Trainingslager der bayerischen Olympiamannschaft in Altdorf vom 20. bis 23. März 1996

Das Trainingslager wird zum ersten Mal veranstaltet. Vorerfahrungen sind nur bei einem Referenten, allerdings hinsichtlich der Weltolympiade, vorhanden. So stellt das Folgende weitgehend einen ersten Versuch dar, den es sicher in den kommenden Jahren zu verbessern gilt, wenn erneut die Voraussetzungen hierzu geschaffen werden können. In diesem Zusammenhang gilt unser Dank der Dresdner Bank AG, die erst durch eine großzügige Spende die Teilnehmergebühr in eine erträgliche Größenordnung bringen ließ. Unser Dank gilt auch der Stadt Altdorf, insbesondere Herrn Rektor Günther Lang, die uns für das Seminar Räumlichkeiten in ihrer Hauptschule zur Verfügung stellt.

Als eigentliche Grobziele des Trainings können genannt werden:
- Bei jedem Teilnehmer soll die Möglichkeit geschaffen werden, sein Wissen im Überblick zu beherrschen und so zum Einsatz zu bringen.
- In der Mathematik ist es wichtig, sich rechtzeitig Skizzen und beispielhaftes Zahlenmaterial beschaffen zu können.
- Man muß lernen, Ideen zu Strategien zu ordnen.
- Die abschließende Schwierigkeit, die immer auftaucht, besteht in der schriftlichen Fixierung der Ideen. Eine einwandfreie Beweisniederschrift gehört zu den schwierigsten Dingen, mit denen es der Mensch zu tun hat.

Meyer

Elementargeometrische Verfahren

Die folgenden Untersuchungen sind nicht vollständig; sie entstanden anhand einer gewissen Zweckmäßigkeit, über deren Stellenwert man verschiedener Meinung sein kann. Es geht vor allem um eine Dokumentation der elementargeometrischen Möglichkeiten, die es gibt, wenn man ein Problem zu bearbeiten hat.
Grundsätzlich werden die meisten folgenden Inhalte aus der Anschauung gewonnen, um dem Teilnehmer vorzuführen, wie man sich die Dinge merkt.

Im folgenden wird die Auffassung vertreten, daß die Raumgeometrie die Geometrie unseres Lebens und die ebene Geometrie das mathematische Kalkül zur Beschreibung und Lösung der Probleme in ihr ist.
Die aufgeführten Aufgaben sind i. a. so zu verstehen, daß eine Aufgabe bei z. B. c) u. U. die Inhalte von a) und b) erforderlich macht. Die folgenden Axiomensysteme sind nicht minimal und werden auch nicht im Sinne der Grundlagen eingesetzt; d. h. sie werden als Eigenschaften des Anschauungsraumes, der als Ganzes vorhanden ist, aufgezählt.

a) Inzidenzeigenschaften über das Enthaltensein, Schneiden und Verbinden von Punkten, Geraden und Ebenen.

Man unterscheidet

- die **affine Geometrie**:
Sie enthält Punkte, Geraden und Ebenen mit den folgenden Axiomen:

Zwei verschiedene Punkte bestimmen genau eine Gerade.

Parallelenaxiom des *Euklid*: Durch einen Punkt und einer sie nicht enthaltenen Geraden gibt es in der hierdurch bestimmten Ebene genau eine Gerade h, die g nicht schneidet.

Reichhaltigkeitsaxiom: Es gibt ein Viereck so, daß keine drei Ecken auf einer Geraden liegen. Es gibt mindestens einen Punkt außerhalb der Ebene des Vierecks. Jede Gerade enthält mindestens 2 Punkte. Jede Ebene enthält mindestens ein Viereck, wie soeben beschrieben.

Haben zwei Ebenen einen Punkt gemeinsam, so haben sie mindestens einen zweiten Punkt gemeinsam, also eine Gerade.

Je drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, bestimmen genau eine Ebene.

Axiom von *Veblen-Young*: Liegen a und b in einer Ebene und werden von zwei weiteren Geraden c und d geschnitten, so sind entweder c und d parallel oder sie schneiden sich.

- die **projektive Ebene**:
Sie besteht aus Punkten, Geraden und Ebenen mit den folgenden Axiomen:

Zu je zwei verschiedenen Punkten gibt es genau eine Gerade.

Je zwei verschiedene Geraden einer Ebene schneiden sich in genau einem Punkt.

Es gibt ein Viereck, d. h. vier Punkte, von denen keine drei auf einer Geraden liegen.

Es gibt vier Geraden, von denen keine drei durch einen Punkt gehen.

- den **projektiven Raum**: Er besteht aus Punkten, Geraden und projektiven Ebenen.

Axiom von *Veblen-Young*: Werden zwei Geraden a, b mit $a \cap b = \{P\}$ von zwei weiteren Geraden c und d außerhalb von P geschnitten, so schneiden sich c und d auch.

