeziehungen.

Es wird entdeckt, dass das innere Fünfeck auch regulär ist und viele gleichschenklige Dreiecke zu beobachten sind. Man lässt Winkel berechnen und findet insbesondere, dass die Dreiecke ABD und AFB dieselben Winkel von 36° und 72° haben und deshalb auch das Dreieck BDF gleichschenklig mit den Schenkeln DF = FB = AB = x ist.



Im Vorunterricht wurde erkannt, dass ähnliche Dreiecke die gleichen Winkel und die gleichen Verhältnisse bei entsprechenden Seitenlängen haben.

Das konnte jetzt genutzt werden: Die Dreiecke ABD und AFB sind wegen gleicher Winkel ähnlich und deshalb gilt mit der Diagonalenlänge a:

$$\overline{AD} : \overline{AB} = \overline{AB} : \overline{AF}$$

d. h. $a : x = x : (a - x)$.

Die Schenkellänge verhält sich also zur Basislänge bei solchen Dreiecken im Goldenen Schnitt. Diese Dreiecke werden deshalb **Goldene Dreiecke** genannt.

Satz:
Die Innenwinkel in einem Dreieck sind genau dann 72° und 36°, wenn die Schenkellänge sich zur Basislänge im Goldenen Schnitt verhält.

Der Weg von den Winkeln zur Proportionalität aus Schenkellänge und Basislänge wurde oben bereits gezeigt. Der umgekehrte Weg wird durch die Konstruktion eines regulären Fünfecks mit vorgegebener Diagonalenlänge „bewiesen“, dessen Seitenlänge über den Goldenen Schnitt konstruiert wird.

4. Parkettierungen

Die Frage: „Was ist geometrisch wesentlich an einem Parkettmuster?“ ergibt die folgende Schülerdefinition:

Unter einer Parkettierung (oder auch Pflasterung genannt) versteht man die lückenlose Bedeckung einer in allen Richtungen unendlich ausgedehnten Fläche mit einer periodisch wiederkehrenden Grundfigur.

Durch diese Festlegung spannt sich ein riesiger Bogen von streng geometrischen Fußbodenmustern bis hin zu den Parkettierungen aus Tieren und Pflanzen des niederländischen Künstlers M. C. ESCHER. Betrachtungen von Bildern, wie sie z. T. hier nicht veröffentlicht werden dürfen, zeigen, dass die postulierte Regelmäßigkeit an den Rändern der dargestellten Flächen i. a. durchbrochen wird, indem nur Teile der Grundfigur verwendet werden.

Um im vorliegenden Unterricht die zur Verfügung stehenden Möglichkeiten einzuschränken, wird darüber hinaus vereinbart:
- Die Grundfigur besteht nur aus einem regulären n-Eck (sogenannte PLATONische Parkettierung).
- Es werden nur ebene Parkettierungen betrachtet.

Die Einschränkung hat zur Folge, dass es i. a. genügt, überschaubare Ausschnitte zu betrachten, meist reicht schon eine Ecke und die dort zusammenstoßenden regulären n-Ecke.

Da dieser Abschnitt und der folgende eine verstärkte Schüleraktivität erfordert, werden Arbeitsaufträge (AA abgekürzt) formuliert; diese sollen dann von den Schülern, u. U. mit Anleitungen und Hinweisen ergänzt, erledigt werden. Abschließend werden jeweils die Ergebnisse zusammengefasst und formuliert.

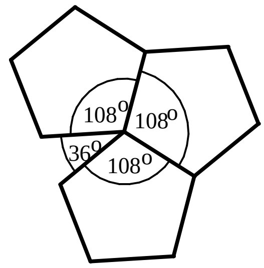
AA1: Jeder Schüler fertigt sich mit Hilfe von bereitgestellten n-Eck-Schablonen (n = 3, 4, ..., 7) mehrere Duplikate an.

AA2: Jeder Schüler probiert, ob durch Anlegen von Vielecken einer Sorte eine Parkettierung möglich ist.

Ergebnis 1:
Für n gleich 3, 4 und 6 gelingt eine Parkettierung, für 5 und 7 ist dies nicht möglich.

AA3: Suche nach Ursachen bzw. Begründungen für das Gelingen oder Misslingen einer Parkettierung und überprüfe die Ergebnisse anhand des regulären Fünfecks.

Ergebnis 2:
In einer Ecke müssen mindestens drei Vielecke zusammenstoßen.