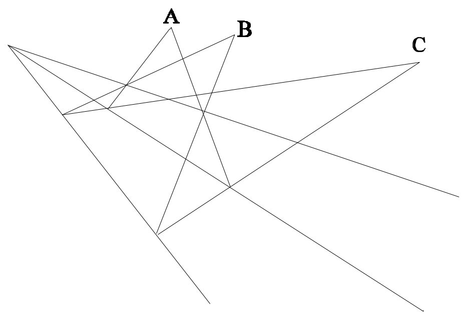
Jede Gerade enthält mindestens drei Punkte, jede projektive Ebene mindestens ein Viereck. Außerhalb einer projektiven Ebene gibt es mindestens einen Punkt.

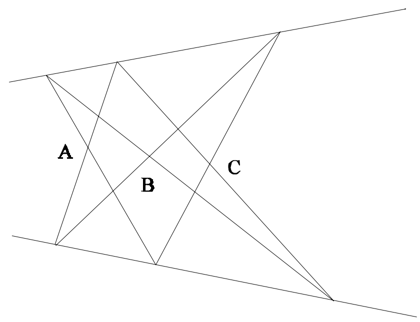
Je drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, bestimmen eine projektive Ebene.

Je zwei projektive Ebenen schneiden sich in einer Geraden.

Besonderheiten:
1) Parallel wird als Nichtschneiden oder durch Identität (bzw. Enthaltensein) erklärt. Diese Definition erfordert beim Parallelsein zweier Geraden im Raum den Zusatz: Die Geraden liegen in einer Ebene. Das bedeutet umgekehrt, daß aus der Kenntnis der Parallelität zweier Geraden im Raum folgt, daß sie in einer Ebene liegen.
2) Jede Gerade bzw. jede Ebene ist zu sich selbst parallel. Jede Gerade, die in einer Ebene liegt, ist zu dieser parallel.
3) Die Transitivität dreier paralleler Geraden im Raum muß nicht in einer Ebene verlaufen.
4) Haben Ebenen oder Geraden eine Gerade oder einen Punkt gemeinsam, so spricht man von Büschel oder Bündel; Büschel ist die Bezeichnung, wenn die Schar durch 1 Parameter dargestellt werden kann, bzw. von Bündel redet man bei 2 Parametern.
5) Das Axiomensystem der projektiven Ebene ich **selbstdual** in folgendem Sinn: Jede Aussage über Punkte Geraden geht in eine wahre Aussage über, wenn man die Größen Punkte

und Geraden und Schneiden und Verbinden miteinander vertauscht. Analoges gilt im Raum, wo Punkte und Ebenen dual sind; der Zusammenhang ist dort allerdings schwieriger.
6) Weitere Axiome werden nur in der projektiven Fassung wiedergegeben; sie gelten in der Ebene, die Koordinaten über einem Körper hat:





Axiom des *Desargues*: Aus der linken ebenen Figur folgt: A, B und C liegen auf einer Geraden.
Axiom des *Pappos*: Aus der rechten Figur folgt: A, B und C liegen auf einer Geraden.

Aufgaben: 1.1.a.1 bis 4

b) Anordnung ohne Kombinatorik:
Vorsicht: Bei den Olympiade-Unterlagen wird meist die Anordnung vernachlässigt, wie dies auch sonst in der Schulgeometrie seit *Euklid* üblich ist. Da aber *Baldus* in München lehrte, sollten wir dies anders machen, vgl. *Baldus-Löbell* [1].

- Jede Gerade teilt die gesamte Ebene in zwei sogenannte Halbebenen, wobei die Literatur die Randgerade zur Halbebene zählt oder nicht zählt.
- Damit ist eine Zwischenbeziehung (ABC) für drei Punkte einer Geraden g erklärt: B liegt zwischen A und C, wenn eine Gerade h, die g in B schneidet, die Gesamtebene so teilt, daß A und C in verschiedenen Halbebenen liegen.
- Eine Strecke AB ist dann die Gesamtheit aller Punkte, die zwischen den Randpunkte A und B liegen, einschließlich der Randpunkte.
- Axiom von *Pasch*: Schneidet die Gerade g die Seite AB eines Dreiecks ABC zwischen A und B, so schneidet sie auch mindestens eine der beiden anderen Seiten in einem inneren Punkt oder in C, wobei A , B und C nicht auf g liegen sollen.

Aufgaben: 1.1.b.1 bis 5

c) Winkel:
- an parallelen Geraden (sog. E-, F-, Z-Winkel), Winkelsummensätze im n-Eck.
Definition des Winkels zwischen Kurven, insbesondere zwischen Kreisen, anhand des Winkels zwischen den Tangenten an die Kurven im Schnittpunkt.
Winkel im Raum:
- zwischen windschiefen Geraden a und b: Man legt durch einen Punkt auf a eine Parallele b' zu b; dann sei $\angle(a,b) := \angle(a,b')$.

- zwischen Ebenen E, F als $\angle(E,F):=\angle(e,f)$, wobei e aus E und f aus F jeweils senkrecht auf E $\cap$ F sind. Sind g und h die Lote auf E bzw. F, so gilt $\angle(E,F) = \angle(g,h)$.
- zwischen Gerade g und Ebene E: $\angle(g,E):=\angle(g,l)$, wobei l ein Lot auf E ist.

d) Senkrechtstehen:
Eine Gerade steht im Raum auf einer Ebene senkrecht, wenn sie auf mindestens zwei verschiedenen Richtungen der Ebene senkrecht steht. Dieses Lot steht dann auf allen Geraden der Ebene senkrecht.
Lot fällen und errichten in der Ebene und im Raum ist eindeutig.

e) Abstände, auch Streckenverhältnisse:
Abstände werden auf Loten gemessen und mit dem Lehrsatz des Pythagoras und dem Vierstreckensatz aber auch mit Trigonometrie (Definition der trigonometrischen Funktionen, Sinus- und Cosinussatz, viel seltener weitere Formeln der Trigonometrie: Mit den Normbezeichnungen am Dreieck gilt:
Sinussatz: $a:b:c = \sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma$
Cosinussatz: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ bzw. zyklische Vertauschungen, also eine Verallgemeinerung des Lehrsatzes des *Pythagoras*) berechnet.
Geometrische Orte angeben: Kurven, deren Punkte konstanten Abstand zu 1 oder 2 oder 3 oder 4 usw. Punkten bzw. 1 oder 2 oder 3 Geraden oder Kreisen haben (vgl. *Meyer* [1] Seite 182 ff).

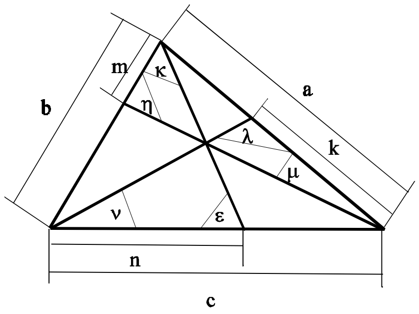
Aufgaben: 1.1.e.1 bis 10, wobei Extremalprinzip bei Abständen; mit Aufgabe 2 kann die Aufgabe 3 gelöst werden.

Besonderheiten:
- Kreis des Apollonius (vgl. *Meyer* [2]). Hierzu

Aufgabe 1.1.e.11

- Man kann Schwerpunktsgeometrie machen, indem man sich vorstellt, daß jedem geometrischen Punkt eine Masse zugeordnet ist. Hierfür gelten die "Massenaxiome" des *Archimedes*:
Liegen alle Teilmassen links von einer Geraden, so liegt deren Schwerpunkt links der Geraden.
Liegen die Teilmassen symmetrisch zu einer Geraden, so liegt deren Schwerpunkt auf der Geraden.
Für gewisse physikalische Überlegungen ist es ausreichend, sich vorzustellen, daß die Teilmassen in ihrem Schwerpunkt vereinigt sind.

Aufgaben: 1.1.e.12 bis 15



Satz 1 von *Ceva* nach *Meyer* [1]: Notwendig und hinreichend für die Existenz eines Ecktransversalenschnittpunktes in einem Dreieck mit den Eckwinkeln α, β und γ ist eine der folgenden Bedingungen:

$(a-k)(b-m)(c-n) = kmn$

$\sin(\lambda+\beta)\sin(\eta+\gamma)\sin(\varepsilon+\alpha) =$
$= \sin(\lambda-\gamma)\sin(\eta-\alpha)\sin(\varepsilon-\beta)$

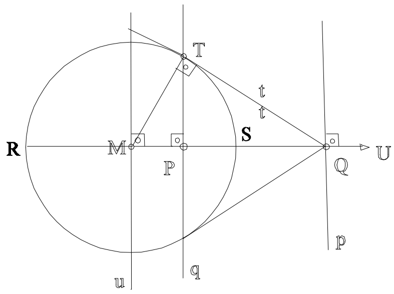
$\sin(\alpha-\kappa)\sin(\beta-\mu)\sin(\gamma-\nu) = \sin\kappa\sin\mu\sin\nu$

Aufgaben: 1.1.e.16, 17

f) Abbildungsgeometrie:
Es werden die Eigenschaften der gängigen Abbildungen wiederholt nach *Meyer u.a.* [1] Band Geometrie 7. Es geht meist gar nicht darum, die Abbildung z. B. mit Koordinatentransformation auszuüben, sondern vielmehr allein um die Veränderung zu nutzen, die durch die Abbildung verursacht wird.