Ergebnis 3:
Beim Anlegen der n-Ecke bleibt entweder ein Winkelkeil offen oder die n-Ecke schließen sich lückenlos. Letzteres geschieht dann, wenn der Innenwinkel des n-Ecks 60^o, 90^o oder 120^o beträgt, also ein Teiler von 360^o ist.

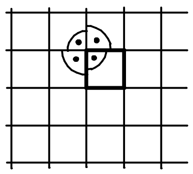
Ergebnis 4:
Das Sechseckparkett ist ein „Teilparkett“ des Dreieckparketts.

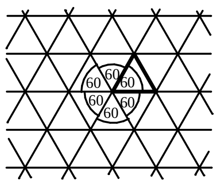
Weil in obiger Zeichnung $3 \cdot 108^o = 324^o$ beträgt, bleibt ein Winkelkeil von 36^o offen. Legt man ein weiteres Fünfeck an, so wird das erste Fünfeck teilweise überdeckt. Man erhält also keine Parkettierung. Die Anordnung der n-Ecke ist also nur dann geschlossen, d. h. der Keil tritt nicht auf, wenn der Innenwinkel des regulären n-Ecks ein Teiler von 360^o ist.

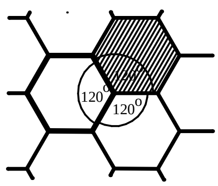
Ergebnis 5:
Es gibt genau drei PLATONische Parkettierungen.

Ergebnis 6:
Die Summe der Innenwinkel, der an einer Ecke zusammenstoßenden regulären Vielecke beträgt 360^o. Es gibt nur drei Lösungen:

$4 \cdot 90^o$ $\qquad$ $6 \cdot 60^o$ $\qquad$ $3 \cdot 120^o$







Begründung:
Obige Vorüberlegung zeigte bereits, dass der Innenwinkelbetrag Teiler von 360^o sein muss. Andererseits hat der Unterricht gezeigt, dass der Zentrumswinkel φ Teiler von 360^o ist, wenn es sich um ein reguläres n-Eck handelt. Es ist auch schon bekannt, dass der Innenwinkel $\alpha_n = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (180^o - \varphi)$ ist. Dies alles kann man ausnutzen, um zu klären in welchen Fällen eine Parkettierung möglich ist. Es sei n die Eckenanzahl des regulären n-Ecks und k die Anzahl der nach obigem in einer Raumecke zusammenstoßenden n-Ecke:

n	φ	α_n	k	Kritik
3	120^o	60^o	6	Parkettierung
4	90^o	90^o	4	Parkettierung
5	72^o	108^o	$3\frac{1}{3}$	nicht möglich
6	60^o	120^o	3	Parkettierung
7	$360^o:7$	$128{,}5...^o$	2,8	nicht möglich
8	45^0	135^0	$2\frac{2}{3}$	nicht möglich

Mit wachsendem n wird k immer kleiner, bleibt aber stets oberhalb 2. Da α_n immer kleiner als 180^o ist, wird es keinen weiteren möglichen Fall in der Tabelle geben. Damit ist Ergebnis 6 begründet. Ein genauerer Beweis führt auf DIOPHANTische Gleichungen.

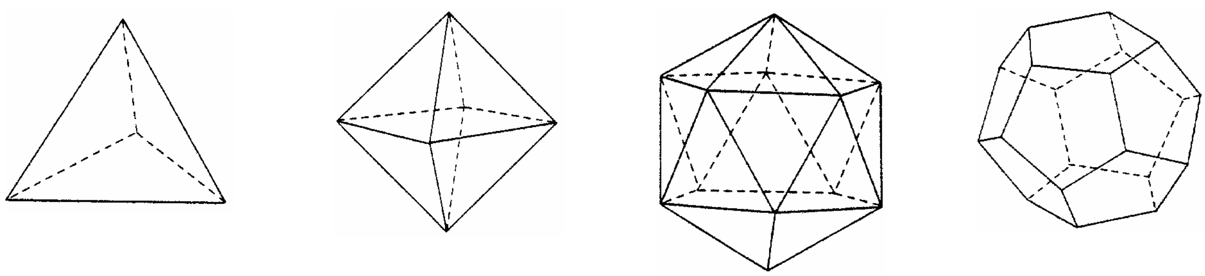
5. Basteln von *Platon*ischen Körper

Beim Versuch, mit regulären Fünfecken zu pflastern, hat sich gezeigt, dass das nicht geht; es bleibt ein Keil von 36^o offen. Führt man jedoch die Flanken des Keils vorsichtig zusammen, so biegen sich die Fünfecke etwas nach oben oder unten; es entsteht eine räumliche Ecke. Bedingung für das Zustandekommen einer räumlichen Ecke ist also, dass bei der Parkettierung ein Keil offen bleibt.