Besonderheiten:
Definition des Zusammenhangs zwischen Pol und Polare:
Mit Hilfe eines Kreises (allgemein eines nicht zerfallenden Kegelschnittes) ordnet man den Punkten Geraden und den Geraden Punkte gemäß der folgenden Konstruktion zu:

$P \leftrightarrow p$
$Q \leftrightarrow q$
$T \leftrightarrow t$
$M \leftrightarrow$ Ferngerade
$u \leftrightarrow$ Richtung U



Wird diese Abbildung zweifach angewendet, so ergibt sich als Verkettung die identische Abbildung. Man sagt: Die Pol-Polarenbeziehung ist involutorisch.

Den Zusammenhang dieser Konstruktion kann man auch noch anders interpretieren:

Definition der Inversion am Kreis oder Spiegelung am Kreis:
Durch die Konstruktion wird die folgende Punktzuordnung getroffen:
$P \to Q$
$Q \to P$
Die Kreispunkte T bleiben fix.
Offenbar ist diese Abbildung involutorisch.

Definition Doppelverhältnis

Liegen die Punkte A, B, C, D in dieser Reihenfolge auf einer Geraden , so heißt

DV(A,C;B,D) = $\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{CB}|} : \frac{|\overline{AD}|}{|\overline{CD}|}$ Doppelverhältnis dieser vier Punkte.

Die Strecken sind hierbei gerichtet: Gleichgerichtete Strecken haben dasselbe Vorzeichen.
Ist der Wert dieses Doppelverhältnisses gleich -1, so spricht man von **harmonischer Teilung bzw. von einem harmonischen Punktequadrupel**.

Gehen vier Geraden durch einen festen Punkt und jede von ihnen durch einen Punkt von vier harmonischen Punkten einer Geraden, so heißen die vier Geraden **harmonische Geraden**; eine Begründung hierfür folgt später.

Satz 2:
Teilen B, D die Punkte A, C harmonisch, so teilen auch A, C die Punkte B, D harmonisch.

Beweis durch Nachrechnen.

Satz 3:
Die vier Punkte R, P, S und Q obiger Zeichnung über den Zusammenhang von Pol und Polare bilden ein harmonisches Quadrupel.

Um diesen Satz zu beweisen, sind Kenntnisse über Zahlenproportionen sinnvoll:

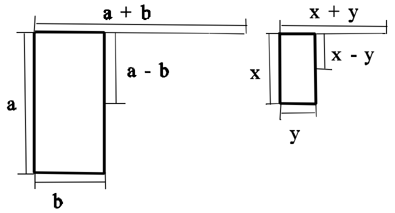
Die Proportionen x:y = a:b oder y:x = b:a oder x:a = y:b oder a:x = b:y besagen offenbar dasselbe. Es gilt aber dann auch die sogenannte **korrespondierende Addition und Subtraktion**:

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{a+b}{x+y} = \frac{a-b}{x-y}$$

Man kann sie algebraisch herleiten oder aber auch geometrisch.
Algebraischer Beweis:
Aus a:b = x:y folgt ay = bx also

bx + by = ay + by also b(x + y) = y(a + b) also b: y = (a+b):(x+y)	2bx = 2ay also ax + bx - ay - by = ax + ay - bx - by also (a + b):(x + y) = (a - b):(x - y)

Geometrischer Beweis:



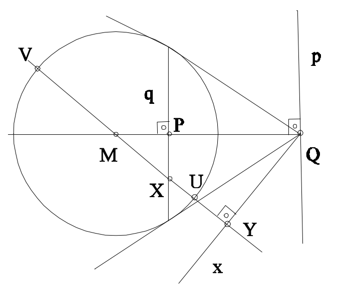
Man kann stets aus den gegebenen Größen a, b, x und y zwei Rechtecke, wie sie nebenstehend angezeigt sind, zeichnen. Das eine Rechteck geht dann durch eine zentrische Streckung aus dem anderen hervor. Deshalb gilt dies auch für die Strecken a + b und a - b bzw. x + y und x - y. Die zu beweisenden Streckenproportionen kann man dann einfach ablesen.

Beweis zum Satz 3:
Im Dreieck MTQ der Abbildung auf Seite 5 gilt nach dem Kathetensatz $r^2 = |\overline{PM}||\overline{QM}|$.

Hieraus folgt $\frac{r}{\left|\overline{PM}\right|} = \frac{\left|\overline{QM}\right|}{r}$ oder mit obiger korrespondierenden Addition und Subtraktion $\frac{r + \left|\overline{PM}\right|}{\left|\overline{QM}\right| + r} = \frac{r - \left|\overline{PM}\right|}{\left|\overline{QM}\right| - r}$. Damit ergibt sich die Proportion: $\frac{\left|\overline{PR}\right|}{\left|\overline{QP}\right|} = \frac{\left|\overline{PS}\right|}{\left|\overline{QS}\right|}$. So ist gezeigt, daß die vier Punkte P, Q, R, S harmonische sind.

Satz 4:
"Läuft" bei der Pol-Polarenbeziehung P (siehe die Zeichnung der Seite 5) auf der Geraden q, so "dreht" sich die Polare p zu P um den Pol Q zu q.

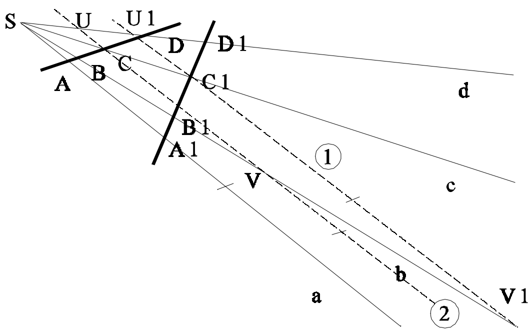
Beweis:
X sei ein beliebiger Punkt auf der Polaren q zu Q. x sei das Lot durch Q auf die Gerade XM (vgl. die Abbildung). Dann sind die Dreiecke PXM und QYM ähnlich und deshalb gilt $\frac{\left|\overline{PM}\right|}{\left|\overline{YM}\right|} = \frac{\left|\overline{XM}\right|}{\left|\overline{QM}\right|}$, oder mit dem Kathetensatz $r^2 = \left|\overline{PM}\right|\left|\overline{QM}\right| = \left|\overline{XM}\right|\left|\overline{YM}\right|$. Beim Beweis zu Satz 3 stellte sich aber heraus, daß dann die vier Punkte Y, U, X und V harmonische sind und deshalb die Gerade x durch Q Polare zum Punkt X ist.



Man müßte hier natürlich eine Fallunterscheidung hinsichtlich der Lage der Punkte X innerhalb bzw. außerhalb des Kreises machen.

Folgerung:
Die Pol-Polarenbeziehung bildet die projektive Ebene auf ihre dualisierte ab, die mit ihr identisch ist.

Satz 5:
Werden vier sich in S schneidende Geraden von einer fünften Geraden außerhalb S geschnittten, so ist das Doppelverhältnis der Schnittpunkte konstant.



Beweis: Nach dem Strahlensatz gelten:
$\left|\overline{AD}\right| : \left|\overline{CD}\right| = \left|\overline{AS}\right| : \left|\overline{CU}\right|$ und $\left|\overline{AB}\right| : \left|\overline{CB}\right| = \left|\overline{AS}\right| : \left|\overline{CV}\right|$

Hieraus folgt:

$$DV(A,C;B,D) = \frac{\left|\overline{AB}\right|}{\left|\overline{CB}\right|} : \frac{\left|\overline{AD}\right|}{\left|\overline{CD}\right|} = \frac{\left|\overline{CV}\right|}{\left|\overline{CU}\right|} = \frac{\left|\overline{C_1V_1}\right|}{\left|\overline{C_1U_1}\right|} = \frac{\left|\overline{A_1B_1}\right|}{\left|\overline{C_1B_{11}}\right|} : \frac{\left|\overline{A_1D_1}\right|}{\left|\overline{C_1D_1}\right|}$$

Also ist das DV unabhängig von der Wahl der Geraden.

Deshalb nennt man die geraden a, b, c, d harmonische.

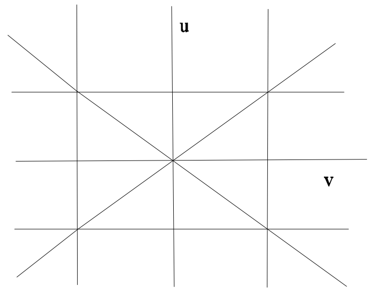
Unmittelbar folgt hieraus der folgende Satz, mit dem man bequem den Zusammenhang zwischen Pol und Polaren konstruieren kann:

Definition: In der projektiven Ebene heißt eine inzidenztreue Abbildung projektiv.

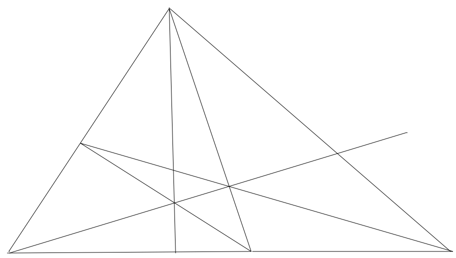
Ohne Beweis benutzen wir:

Durch Vorgabe von drei nicht kollinearen Punkten und hierzu drei willkürlich gewählten, nicht kollinearen Bildpunkten ist eine projektive Abbildung festgelegt.

Satz 6:
Das Doppelverhältnis bleibt bei Anwendung einer projektiven Abbildung erhalten.