Da weniger als drei n-Ecke keine räumliche Ecke bilden können, ergeben sich neben den regulären Fünfecken nur die folgenden Möglichkeiten, wenn man keine ebene Parkettierung bekommen will:

Einen Körper nennt man regulär oder PLATONisch, wenn alle seine Stücke, also Ecken, Kanten, Flächen usw., zueinander deckungsgleich sind.
Will man solche Körper basteln, so braucht man mehrere der eben genannten 5 räumlichen Ecken aus regulären n-Ecken. Das folgende Vorgehen zeigt, dass es in der Tat 5 solche Körper gibt:

Ergebnis 7:
Es gibt 5 PLATONische Körper: Tetraeder, Oktaeder, Ikosaeder, Würfel und Dodekaeder.



Hierzu:
AA4: Bastle mehrere räumliche Ecken sowohl als Flächen- wie auch Kantenmodell aus gebügelten Strohhalmen (u. U. durch Flächendiagonalen verstärken) zu jeder der 5 Möglichkeiten mit einer Kantenlänge von 3 cm. Vergiss nicht bei dem Flächenmodell Klebekanten. Biege diese vor, bevor du zusammenklebst. Bei den Kantenmodellen werden die zu verbindenden Kanten mit Kleber versehen und dadurch aneinander gehängt.

AA5: Untersuche, ob man mit den gebastelten räumlichen Ecken jeder Sorte für sich einen geschlossenen Körper bilden kann.

AA6: Zähle anhand der gefertigten PLATONischen Körper ab, wie viele Ecken, Flächen und Kanten jeder besitzt und erstelle damit eine Tabelle.

AA7: Versuche (durch Addition bei jedem Körper) einen Zusammenhang zwischen den Anzahlen der Ecken, Flächen und Kanten zu finden und trage ihn in die Tabelle ein.

Ergebnis 8:

	Eckenanzahl	Flächenanzahl	Kantneanzahl	„Zusammenhang“
Tetraeder	4	4	6	4 + 4 = 6 + 2

Oktaeder	6	8	12	6 + 8 = 12 + 2
Würfel	8	6	12	8 + 6 = 12 + 2
Ikosaeder	12	20	30	12 + 20 = 30 + 2
Dodekaeder	20	12	30	20 + 12 = 30 + 2

Die hier gemachte Beobachtung „Zusammenhang“ gilt, wie die Mathematik zeigt, allgemein.

EULERscher Polyedersatz:
Hat ein konvexes Polyeder kein „Loch“, e Ecken, f Flächen und k Kanten, so gilt $e + f = k + 2$.

Zum Beweis:
Man baut den Polyeder Schritt für Schritt aus seinen Begrenzungsflächen (n-Ecken) auf:
Erstes n-Eck: Hier ist $e = k$ und $f = 1$, also $e + f = k + 1$.
Nun fügt man das zweite n-Eck hinzu. Dadurch wird f um 1 größer, k wird um 1 größer als e, weil die beiden n-Ecke 1 Kante und 2 Ecken gemeinsam haben. Also folgt $e + (f + 1) = (k + 1) + 1$
d. h. es gilt für die neuen Zahlen e, k und f $e + f = k + 1$.
Diese Gleichung bleibt bei weiterem Anfügen von n-Ecken der Form nach erhalten, obwohl e, f und k ihren Wert ändern. Zum Schluss wird das letzte n-Eck eingefügt. Dabei bleibt e und k unverändert, nur f wird um 1 größer. Dadurch wird die linke Seite dieser Gleichung um 1 größer und man erhält $e + f = k + 2$.

Literatur

Adam, P. und Wyss, A. [1]: PLATONische und ARCHIMEDische Körper, ihre Sternformen und polaren Gebilde, Verlag Paul Haupt, Bern, Verlag Freies Geistesleben, Stuttgart 1994

Bergamini, D. [1]: Die Mathematik, TIME-LIFE, International (Nederland) B. V. 1975

Kroll, W. [1]: Kantenmodelle, aus mathematiklehren 17, August 1986, Friedrich Verlag, Velber

Meyer u. a. [1]: Brennpunkt Mathematik 5, Schroedel-Schulbuchverlag GmbH 1985, vergriffen

Pieper, H. [1]: Heureka, ich hab’s gefunden, Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt 1988

Toepell, M., Herausgeber [1]: PLATONische Körper - Unterricht und Geschichte, aus Der Mathematikunterricht Jahrgang 37, Heft 4, 1991