Vorüberlegung:
Nimmt man in der letzten Zeichnung jeweils die Fernpunkte der Geraden zur Punktmenge und betrachtet das Doppelverhältnis der dann auf jeder Geraden liegenden vier Punkte, so ist das jeweils gleich -1. Hält man den Diagonalenschnittpunkt bei Anwendung einer projektiven Abbildung fest und gibt als Bilder der jeweils zu den Richtungen u und v gehörigen Fernpunkte irgendwelche Punkte an, so geht die letzte Zeichnung in die nebenstehende über. D. h. aber, daß auch diese auf jeder Geraden das Doppelverhältnis -1 hat.



Beweis zu Satz 6:
Aus der nebenstehenden Zeichnung entnimmt man nach dem Satz von *Ceva*:
(a-k)(b-m)(c-n) = knm oder:

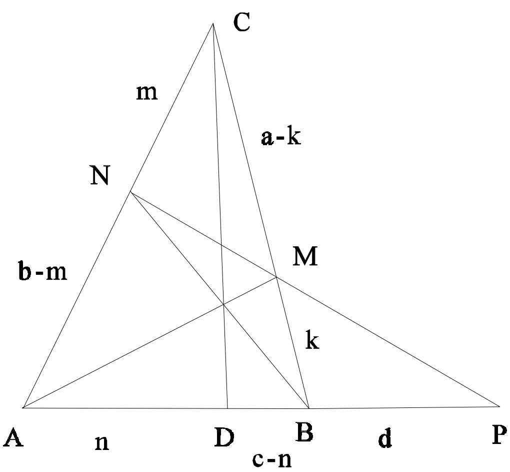
$$\frac{n}{c-n} = \frac{(a-k)(b-m)}{km} \qquad (1)$$

Andererseits entnimmt man der Zeichnung:
km(c+d) = (a-k)(b-m)d oder

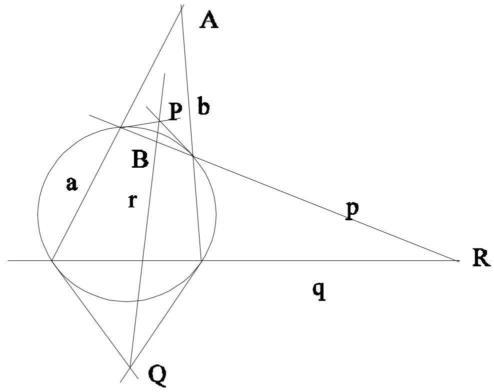
$$\frac{c+d}{d} = \frac{(a-k)(b-m)}{km} \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt $\frac{n}{c-n} = \frac{c+d}{d}$

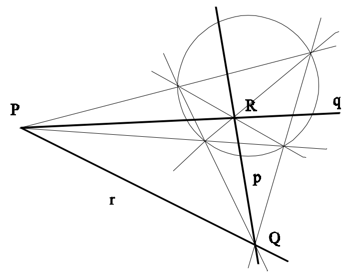
Also ist DV(A,B; D,P) = -1.



Man betrachte nun die nächste Zeichnung:
Zu den sich in R schneidenden Kreissekanten p und q konstruiert man die Pole P und Q. Damit ist deren Verbindung r die Polare zu R und die jeweils vier auf den Geraden p und q liegenden Punkte sind harmonisch angeordnet. a und b schneiden sich in A. Damit sind die Geraden a, b und AR zusammen mit AB harmonische.
Würde nun A nicht auf r liegen, so gäbe es auf p zu drei gegebenen Punkten zwei verschiedene vierte harmonische. Das kann nicht sein. Also liegt A auf r und somit gilt der folgende Satz:

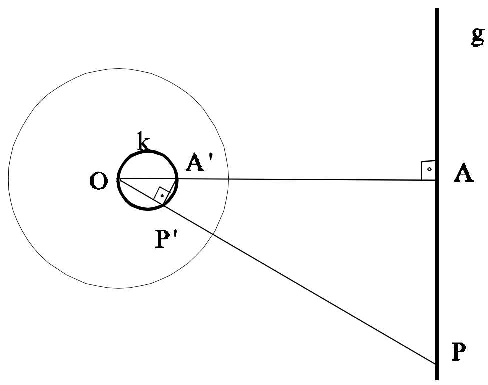


Satz 7:
Aus der nebenstehenden Zeichnung kann man die folgenden Pol-Polarenbeziehungen ablesen:
$P \rightarrow p$
$Q \rightarrow q$
$R \rightarrow r$



Satz 8:
Die Inversion am Kreis ist eine winkel- und kreistreue Abbildung, wobei man unter Kreisen die Gesamtheit aller affinen Geraden und Kreise meint.

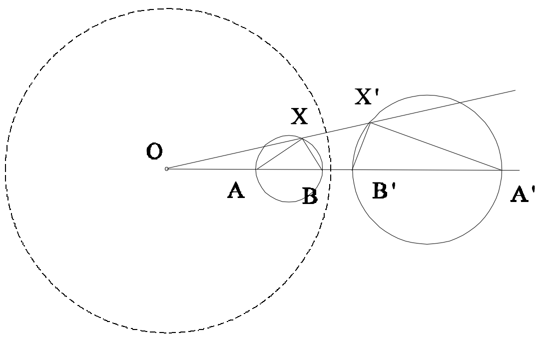
Beweis zur Kreistreue:
a) Geraden g, die den Mittelpunkt des Inversionskreises O nicht enthalten, werden auf Kreise k durch O abgebildet und umgekehrt; denn
OA sei Lot auf g mit Fußpunkt A. P sei auf g ein beliebiger Punkt mit seinem Bildpunkt P'.
Also gilt $\left|\overline{OP}\right|\left|\overline{OP©}\right| = r^2$.
Von P' legen wir einen rechten Winkel an, der AO in A' schneidet. Dann sind die Dreiecke OAP und OP'A' ähnlich; es folgt
$\left|\overline{OA}\right|\left|\overline{OA'}\right| = \left|\overline{OP}\right|\left|\overline{OP'}\right| = r^2$.



Also ist A' Bildpunkt von A und P' liegt wegen der Umkehrung des *Thales*kreissatzes auf dem Durchmesser OA'. Die Umkehrung gilt, weil die Abbildung involutorisch ist.

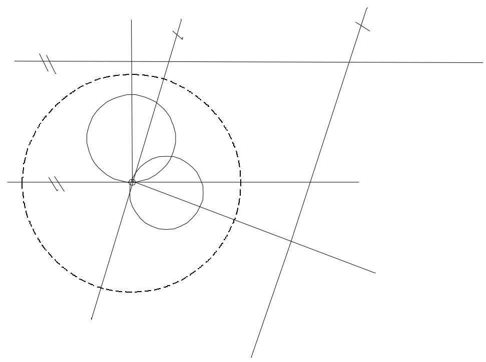
b) Kreise, die O nicht enthalten, gehen über in Kreise nicht durch O; denn:

Die sogenannte Potenzgleichung ergibt:
$\left|\overline{OA}\right|\left|\overline{OA'}\right| = \left|\overline{OX}\right|\left|\overline{OX'}\right| = \left|\overline{OB}\right|\left|\overline{OB'}\right| = r^2$



Also sind nach dem Ähnlichkeitssatz sws die folgenden Dreiecke ähnlich:
$\Delta OAX \sim \Delta OA'X'$ und $\Delta OBX \sim \Delta OB'X'$
Deshalb gilt für Winkel die folgende Beziehung:
$\angle A'X'B' = \angle A'X'O - \angle B'X'O =$
$= \angle OAX - \angle OBX = 180^o - \angle BAX - \angle OBX =$
$= 180^o - 9o^o = 90^o$
Also liegt X' auf dem *Thales*kreis über A'B'.

c) Beweis der Winkeltreue:
Der Winkel zwischen zwei Kreisen wird als Winkel zwischen den Tangenten im Schnittpunkt definiert. Deshalb muß man nur zeigen, daß das Inversionsbild zweier sich schneidender Geraden den gleichen Winkel wie das Urbild hat. Wegen der in der Abbildung eingezeichneten Parallelitäten und dem Umstand, daß sich zwei Kreise in beiden Schnittpunkten unter dem gleichen Winkel schneiden, ergibt sich die Behauptung.



Bemerkung:
Das Bild eines Kreises findet man also über die Bildendpunkte des Durchmessers AB. Schneidet der Kreis den Inversionskreis, so hat man zusätzlich Kreispunkte als Fixpunkte.

Der letzte Beweis läßt bereits vermuten, wozu man solche Abbildungen braucht: Hat man ein Problem mit und an Kreisen, so kann man dies u. U. mit Hilfe einer Inversion winkeltreu auf ein Problem mit Geraden zurückführen, indem man einen Punkt durch eine geeignete Inversion nach ∞ wirft.

Definition:
Durch Verketten von Inversionen und Spiegelungen an Geraden ergeben sich die sog. *Möbius*transformationen.

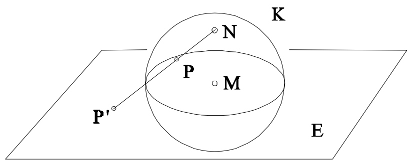
Ohne Beweis wird angegeben:

Satz 9:
Die Verkettung der Spiegelungen an zwei konzentrischen Kreisen ist eine zentrische Streckung.
Das Spiegeln an einem "Kreis", der eine Gerade ist, ist eine Achsenspiegelung.
Die Verkettung von zwei Spiegelungen an zwei parallelen "Kreisen", die beide Geraden sind, ist eine Verschiebung.
Die Verkettung von zwei Spiegelungen an zwei sich schneidenden Geraden ist eine Drehung.
Die Gruppe der Verkettungen ist 3transitiv, d.h.: Zur Vorgabe von drei beliebigen Punkten und ihren Bildpunkten gibt es stets eine *Möbius*transformation.

Die Beweise können einfach nachgerechnet werden, wenn man die Kreisgeometriepunkte als komplexe Zahlen definiert (vgl. Meyer [3]).

Eine weitere kreis- und winkeltreue Abbildung ist im folgenden beschrieben:

Definition der stereographischen Projektion:
Die Punkte P der Kugel K um M außer dem "Nordpol" N werden durch die folgende Abbildung eineindeutig auf die Punkte P' der affinen Tangentialebene E an die Kugel in ihrem Südpol wie folgt abgebildet: P' ist der Schnittpunkt von PN mit der Tangentialebene E.



Ohne Beweis wird angegeben:

Satz 10:
Die stereographische Projektion ist kreis- und winkeltreu.

Bemerkung:
Die Gesamtheit der ebenen Schnitte einer Kugel zusammen mit ihren Punkten bildet eine Kreisgeometrie. Die affine Ebene mit ihren Kreisen ist also über die stereographische Projektion durch Hinzunahme eines einzelnen Punktes N' abgeschlossen. Die stereographische Projektion kann helfen, ein gegebenes Problem anschaulicher zu machen.

Aufgaben: 1.1.f.1 bis 14, wobei insbesondere die Aufgaben 4, 8 und 9 gemacht werden sollten.

Anheben der Dimension als Beweisprinzip im Anschauungsraum:
Manche Sätze über ebene Konfigurationen im Anschauungsraum (genauer in einem Raum, dessen Koordinaten einen Körper bilden) lassen sich dadurch beweisen, daß man sich die gegebene Konfiguration als Bild einer räumlichen vorstellt. Als Beispiele können der Satz von *Desargues* und der Schließungssatz von *Miquel* dienen.

Satz 11 vom Aufblasen und Schrumpfen lassen:
Hat man eine ebene Konfiguration aus Geraden und Punkten, so ändert sich das Fernpunktsverhalten der Konfiguration nicht, wenn man unter Beibehaltung der Geradenrichtungen Kreise schrumpfen läßt oder aufbläst.

Zum Beweis:
Der Satz läßt sich in der komplexen projektiven Geometrie beweisen. Hier geht es aber nur um den Inhalt des Satzes, da die einzelne Anwendung stets elementargeometrisch bewiesen werden kann.

Anwendungen:
- Die gemeinsamen äußeren Tangenten an zwei Kreise kann man dadurch finden, daß man den kleineren Kreis zu einem Punkt schrumpfen läßt. Analoges gilt für die inneren Tangenten.
- Hat man bei einer bestimmten Projektion einer Raumkurve 4. Ordnung (also z. B. die Verschneidungskurve zweier Flächen 2. Ordnung) eine doppelt überdeckte Bildkurve, so hat

diese die Ordnung 2. Nun kann man u. U. durch Aufblasen usw. die sich verschneidenden Flächen so verändern, daß in dieser Ansicht die Bildkurve ein zerfallender Kegelschnitt wird. Je nachdem, ob nun dies eine Gerade ist oder zwei Geraden sind, kann man auf Parabel oder Hyperbel (Teile!) schließen; ist die Ansicht fernpunktsfrrei, so ist die Ansicht der ursprünglichen Verschneidungskurve Teil einer Ellipse.

g) Flächen- und Volumenberechnungen:
Zerlegen und Ergänzen von Konfigurationen werden oft erforderlich.

h) Kongruenz- oder Abbildungsbeweis:
Eigentlich besteht zwischen diesen beiden Beweisarten gar kein Unterschied. Auch beim Kongruenzbeweis muß man zumindest in seiner Vorstellung die kongruenten Teile durch Bewegung zur Deckung bringen können. Der Abbildungsbeweis geht in aller Regel stärker auf die Eigenschaften einer Abbildung ein, wie wir sie in f) genauer studiert haben.

Literatur

Baldus-Löbell [1]: Nichteuklidische Geometrie, Sammlung Göschen 1954

Meyer, Kh. [1]: Gymnasialer Mathematikunterricht im Wandel, Franzbecker Hildesheim 1996

[2]: Kreis des Apollonius, aus Mathematikinformation des Gymnasiums Starnberg (vergriffen)

[3]: Kreisgeometrie, aus Mathematikinformation Gymnasium Starnberg Heft 26, 1996

Meyer, Kh. u. a. [1]: Brennpunkt Geometrie 7, Schroedel-Schulbuchverlag GmbH Hannover 1992 (vergriffen)